

УДК 533.9:533.7

**К ТЕОРИИ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ РЕЛАКСАЦИИ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА, ИЗЛУЧАЮЩЕГО В УСЛОВИЯХ КОЛЛЕКТИВНОГО ЭФФЕКТА ЧЕРЕНКОВА**

М. В. Кузелев, В. А. Панин

(кафедра физической электроники)

Работа посвящена исследованию многомодовых пучковых неустойчивостей, развивающихся в условиях коллективного эффекта Черенкова, методами квазилинейной теории. Показана эквивалентность квазилинейного подхода и метода характеристик уравнения Власова для описания релаксации многомодовых неустойчивостей пучка. Исследовано возбуждение широкого спектра электромагнитных колебаний плотным пучком в замедляющей системе. Помимо этого, получено уравнение типа Фоккера—Планка, описывающее диффузию электронов в пространстве скоростей, а также законы сохранения энергии и импульса в системе частицы—поле.

В работах [1—3] методы квазилинейной теории использовались для анализа релаксации пучковых неустойчивостей в режиме одночастичного эффекта Черенкова. В настоящей работе квазилинейный подход применяется для исследования пучковых неустойчивостей, развивающихся в условиях коллективного эффекта Черенкова [4]. Отметим, что классическая квазилинейная теория — это теория взаимодействия волна—частица. Здесь речь идет о приложении квазилинейной теории к проблеме взаимодействия волна—волна и математически дело сводится к тому, что коэффициент диффузии в пространстве скоростей оказывается не таким, как в классической теории.

Прежде чем перейти к рассмотрению конкретной задачи, получим ряд общих уравнений, которые составляют суть квазилинейного подхода при учете коллективных эффектов.

Запишем кинетическое уравнение для функции распределения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{e}{m} E \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \tag{1}$$

и представим входящие в него величины в виде

$$E = \frac{1}{2} \sum_s [E_s(t) \exp\{-i\omega_s t + ik_s z\} + \text{к. с.}],$$

$$f = f_0(t) + \frac{1}{2} \sum_s [f_s(t) \exp\{-i\omega_s t + ik_s z\} + \text{к. с.}]. \tag{2}$$

Здесь  $f_0(t)$  — усредненная по периоду начального возмущения функция распределения, а величины с индексами  $s$  обусловлены волнами и их взаимодействием. Из (1) и (2) следуют два точных соотношения:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{1}{4} \frac{e}{m} \sum_s \left( E_s \frac{\partial f_s^*}{\partial v} + \text{к. с.} \right) = 0,$$

$$f_s = -i \frac{e}{m} \hat{p}_s E_s \frac{\partial f_0}{\partial v}, \tag{3}$$

где  $\widehat{p}_s$  — псевдодифференциальный оператор, определяемый выражением

$$\widehat{p}_s = \left( \omega_s - k_s v + i \frac{\partial}{\partial t} \right)^{-1} = \frac{\omega_s - k_s v - i \partial / \partial t}{(\omega_s - k_s v)^2 + \partial^2 / \partial t^2}. \quad (4)$$

Конечно, под точностью мы понимаем возможность определения функции  $f_0$  при знании всех  $f_s$ .

При коллективном эффекте Черенкова [4]

$$|\omega_s - k_s v| \gg |\partial / \partial t|, \quad (5)$$

поскольку  $|\omega_s - k_s v| \sim \omega_b$  ( $\omega_b$  — ленгмюровская частота электронов), а  $|\partial / \partial t| \sim \delta \omega$  ( $\delta \omega$  — инкремент неустойчивости). Выполнение неравенства (5) означает, что резонансные взаимодействия волна—частица отсутствуют, и позволяет записать следующее выражение для  $f_s$ :

$$f_s = -i \frac{e}{m} \frac{E_s \frac{\partial f_0}{\partial v}}{\omega_s - k_s v} - \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E_s \frac{\partial f_0}{\partial v}}{(\omega_s - k_s v)^2} \right). \quad (6)$$

Отметим, что в случае одночастичного эффекта Черенкова так делать нельзя, поскольку неравенство (5) не выполнено. Подставляя теперь (6) в первое уравнение (3), получим окончательно уравнение типа Фоккера—Планка для усредненной функции распределения  $f_0$ :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{1}{4} \left( \frac{e}{m} \right)^2 \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \sum_s \frac{1}{(\omega_s - k_s v)^2} \left[ \frac{\partial |E_s|^2}{\partial t} \frac{\partial f_0}{\partial v} + 2 |E_s|^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial v^2} \right] \right\}, \quad (7)$$

которое описывает диффузию электронов в пространстве скоростей.

Запишем еще следующие из (7) уравнения для моментов функции  $f_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int v f_0 dv &= \frac{1}{4} \left( \frac{e}{m} \right)^2 \sum_s \int dv \left[ \frac{\partial |E_s|^2}{\partial t} f_0 + \right. \\ &+ \left. 2 |E_s|^2 \frac{\partial f_0}{\partial t} \right] \frac{\partial}{\partial v} (\omega_s - k_s v)^{-2}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{v^2}{2} f_0 dv &= \frac{1}{4} \left( \frac{e}{m} \right)^2 \sum_s \int dv \left[ \frac{\partial |E_s|^2}{\partial t} f_0 + \right. \\ &+ \left. 2 |E_s|^2 \frac{\partial f_0}{\partial t} \right] \frac{\partial}{\partial v} [v (\omega_s - k_s v)^{-2}]. \end{aligned} \quad (8)$$

Если пучок близок к моноэнергетическому и  $f_0$  имеет максимум при некоторой средней скорости  $v = u$ , то соотношения (8) существенно упрощаются ( $\int f_0 dv = n_b$ ):

$$\begin{aligned} \int m v f_0 dv &= \sum_s \frac{k_s \omega_b^2}{(\omega_s - k_s u)^3} \frac{|E_s|^2}{8\pi} + \text{const}, \\ \int m \frac{v^2}{2} f_0 dv &= \sum_s \frac{(\omega_s + k_s u) \omega_b^2}{[(\omega_s - k_s u)^3]} \frac{|E_s|^2}{8\pi} + \text{const}. \end{aligned} \quad (9)$$

Выясним смысл последних соотношений. Для этого рассмотрим простейшие плазменные колебания, возбуждаемые в неподвижной плазме (или покоящемся пучке) с нулевого уровня некоторым внешним источником, который характеризуется плотностью сторонних зарядов  $\rho_0$  и сторонних токов  $j_0$ . В этом случае  $u=0$ ,  $\omega_s=\omega_b$ , а  $\text{const}=0$ . Поэтому соотношения (9) записываются в виде

$$\int m v f_0 dv = \sum_s \frac{k_s}{\omega_b} \frac{|E_s|^2}{8\pi},$$

$$\int m \frac{v^2}{2} f_0 dv = \sum_s \frac{|E_s|^2}{16\pi}. \quad (10)$$

Запишем еще законы сохранения импульса и энергии, учитывающие вклад от внешнего источника. Их проще всего получить, дополнив кинетическое уравнение (1) уравнениями поля

$$\frac{\partial E}{\partial z} = 4\pi e \int f_0 dv + 4\pi \rho_0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -4\pi e \int v f_0 dv - 4\pi j_0. \quad (11)$$

Вытекающие из (10) и (11) законы сохранения импульса и энергии имеют соответственно следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int m v f_0 dv = -\frac{1}{L} \int_0^L \rho_0 E dz,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int \frac{m v^2}{2} f_0 dv + \sum_s \frac{|E_s|^2}{16\pi} \right\} = -\frac{1}{L} \int_0^L j_0 E dz. \quad (12)$$

Здесь  $L$  — пространственный период возмущений в плазме. При получении (12) было учтено, что

$$\frac{1}{L} \int_0^L \frac{E^2}{8\pi} dz = \sum_s \frac{|E_s|^2}{16\pi}. \quad (13)$$

Из первых двух соотношений (10) и (12) видно, что импульс плазменных колебаний (потенциальных) равен изменению механического импульса электронов и выражается через поле следующим образом [5]:

$$P_b = \delta P_e \equiv \int m v f_0 dv = \sum_s P_{bs} = \sum_s \frac{|E_s|^2}{8\pi} \frac{k_s}{\omega_b}, \quad (14)$$

а  $P_{bs} = (k_s/\omega_b) |E_s|^2 / (8\pi)$  — импульс  $s$ -го колебания. Из второго соотношения (12) получаем выражение для электромагнитной энергии плазменных колебаний:

$$W'_\parallel = \sum_s W'_{\parallel s} = \sum_s \frac{|E_s|^2}{16\pi}. \quad (15)$$

Следовательно, второе соотношение (10) означает равенство механической и электростатической энергии в плазменных колебаниях (теорема

вириала [6]). Полная энергия плазменных колебаний определяется формулой [5]

$$W_b = \sum_s W_{bs} = \sum_s \frac{|E_s|^2}{8\pi}, \quad (16)$$

причем, как это и должно быть,  $P_{bs} = (k_s/\omega_b) W_b$ .

В случае электронного пучка  $\omega_s - k_s u = \pm \omega_b$  и вместо (10) из (9) имеем

$$\int m v f_0 dv = \pm \sum_s \frac{k_s}{\omega_b} \frac{|E_s|^2}{8\pi} + m n_b u, \quad (17)$$

$$\int \frac{m v^2}{2} f_0 dv = \sum_s \frac{|E_s|^2}{16\pi} \pm u \sum_s \frac{k_s}{\omega_b} \frac{|E_s|^2}{8\pi} + n_b \frac{m u^2}{2},$$

а что касается соотношений (12), то они по-прежнему остаются в силе. При этом из второго соотношения (12) следует, что и в пучке электростатическая энергия плазменных колебаний дается формулой (15). Легко также видеть, что импульс и энергия пучковых плазменных волн определяются выражениями [7]

$$P_b^{(\pm)} = (\delta P_e) = \int m v f_0 dv - m n_b u = \pm \sum_s \frac{k_s}{\omega_b} \frac{|E_s|^2}{8\pi}, \quad (18)$$

$$W_b^{(\pm)} = \sum_s \left( 1 \pm \frac{k_s u}{\omega_b} \right) \frac{|E_s|^2}{8\pi} = \pm \sum_s \frac{\omega_s}{\omega_b} \frac{|E_s|^2}{8\pi}$$

для быстрых и медленных волн соответственно. Причем, как это и должно быть,  $P_{bs}^{(\pm)} = (k_s/\omega_s) W_{bs}^{(\pm)}$ .

Перейдем теперь к задаче о возбуждении широкого спектра электромагнитных колебаний замагниченным электронным пучком. В этом случае в уравнении (1) для функции распределения вместо  $E$  следует писать  $E_z + \beta^2 \Psi$ , где  $E_z$  — электрическое поле (ось  $z$  совпадает с направлением движения пучка), обусловленное колебаниями плотности пучка и определяемое первой формулой в (2), а

$$\Psi = \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \cdot \frac{1}{2} \sum_s [A_s(t) \exp\{-i\omega_s t + i k_s z\} + \text{к. с.}] \quad (19)$$

описывает поле излучения\*. Величина  $\beta^2$  есть параметр связи, конкретный вид которого определяется геометрией замедляющей системы (например, для пучка и плазмы, разведенных в пространстве,  $\beta^2$  зависит от расстояния между ними [8]).

Для полей  $E_z$  и  $\Psi$  запишем следующие уравнения:

$$\frac{dE_z}{dz} = 4\pi\rho_b, \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{D} \left( \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial r_1}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi = 4\pi\beta^2\rho_b.$$

\* Величина  $\Psi$  называется поляризационным потенциалом и является единственной ненулевой компонентой вектора Герца [9] для мод  $E$ -типа при наличии бесконечно сильного внешнего магнитного поля.

Здесь  $\rho_b$  — возмущение плотности заряда электронов пучка, а  $\widehat{D} \left( \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\perp}, \frac{\partial}{\partial t} \right)$  — дифференциальный оператор, определяемый конкретным типом замедляющей системы.

Используя представления (2), (3) и (19), уравнения (1) и (20) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{1}{4} \frac{e}{m} \sum_s \left[ (E_s - \kappa_s^2 \beta^2 A_s) \frac{\partial f_s^*}{\partial v_z} + \text{к. с.} \right] &= 0, \\ \frac{\partial f_s}{\partial t} - i(\omega_s - k_s v_z) f_s + \frac{e}{m} (E_s - \kappa_s^2 \beta^2 A_s) \frac{\partial f_0}{\partial v_z} &= 0, \\ \frac{\partial D_s}{\partial \omega} \frac{dA_s}{dt} &= -\frac{4\pi e}{k_s} \beta^2 \int f_s dv_z, \\ E_s &= -i \frac{4\pi e}{k_s} \int f_s dv_z, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\kappa_s^2 = k_s^2 - \omega_s^2/c^2$ ,  $D_s$  — дисперсионное уравнение собственных мод в замедляющей системе, причем  $D_s(\omega_s, k_s) \equiv 0$ . Отметим, что из первых двух уравнений системы (21) следует уравнение Фоккера—Планка (7).

Введем безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \tau &= \omega_b t, \quad \eta = \frac{k_1}{\omega_b} (v_z - u), \quad k_1 = k_s|_{s=1}, \quad \eta_{0s} = (\omega_s - k_s u)/\omega_b, \\ \varepsilon_s &= \frac{e}{m} k_1 \frac{\kappa_1}{\omega_b^2} \left( \frac{\partial D_1}{\partial \omega} \right)^{1/2} A_s, \quad B_s = \frac{e}{m} \frac{k_1}{\omega_b^2} E_s, \\ v &= \frac{1}{\omega_b^{1/2}} \left( \frac{1}{\omega_1^2} \frac{\partial D_1}{\partial \omega} \right)^{-1/2} \beta^2, \\ f_s &\rightarrow f_s/n_b; \quad f_0 \rightarrow f_0/n_b. \end{aligned} \quad (22)$$

Считая далее, что без ограничения общности  $k_s = s k_1$  ( $s \in [s_{\min}, s_{\max}]$ ) и рассматривая для простоты линейный закон дисперсии ( $\omega_s = k_s v_{ph}$ ), имеем

$$\frac{\kappa_s^2}{\omega_1^2} = s^2; \quad \frac{\partial D_1 / \partial \omega}{\partial D_s / \partial \omega} = \frac{1}{s}; \quad \eta_{0s} = -s. \quad (23)$$

С учетом (22) и (23) система уравнений (21) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_s}{d\tau} &= \frac{1}{s^2} v \rho_s, \\ \frac{\partial f_s}{\partial \tau} + i s (1 + \eta) f_s - \left( v s^2 \varepsilon_s + \frac{i}{s} \rho_s \right) \frac{\partial f_0}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial f_0}{\partial \tau} - \frac{1}{4} \sum_s \left[ \left( v s^2 \varepsilon_s + \frac{i}{s} \rho_s \right) \frac{\partial f_s^*}{\partial \eta} + \text{к. с.} \right], \\ \rho_s &= \int f_s d\eta. \end{aligned} \quad (24)$$

В уравнениях (24) величина  $B_s$  исключена с помощью соотношения  $B_s = -i\rho_s/s$ . Сделаем замену переменной  $\eta = \tilde{\eta} + W(\tau)$  и проинтегрируем второе уравнение системы (24):

$$\frac{d\rho_s}{d\tau} + is(1+W)\rho_s + is \int \tilde{\eta} f_s d\tilde{\eta} = 0. \quad (25)$$

Используя далее уравнение для первого момента функции  $f_s$  и считая  $\rho_s$  медленной функцией времени, что справедливо в условиях неравенства (5), получим

$$\frac{d\rho_s}{d\tau} + \frac{i}{2} \left( \frac{s^2-1}{s} + \frac{s^2+1}{s} W \right) \rho_s = \frac{1}{2} v s^2 \varepsilon_s. \quad (26)$$

Введение новой переменной  $\tilde{\eta}$  делает возможным симметризацию усредненной функции распределения  $f_0$  ( $\int \tilde{\eta} f_0 d\tilde{\eta} = 0$ ). В этом случае из третьего уравнения системы (24) легко получаем

$$W(\tau) = -\frac{1}{4} \sum_s s^4 (|\varepsilon_s|^2 - |\varepsilon_{s0}|^2) = -\frac{1}{2} \sum_s s^2 |\rho_s|^2, \quad |\varepsilon_{s0}| = |\varepsilon_s| |_{\tau=0}. \quad (27)$$

В итоге система уравнений (24) преобразуется к виду ( $\rho_s \rightarrow \rho_s/s$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_s}{d\tau} &= \frac{1}{s} v \rho_s, \\ \frac{d\rho_s}{d\tau} + \frac{i}{2} \delta_s \rho_s &= \frac{1}{2} v s \varepsilon_s, \\ \delta_s &= \frac{s^2-1}{s} - \frac{s^2+1}{2s} \sum_k k^2 |\rho_k|^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Уравнения (28) получены в приближении кубической нелинейности, что соответствует учету лишь первых моментов от функции  $f_s$ , и справедливы при выполнении неравенства

$$v \ll 1, \quad (29)$$

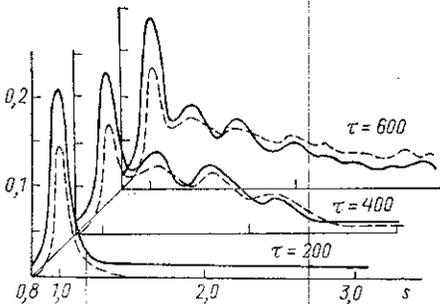
которое полностью эквивалентно (5). Величина  $\delta_s$  представляет собой нелинейную расстройку, причем функцию

$$T = \frac{1}{2} \sum_k k^2 |\rho_k|^2 \quad (30)$$

можно трактовать как температуру пучка. Отметим, что система (28) полностью эквивалентна уравнениям, полученным в работе [10] на основе метода характеристик уравнения Власова, и описывает динамику слабой турбулентности электронного пучка в режиме коллективного эффекта Черенкова.

Рассмотрим динамику спектра электромагнитных колебаний в системе со следующими параметрами:  $v=0,05$ ;  $|\varepsilon_{s0}|=0,01$ ;  $s=0,8+nh$ , где  $n=0, 1, 2, \dots$  — число мод, а  $h$  — расстояние между модами на оси волновых чисел. При этом должно выполняться неравенство  $h < 2\sqrt{2}v$ , чтобы в полосу резонанса попадало несколько мод одновременно. В численных расчетах полагалось  $n=221$ ,  $h=0,01$ . На рисунке представлена динамика спектров  $|\varepsilon_s|$  (сплошная линия) и  $|\rho_s|$  (пунктир) в различные моменты времени. Видно, что с течением времени спектр уширяется

ся и граница неустойчивости смещается в сторону больших  $s$ . При  $\tau \sim 600$  возбужден практически весь спектр. Механизм возбуждения слабой турбулентности определяется торможением электронного пучка [11] и захватом в полосу резонанса новых электромагнитных мод с большими номерами  $s$ . В работах [10, 11] показано, что пучок тормозится до тех пор, пока его скорость станет равной фазовой скорости замедленной электромагнитной волны.



Анализ динамики слабой турбулентности можно провести также на основе уравнения типа Фоккера—Планка. Однако, поскольку в обоих случаях без численных методов не обойтись, отметим, что интегрирование уравнений в обыкновенных производных типа (28) намного проще, чем решение уравнения Фоккера—Планка.

Отметим, что интегрирование уравнений в обыкновенных производных типа (28) намного проще, чем решение уравнения Фоккера—Планка.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Файнберг Я. Б., Шапиро В. Д. //ЖЭТФ. 1964. 47, № 4. С. 1389.  
 [2] Файнберг Я. Б., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. //ЖЭТФ. 1969. 57, № 3. С. 966. [3] Брейзман Б. Н., Рютов Д. Д. //ЖЭТФ. 1971. 66, № 1. С. 408. [4] Кузелев М. В., Рухадзе А. А. //УФН. 1987. 152, № 2. С. 285. [5] Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. М., 1976. [6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М., 1973. [7] Незлин М. В. Динамика пучков в плазме. М., 1982. [8] Александров А. Ф., Кузелев М. В., Халилов А. Н. //Физика плазмы. 1988. 14, № 4. С. 455. [9] Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухорук А. П. Теория волн. М., 1979. [10] Кузелев М. В., Панин В. А., Плотников А. П., Рухадзе А. А. //Кр. сообщ. по физике ФИАН. 1987. № 6. С. 24. [11] Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Бобылев Ю. В., Панин В. А. //ЖЭТФ. 1986. 91, № 5 (11). С. 1620.

Поступила в редакцию  
19.12.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 5

УДК 621.385.69

### ДИНАМИКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В НЕАДИАБАТИЧЕСКОМ ОНДУЛЯТОРЕ С ВЕДУЩИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

А. Ф. Александров, В. Л. Веснин, В. А. Кубарев, В. А. Черепенин

(кафедра физической электроники)

Развита нелинейная теория, позволяющая подробно исследовать динамику релятивистских электронов в неадиабатических ондуляторах с ведущим магнитным полем. Кривые нелинейного резонанса качественно отличаются от кривых для адиабатических ондуляторов. В области резонансных магнитных полей, представляющей наибольший интерес, в обоих случаях стационарные траектории электронов отсутствуют. Рассмотрены особенности динамики электронов для активных и пассивных систем. Показано, что применение неадиабатических ондуляторов обеспечивает значительно более сильную закрутку пучка и перспективно в СВЧ-устройствах с поперечным взаимодействием, особенно в устройствах, использующих резонансное рассеяние.

Ондуляторы различных типов с ведущим магнитным полем широко применяются для накачки осцилляторной скорости релятивистских электронных пучков (РЭП), используемых в гиротронах, мазерах на