Можно убедиться с помощью непосредственных вычислений, что в этом случае происходит полное сокращение неинвариантных слагаемых в двухпетлевом контрчлене. Имея в виду аналогию с R^*-операцией, следует ожидать, что это свойство сохранится во всех порядках теории возмущений.

Таким образом, выражение (13) представляет собой искомую ИК-регуляризацию, обеспечивающую корректное инвариантное разделение ИК- и УФ-расходимостей в ДНСМ.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Abbott L.//Nucl. Phys. 1981. **B185**. P. 189. [2] Friedan D.//Ann. Phys. 1985. **163**. P. 318. [3] Honerkamp J.//Nucl. Phys. 1972. **B36**. P. 130. [4] Alvarez-Gaume L., Freedman D. Z., Mukhi S.//Ann. Phys. 1981. **134**. P. 85. [5] Mukhi S.//Nucl. Phys. 1986. **B264**. P. 640. [6] Воронов Б. Л., Тютин И. В.//Ядерная физика. 1981. **33**. С. 1137. [7] Howe P. S., Papadopoulos G., Stelle K. S.// //Nucl. Phys. 1988. **B296**. P. 26. [8] Green M., Schwarz J., Witten E. Superstring Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. [9] Keller G., Silvotti R.//Ann. Phys. 1988. **183**. P. 269. [10] Callan C. G., Friedan D. H., Martinec E. J., Perry M. J.//Nucl. Phys. 1985. **B262**. P. 593. [11] Curci G., Paffuti G.//Nucl. Phys. 1987. **B286**. P. 399. [12] David F.//Comm. Math. Phys. 1981. **81**. P. 149. [13] Grignani G., Mintchev M.//Phys. Rev. 1988. **D38**. P. 3163. [14] Miramontes J. L., Sanchez de Santos J. M.//Phys. Lett. 1990. **246B**. P. 399. [15] Chetyrkin K. G., Tkachov F. V.//Phys. Lett. 1982. **114B**. P. 133. [16] Смирнов В. А., Четыркин К. Г.//ТМФ. 1985. **63**. С. 462. [17] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей. 4-е изд. М., 1984. [18] Grisaru M. T., Kazakov D. I., Zanon D.//Nucl. Phys. 1987. **B287**. P. 189.

Поступила в редакцию
22.04.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 6

УДК 539.12.01

ТОПОЛОГИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ КАК СЛЕДСТВИЕ ДИНАМИКИ ЗАМКНУТЫХ БОЗОННЫХ СТРУН. I. НУЛЕВОЕ И ПЕРВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Н. Ф. Нелипа, М. Ю. Пекар

(НИИЯФ)

Анализируется возможность построения теории, в которой топология пространства-времени определяется динамикой замкнутых бозонных струн. Исходным является топологическое пространство контуров, которое задает вид вершины взаимодействия струн. На пространстве контуров строятся когомологический комплекс и топологически инвариантное действие. Уравнения движения, полученные варьированием действия, совпадают с условием замкнутости дифференциальных форм когомологий. Анализ ведется в виде разложения по константе взаимодействия струн. Рассмотрены нулевой и первый порядки. Найдены ограничения на топологию пространства-времени, обусловленные динамикой струн. Под пространством-временем в дальнейшем мы понимаем промежуточное пространство конечной размерности, которое получается из исходного бесконечномерного пространства контуров и содержит сингулярности. Для перехода к гладкому физическому пространству-времени необходимо перейти к безмассовому пределу, что будет изложено в другой статье.

Обычно в полевой теории топологическая структура пространства-времени является фоном для взаимодействия и динамика физических полей не влияет на топологию. Замкнутые струны позволяют построить теорию, в которой топология является следствием динамики струнных полей. В этой статье излагается один из возможных подходов к реализации такой программы. При этом используется разложение в ряд по константе взаимодействия струн. Мы ограничимся учетом нулевого и первого членов ряда, которые соответствуют свободным струнам и древесному приближению. Укажем основные этапы построения. 1. Вводится специфическое пространство контуров. 2. Производится локальная параметризация, соответствующая нулевому и первому порядкам взаимодействия, и находится соответствующее выражение для вершины взаимодействия струн в данной параметризации. 3. Вводится касательное пространство и строится когомологический комплекс, состоящий из нильпотентного дифференциала и замкнутых дифференциальных форм. 4. С использованием свойства нильпотентности дифференциала находится алгебра дифференциальных форм на пространстве контуров и геометрическое уравнение, представляющее собой условие замкнутости дифференциальных форм. 5. Строится топологически инвариантное действие теории, для которого уравнение движения совпадает с геометрическим уравнением. 6. С помощью условия нильпотентности дифференциала получаются ограничения на допустимую топологию пространства-времени.

Переходим к более подробному изложению.

1. Для описания бесконечномерного многообразия контуров M зададим множество координатных окрестностей и функций перехода от одной окрестности к другой. При этом существует такое покрытие пространства контуров открытыми окрестностями $\{U_\alpha\}$, что на каждой U_α задано отображение Ψ_α, которое переводит каждый элемент $z \in U_\alpha$ в некоторое множество непрерывных замкнутых контуров на открытой окрестности $u_\alpha \subset R^N$. Дифференцируемые двумерные поверхности на u_α с помощью Ψ_α^{-1} отображаются на гладкие кривые $z(\tau)$ в U_α. Функция перехода $\Psi_{\alpha\beta} = \Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1}$ сохраняет дифференцируемость двумерных поверхностей, но может менять род поверхности. Кроме того, потребуем, чтобы для любой поверхности рода $g \neq 0$ на u_α существовала такая функция перехода $\Psi_{\alpha\beta}$, которая переводит ее в поверхность рода нуль на некоторой окрестности u_β. Тем самым функции перехода описывают одновременно геометрию многообразия и динамику контуров. Как видно, идея подхода основана на том, что струна не есть внешний объект на пространстве-времени, а представляет собой множество точек пространства-времени, образующих замкнутый контур. Тем самым пространство-время является не фоном для движения струн, а результатом динамики струн.

2. Для того чтобы ввести дифференцирование на пространстве контуров, необходимо задать гладкую параметризацию окрестностей U_α. (Под гладкой мы понимаем параметризацию, не нарушающую дифференцируемости двумерных поверхностей). Для этого выберем на U_α начало координат z и зададим семейство непересекающихся гладких кривых $z(\tau)$, $z(\tau_0) = z$, покрывающих всю окрестность U_α, причем Ψ_α отображает кривые в гладкие поверхности на $u_\alpha \subset R^N$. Для параметризации пространства контуров в нулевом порядке учтем, что свободная струна при движении заметает цилиндр, и параметризуем все цилиндрические поверхности $z(\tau, \sigma)$: $\Psi_\alpha^{-1}(z(\tau, \sigma)) = z^0(\tau)$, $\tau_0 < \tau < \tau_1$. При этом семейство всех цилиндрических поверхностей на u_α не покрывает всей окрестности U_α. Обозначим через U_α^0 объединение всех кривых $z^0(\tau)$; $U_\alpha^0 \subset U_\alpha$.

В первом порядке параметризуем все поверхности с разветвлением: $z \to x, y$. Для того чтобы кривые, соответствующие первому приближению, не пересекались с кривыми из U_α^0, необходимо ввести выколотую область на окрестности u_α. При взаимодействии индексы отображения контуров на выколотую область меняются.

Исходя из требования, что параметризация взаимодействия не должна нарушать дифференцируемость поверхности, приходим к следующему выражению для вершины взаимодействия:

$$V(x,\ y,\ z)=\delta(n_x+n_y+n_z)\,\theta(\sigma_z^b-\sigma_z^a)\times$$
$$\times\Big\{\prod_{\sigma_z^a<\sigma<(\sigma_z^a+2\pi\alpha_1)}\delta(z(\sigma)-x(4\pi\alpha_3-\sigma))\prod_{(\sigma_z^a+2\pi\alpha_1)<\sigma<(\sigma_z^a+2\pi\bar{\alpha}_1)}\delta(z(\sigma)-$$
$$-y(2\pi\bar{\alpha}_2-\sigma))\prod_{(2\pi\alpha_2-\sigma_z^a)<\sigma<(2\pi(\alpha_2+\alpha_3)-\sigma_z^a)}\delta(y(\sigma)-x(2\pi(3\alpha_3+\alpha_2)-2\sigma_z^a-$$
$$-\sigma))\Big\}-\delta(n_x+n_y+n_z)\,\theta(\sigma_z^a-\sigma_z^b)\,\{\sigma_z^a\leftrightarrow\sigma_z^b\},\tag{1}$$

где $n_{x,y,z}$ — индексы отображения контуров; для параметризационных длин α выполняются соотношения

$$\alpha_1+\alpha_3=\bar{\alpha}_1;\ \ \alpha_1+\alpha_2=\bar{\alpha}_2;\ \ \alpha_2+\alpha_3=\bar{\alpha}_3.$$

Для простоты без потери общности мы приняли условие

$$\alpha_3=\theta(\sigma_z^b-\sigma_z^a)\,\alpha_1+\theta(\sigma_z^a-\sigma_z^b)\,\alpha_2.$$

Функция $\delta(n_x+n_y+n_z)$ описывает «закон сохранения» индексов отображения и тем самым характеризует топологические свойства контурного многообразия. Функции θ учитывают возможность различного выбора начала отсчета параметра σ на струне z. Остальные δ-функции описывают мультилокальное взаимодействие. Требование дифференцируемости определяет пределы изменения параметров σ.

3. Любой функционал $f(z)$, заданный на $U_\alpha{}^0$, не должен зависеть от введенной выше параметризации, т. е. выполняется условие

$$L_\sigma f(z(\sigma'))=0,\tag{2}$$

где L_σ — генераторы репараметризации вдоль параметра σ.

Введем теперь касательное пространство на $U_\alpha{}^0$. Касательный вектор к поверхности $z(\sigma,\ \tau)$ определим как производную по параметру:

$$\partial f\equiv\lim_{\tau\to\tau_0}\frac{f(z(\sigma,\ \tau))-f(z(\sigma,\ \tau_0))}{\tau-\tau_0}.$$

Так как f удовлетворяет условию (2), то для любой параметризации $\sigma\to\sigma'(\sigma,\ \tau)$, $\tau'=\tau$

$$\partial' f\equiv\lim_{\tau\to\tau_0}\frac{f(z(\sigma',\ \tau))-f(z(\sigma',\ \tau_0))}{\tau-\tau_0}=\partial f.$$

Следовательно, дифференциальный оператор на пространстве контуров содержит в себе всю совокупность операторов типа ∂ по всем репараметризациям. Поэтому общий вид дифференциальной формы на окрестности $U_\alpha{}^0$ будет таким:

$$\omega = \omega(z) + \omega^{\sigma^{(+)}}(z)\, c(\sigma^{(+)}) + \omega^{\sigma_1^{(+)}\sigma_2^{(+)}}(z)\, c(\sigma_1^{(+)})\, c(\sigma_2^{(+)}) +$$
$$+ \omega^{\sigma^{(-)}}(z)\, c(\sigma^{(-)}) + \omega^{\sigma^{(+)}\sigma^{(-)}}(z)\, c(\sigma^{(+)})\, c(\sigma^{(-)}) + \ldots +$$
$$+ \omega^{\sigma_1^{(-)}\sigma_2^{(-)}}(z)\, c(\sigma_1^{(-)})\, c(\sigma_2^{(-)}) + \ldots \equiv \omega(z,\ c),$$

где $\sigma^{(\pm)} = \sigma \pm \tau$; $c(\sigma)$ — антикоммутирующие величины, для которых выполняется соотношение

$$\{c(\sigma_1^{(\pm)}),\ c(\sigma_2^{(\pm)})\}_{(+)} = \sum_{\sigma_3^{(\pm)}} K^{\sigma_2^{(\pm)}}_{\sigma_1^{(\pm)}\sigma_3^{(\pm)}}\, c(\sigma_3^{(\pm)}).$$

Условие репараметризационной инвариантности для дифференциальных форм ω запишется так:

$$(d^0\omega)(z,\ c) = 0, \tag{3}$$

где

$$d^0 = c(\sigma^{(+)})\, L(\sigma^{(+)}) + c(\sigma^{(-)})\, L(\sigma^{(-)}) + K^{\sigma_3^{(\pm)}}_{\sigma_1^{(\pm)}\sigma_2^{(\pm)}} c(\sigma_1^{(\pm)})\, c(\sigma_2^{(\pm)})\, \bar{c}(\sigma_3^{(\pm)}).$$

Соотношение (2) содержит репараметризации как по σ, так и по τ и означает замкнутость формы ω для невзаимодействующих струн (в нулевом приближении).

Общий вид формы на окрестности $U_\alpha{}^1$ (в первом приближении) определяется тремя переменными x, y, z и запишется так:

$$\omega = \{\omega(z,\ c_z);\ \omega(x,\ c_x),\ \omega(y,\ c_y)\},$$

а условие замкнутости, аналогичное (3), примет вид

$$(d^1\omega)(z,\ c_z) = 0, \tag{3'}$$

где

$$(d^1\omega)(z) = (d^0\omega)(z) + F^1_{(z)}(\omega(x)) + F^1_{(z)}(\omega(y)).$$

В формуле (3′) контуры x, y образуют триплет с z, а F^1 — линейные функционалы на множестве дифференциальных форм, которые определяются свойствами пространства контуров. Из свойства линейности F^1 следует, что их можно представить в виде линейной комбинации

$$F^1_{(z)}(\omega(x),\ \omega(y)) = g(\Phi * \omega)(z) \equiv \sum_{x,y} g\Phi(y)\,\omega(x)\, V(x,\ y,\ z),$$

где Φ нормирована на единицу, а g — линейный множитель, который в дальнейшем отождествляется с константой взаимодействия струн. Дифференциальная форма Φ определяется свойствами пространства контуров, поэтому Φ будем трактовать как величину, описывающую струнное поле.

4. Из свойства нильпотентности первого порядка дифференциала

$$[d^1]^2 = 0$$

вытекают следующие соотношения:

$$[d^0]^2=0, \tag{4а}$$

$$d^0(\Phi*\omega)=(d^0\Phi)*\omega-\Phi*d^0\omega, \tag{4б}$$

$$\omega*\Phi=\Phi*\omega, \tag{4в}$$

$$(\Phi*\Phi)*\omega-\Phi*(\Phi*\omega)=0, \tag{4г}$$

$$d^1\Phi=d^0\Phi+g\Phi*\Phi=0. \tag{4д}$$

Соотношения (4б)—(4г) есть правила действия с функционалами. Последнее соотношение означает замкнутость формы Ф, т. е. Ф действительно описывает геометрические свойства пространства контуров и не зависит от параметризации.

Чтобы найти закон преобразования формы Ф при переходе от одной окрестности к другой, используем свойство инвариантности дифференциала относительно этих преобразований. Можно показать, что форма преобразуется следующим образом:

$$(d^1\Phi)(z)=(d^1\Psi)(z)=d^0\Psi+g\Phi*\Psi, \tag{5}$$

где $\Psi(z, c)$ — инфинитезимальная функция перехода. Это означает, что теория инвариантна относительно добавления точной формы к замкнутой, т. е. что совокупность всех Ф образует группу когомологий пространства контуров.

5. Для того чтобы получить топологический инвариант, т. е. величину, инвариантную относительно преобразования (5), необходимо ввести понятие интеграла на многообразии M. Так как мы рассматриваем линеаризованную теорию (в первом порядке), то в качестве области интегрирования надо выбрать касательное пространство в первом порядке по константе взаимодействия. В интеграле появятся два слагаемых, соответствующих мерам на $U_\alpha{}^0$ и $U_\alpha{}^1/U_\alpha{}^0$:

$$\int\limits_{U_\alpha^1} Dz=\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \oint Dz(\sigma, \tau)+\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \int\limits_{\tau}^{\tau_1} d\tau'\, d\tau'' \oint Dz(\sigma, \tau)\, v(x, y, z)\times$$

$$\times\oint Dx(\sigma, \tau')\oint Dy(\sigma, \tau''),$$

где

$$v(x, y, z)=\begin{cases}1, & \text{если } x, y, z \text{ образуют триплет,}\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Как можно убедиться непосредственной проверкой, величина, инвариантная относительно (5), запишется в виде

$$\Gamma^1=\int\limits_{U^0} Dz\,\langle\Phi,\ d^0\Phi\rangle(z)+g\int\limits_{U^0} Dz\,\langle\Phi,\ \Phi*\Phi\rangle(z)=$$

$$=\int\limits_{U^1}\langle\Phi,\ d^0\Phi\rangle+\frac{2}{3}g\int\limits_{U^1}\langle\Phi,\ \Phi*\Phi\rangle, \tag{6}$$

где $\langle\Phi,\ \tilde{\Phi}\rangle(z)=\Phi(z,\ c_z)\,\tilde{\Phi}(z,\ \tilde{c_z})\prod\limits_{0<\sigma<2\pi}\delta(c(z)-\tilde{c}(2\pi-z))$ — скалярное произведение.

Для вариации инварианта Γ^1 найдем

$$\delta\Gamma^1 = (d^1\Phi)\delta\Phi. \tag{7}$$

Так как Φ — замкнутая форма, то это выражение обращается в нуль. Следовательно, значения Γ^1 не образуют континуума и инвариант принимает дискретный ряд значений.

С физической точки зрения топологический инвариант Γ^1 является действием. Важно подчеркнуть, что уравнение движения (7) совпадает с условием замкнутости формы Φ и тем самым динамика контуров определяется когомологиями пространства M. То, что динамическое уравнение (7) совпадает с геометрическим (4д), свидетельствует о самосогласованности схемы.

Заметим, что Γ^1 является древесным приближением эффективного действия. Аналогично, второй порядок соответствует однопетлевому эффективному действию и т. д. Тем самым мы получили сразу вторично-квантованную теорию. При этом если найти полный дифференциал d, то соответствующий ему полный инвариант Γ будет определять непертурбативную формулировку теории.

Предлагаемый подход позволяет иначе взглянуть на проблему вакуумного состояния. По определению вакуумом называется состояние, не содержащее взаимодействия полей. В нашем подходе это соответствует нулевому приближению и, следовательно, «плоскому» пространству-времени. Появление взаимодействия сопровождается изменением топологии пространства-времени, и тем самым обычное понятие вакуумного состояния теряет смысл.

6. Остановимся теперь на топологических свойствах пространства-времени. Функциям перехода $\Psi_{\alpha\beta}$ на пространстве контуров можно сопоставить функции перехода между окрестностями u_α в пространстве R^N. Окрестности $\{u_\alpha\}$ образуют атлас некоторого многообразия, которое мы отождествим с пространством-временем. В нулевом порядке, описывающем невзаимодействующие струны, окрестность u_α гомеоморфна диску, и, следовательно, этому приближению соответствует «плоское» пространство-время.

Для того чтобы существовало взаимодействие, необходимо, чтобы окрестность u_α содержала дырки, поэтому в первом приближении топология по необходимости будет нетривиальной. Единственным ограничением на допустимое пространство-время в первом приближении будет то, что существуют контуры, которые нельзя стянуть в точку, т. е. условие нетривиальности первой гомотопической группы π_1. Как будет показано в следующей статье, учет высших приближений приводит к большей конкретизации допустимой топологии пространства-времени.

Таким образом, показана возможность построения подхода, в котором топология пространства-времени определяется динамикой контуров. Предлагаемый подход обладает рядом особенностей: приводит к ограничениям на допустимую топологию пространства-времени; дает сразу вторично-квантованную теорию и эффективное действие, которое является топологическим инвариантом, что позволяет исследовать непертурбативные эффекты, кроме того, в этом подходе действие описывает лишь самодействие контуров; своеобразно выглядит проблема вакуумного состояния; из свойства нильпотентности дифференциала во всех порядках по константе взаимодействия следует отсутствие аномалий.

Геометрический подход к полевой теории струн используется в ряде работ [1—5]. Во всех этих работах динамика контуров описывается с помощью теории расслоений и взаимодействие происходит в слое. В предлагаемом подходе теория расслоений не используется и взаимодействие происходит в самом пространстве контуров. Именно это обстоятельство позволяет получить топологию как следствие динамики замкнутых струн.

К числу наиболее интересных нерешенных проблем относится в первую очередь учет вклада высших приближений по константе взаимодействия. При этом, по-видимому, проясняются некоторые вопросы, связанные с компактификацией и переходом к физическому пространству-времени. Представляет также интерес выяснение таких общих свойств, как перенормируемость, унитарность и т. п. Наконец, необходимо обобщить предлагаемый подход на суперструны и гетеротические струны. По-видимому, в этих случаях также появятся дополнительные ограничения на возможные топологии пространства-времени.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kaku M. Introduction to Superstrings. Springer Verlag. 1988. [2] Bars I.// //Nucl. Phys. 1989. **B317**. P. 395. [3] Friedan D., Shenker S.//Phys. Lett. 1986. **175B**. P. 287. [4] Bowick M., Rajeev S.//Nucl. Phys. 1987. **B293**. P. 348. [5] Castellani L.//Phys. Lett. 1988. **206B**. P. 47.

Поступила в редакцию
15.05.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 6

УДК 539.12.01

КОНЕЧНОСТЬ ЭФФЕКТИВНОГО ДЕЙСТВИЯ ТЕОРИИ ЧЖЕНЯ—САЙМОНСА И КОНФОРМНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

А. Н. Капустин, П. И. Пронин

(кафедра теоретической физики)

Рассмотрено эффективное действие в калибровочной теории в пространстве-времени размерности (2+1) и доказана его дилатационная инвариантность. На основе дилатационной инвариантности продемонстрирована конечность эффективного действия во всех порядках теории возмущений.

1. Интерес к теории калибровочных полей в (2+1)-мерном пространстве-времени, лагранжиан которой включает топологический инвариант Чженя—Саймонса, обусловлен, с одной стороны, исследованиями теории калибровочных полей при высокой (бесконечной) температуре [1], с другой — тесной связью таких моделей с топологической теорией поля [2], предполагающей соответствие между (1+1)-конформными теориями и теорией Чженя—Саймонса [3].

В ряде недавних работ [4—6] были рассмотрены одно- и двухпетлевые вклады в эффективное действие теории с исходным лагранжианом

$$\mathscr{L} = \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\left\{A_\mu^a\partial_\nu A_\alpha^a + \frac{1}{3}f^{abc}A_\mu^a A_\nu^b A_\alpha^c\right\}. \tag{1}$$

В этих работах рассматривались разные схемы регуляризации расходящихся интегралов: в [4] — размерная регуляризация*), в [5] — ре-

*) По нашему мнению, в 3-мерных теориях размерная регуляризация приводит к ответам, которые не совпадают с результатами, полученными традиционными методами, например фейнмановским обрезанием.