чае эффективное действие конформно инвариантно, и в теории отсутствуют какие-либо классические размерные параметры. Стало быть, эффективное действие не может зависеть от μ и, следовательно, оно не может быть только конечным. Этот пример — демонстрация тесной связи конформной инвариантности и конечности эффективного действия. По-видимому, для того чтобы действие было конечным, необходимо выполнение двух условий: отсутствие конформных аномалий и конечность эффективного действия по крайней мере в одной петле. Хорошо известно, что в 4-мерной гравитации Эйнштейна нарушается одно из этих требований, а в теории Янга—Миллса — оба.

В заключение мы хотели бы подчеркнуть, что топологические теории поля (см. [2]), к которым относится рассмотренная нами теория Чженя—Саймонса, могут вообще оказаться конечными теориями. К детальному обсуждению этой проблемы мы вернемся в последующих публикациях.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Gross D. J., Pisarski R. D., Yaffe L. G.//Rev. Mod. Phys. 1981. **53.** P. 43. [2] Pisarski R. D., Rao S.//Phys. Rev. 1985. **D32**. P. 208. [3] Witten E.// //Comm. Math. Phys. 1989. **121.** P. 351. [4] Witten E.//Comm. Math. Phys. 1989. **117.** P. 353. [5] Alvarez-Gaume L., Labastida J. M. F., Ramallo O. V.//Nucl. Phys. 1990. **B334**. P. 103. [6] Guadagnini E., Matrellini M., Mintchev M.// //Phys. Lett. 1989. **227B.** P. 111. [7] Adler S.//Rev. Mod. Phys. 1982. **54.** P. 729. [8] Adler S.//Phys. Rev. 1969. **177.** P. 2426; Bell J. S., Jackiw R.//Nuovo Cim. 1969. **A60.** P. 47

Поступила в редакцию
31.05.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 6

УДК 536.758; 539.201

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НИТРОЦЕМЕНТАЦИИ

В. Б. Гласко, И. Э. Степанова, С. А. Юрасов

(кафедра математики)

Для моделей нитроцементации исследуется проблема единственности определения коэффициента диффузии по данным о поле концентраций. Для более общей обратной задачи установлена единственность нормального решения относительно полиномиальных коэффициентов параболической системы уравнений.

1. Технологический процесс нитроцементации сталей [1] описывается при некоторых дополнительных условиях нелинейной системой уравнений параболического типа, связанных через коэффициенты диффузии, зависящие от решения системы — концентраций углерода (u_1) и азота (u_2): $D_i = D_i(u_1, u_2)$. Для функций D_i используются линейные представления [2] либо экспериментальные формулы. Однако не для всех технологических процессов даже такие приближения известны. Возникает задача об определении D_i по косвенным измерениям диффузионных полей, относящаяся к классу обратных [3]. Единственность решения такой задачи имеет принципиальное значение прежде всего потому, что в этом случае можно задать дополнительные условия, достаточные для однозначного определения искомых коэффициентов, в предположении, что все исходные данные абсолютно точны. При единственности решения можно использовать регуляризи-

рующие операторы для поиска приближений [4] при неточных входных данных.

Работы, выполненные с позиций общей теории уравнений параболического типа [5, 6], относящиеся к одному уравнению, приводят к выводу, что даже при полной информации о решении краевой задачи в области его определения нельзя, вообще говоря, определить однозначно коэффициенты уравнения. В настоящей статье проблема единственности рассматривается главным образом в рамках моделей, близких к принятым в задачах нитроцементации при сокращенной входной информации о поле концентраций.

Для наглядности будем рассматривать пространственно-одномерную краевую задачу: $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant \hat{t}$.

2. Рассмотрим прежде всего общепринятую линейную модель для коэффициентов D_i:

$$D_i = \bar{a}_{0,i} + \bar{a}_{1,i} u_1 + \bar{a}_{2,i} u_2, \tag{1}$$

где $\bar{a}_{0,i}$ $\bar{a}_{1,i}$, $\bar{a}_{2,i}$ — некоторые функции температуры процесса [1]. При не слишком высоких температурах взаимодействием процессов пренебрегают ($D_i = \bar{a}_{0,i}$) и задача распадается на две независимые. При высокой температуре T, которая рассматривается как параметр, будем различать две модификации. Модификация (α): $\bar{a}_{1,i} = \bar{a}_{2,i} \equiv \bar{a}_{1,i}$, когда взаимодействие определяется суммой концентраций. При этом искомой величиной будем считать $\mathbf{p}_\alpha = \{\bar{a}_{0,i}; \bar{a}_{1,i}\}$, $i=1, 2$, с постоянными при фиксированной температуре компонентами. Модификация (β): $\bar{a}_{1,i} \neq \bar{a}_{2,i}$, но значения $\bar{a}_{0,i}$ считаются известными из косвенных наблюдений над несвязанными диффузионными полями. В этом случае искомой величиной является $\mathbf{p}_\beta = \{\bar{a}_{1,i}; \bar{a}_{2,i}\}$, где компоненты также постоянны.

Заметим, что величины $\bar{a}_{0,i}$ для модификации (β) могут быть однозначно определены и в том случае, если $\bar{a}_{0,i} = \bar{a}_{0,i}(u_i)$ при не слишком жестких ограничениях на класс таких функций [7] и даже при неполной информации о диффузионных полях: достаточно, чтобы наряду с обычными краевыми условиями второго или третьего рода [8] были заданы на одном из концов концентрации как функции времени: $u_i(0, t) = \varphi_i(t)$. В рамках принятых выше моделей при заданных начальных концентрациях и краевых условиях любого типа диффузионный процесс описывается системой уравнений

$$L_i(u_1, u_2) \equiv \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(D_i(u_1, u_2)\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) = 0,$$

$$(x, t) \in Q \equiv [0, l] \times [0, \hat{t}]. \tag{2}$$

Обозначим через M_p множество значений $\mathbf{p}_\alpha$ (либо $\mathbf{p}_\beta$), а через M_u — множество решений $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ системы (2) при выбранных дополнительных условиях, и пусть $\mathbf{p}_\alpha \in M_p$ (или $\mathbf{p}_\beta \in M_p$). Очевидно, условие $\mathbf{u} \in M_u$ обеспечивает существование решения обратной задачи.

Назовем диффузионные поля вырожденными в некоторой подобласти Q, если в этой подобласти $\partial^2 u_i/\partial x^2 \equiv 0$ либо $\frac{\partial}{\partial x}\left((u_1+u_2)\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) \equiv \alpha \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}$ при некотором α, $i=1, 2$.

Теорема 1. *Пусть $u \in M_u$ известно в некоторой окрестности ω_{M_0} любой точки $M_0(x_0, t_0) \in Q$ и диффузионные поля невырожденны. Тогда решения обратных задач $\mathbf{u}_\omega \to \mathbf{p}_\alpha$, $\mathbf{u}_\omega \to \mathbf{p}_\beta$ единственны.*

Для доказательства теоремы, например, в случае (α) рассмотрим функцию $F(\mathfrak{p}_\alpha) \equiv \iint\limits_{\omega_{M_0}} (L_1^2(\bar{u}) + L_2^2(\bar{u}))\, d\sigma$.

Очевидно, что $\inf F(\mathfrak{p}_\alpha) = 0$ и любое решение обратной задачи является решением вариационной.

Можно теперь заметить, что

$$F(\mathfrak{p}_\alpha) = \sum_{i=1}^{2} (p_{11}^{(i)} \bar{a}_{0,i}^2 + 2p_{12}^{(i)} \bar{a}_{0,i} \bar{a}_{1,i} + p_{22}^{(i)} \bar{a}_{1,i}^2 - 2q_1^{(i)} \bar{a}_{0,i} - 2q_2^{(i)} \bar{a}_{1,i} + r_i),$$

$$p_{11}^{(i)} = \iint\limits_{\omega_{M_0}} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 d\sigma, \quad p_{22}^{(i)} = \iint\limits_{\omega_{M_0}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left((u_1 + u_2) \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \right)^2 d\sigma,$$

$$p_{12}^{(i)} = \iint\limits_{\omega_{M_0}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left((u_1 + u_2) \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) d\sigma, \quad q_1^{(i)} = \iint\limits_{\omega_{M_0}} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} d\sigma,$$

$$q_2^{(i)} = \iint\limits_{\omega_{M_0}} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \left((u_1 + u_2) \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) d\sigma, \quad r_i = \iint\limits_{\omega_{M_0}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 d\sigma, \quad i = 1,\ 2.$$

Тогда критические точки определяются из распадающихся по i систем:

$$\partial F / \partial \bar{a}_{k,i} = 0,\ k = 0,\ 1;\ i = 1,\ 2.$$

В силу очевидных условий $p_{11}^{(i)} \geqslant 0$, $\Delta_i = p_{11}^{(i)} p_{22}^{(i)} - p_{12}^{(i)} \geqslant 0$ точка глобального экстремума может быть не единственной лишь в случае точных равенств $p_{11}^{(i)} = 0$ или $\Delta_i = 0$, означающих, как нетрудно видеть, вырожденность полей.

В случае (β) доказательство аналогично.

Заметим, что условия вырожденности приводят либо к распаду уравнений для диффузионных полей u_1 и u_2 на независимые, либо (подобно [5]) к специфической их структуре, не согласованной с условиями задачи (2). С другой стороны, сформулированные условия единственности носят локальный характер и могут быть отнесены к сколь угодно малой окрестности точки.

3. Другое представление о структуре D_i, вытекающее из физико-технологических данных, состоит том, что взаимное влияние диффузионных полей может определяться относительно малой добавкой к «основному» коэффициенту $\bar{a}_{0,i}$. Этому соответствует асимптотическая модель

$$D_i(u_1,\ u_2) = \bar{a}_i(u_i) + \varepsilon \delta_i(u_j), \quad i = 1,\ 2;\ j = 1,\ 2;\ j \neq i, \tag{3}$$

где ε — малый параметр.

Будем считать, что $\bar{a}_i(u_i) > 0$ известны и однозначно определены [7] (наряду с диффузионными полями $u_i \equiv u_{0i}(x,\ t)$) уравнениями (2) со следующими условиями:

$$\bar{a}_i(u_i) \frac{\partial u_i}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \psi_i(t),\ \psi_i|_{t=0} > 0,\ u_i|_{x=0} = \chi_i(t),$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0,\ u_i|_{t=0} = \varphi_i(x), \tag{4}$$

согласованными в классическом смысле. Отметим, что при выбранных $\psi_i(t)$ $\left.\frac{\partial u_{0i}}{\partial x}\right|_{x=0} \geqslant \gamma > 0$. Существование таких режимов при краевых условиях 3-го рода в задачах цементации и азотирования показано в [9]. Искомой оказывается функция $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}) = \{\delta_1(u_2), \delta_2(u_1)\}$.

Используя оценки решений параболических систем при достаточно гладких $\bar{a}_i$, δ_i, ψ_i, φ_i, приведенные в [10], можно убедиться, что в случае (3) диффузионные поля имеют следующую асимптотическую структуру:

$$u_i(x, t) = \sum_{k=0}^{1} \varepsilon^k u_{ki}(x, t) + O(\varepsilon^2), \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

Аналогичную структуру имеет $\partial u_i / \partial x$.

Обозначим через N_δ множество непрерывно дифференцируемых на полуоси $[0, +\infty)$ вектор-функций $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{u})$. Пусть N_u — множество функций $\mathbf{u}_1 \equiv \{u_{11}(x, t), u_{12}(x, t)\}$, определенных для каждого $\delta \in N_\delta$ в силу представления (5) системой (2) при тех же (4) значениях ψ_i и и φ_i. Можно убедиться, что $u_{1i}(t)$ удовлетворяют при $x=0$ краевым условиям

$$\left.\left(\bar{a}_i(u_{0i}) \frac{\partial u_{1i}}{\partial x} + \bar{a}_i'(u_{0i}) \frac{\partial u_{0i}}{\partial x} u_{1i}\right)\right|_{x=0} = -\delta(u_j) \left.\frac{\partial u_{0i}}{\partial x}\right|_{x=0}. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть* $u_{1i}(x, t) \in N_u$, $i=1, 2$, $\chi_i(t)$ — *непрерывные монотонно возрастающие функции с областью значений* $\Delta \equiv [u_{i,\min}, u_{i,\max}]$. *Тогда по заданным* $\left.\frac{\partial u_i}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_i(t)$ *и* $u_{1i}|_{x=0} = \varphi_{1i}(t)$ *на сегменте* Δ *однозначно определяются* $\delta_1(u_2)$ *и* $\delta_2(u_1)$.

Действительно, согласно [6], при $\left.\frac{\partial u_{0i}}{\partial x}\right|_{x=0} \neq 0$, что включается условием $u_{1i} \in N_u$, однозначно определены $\delta_1^*(t) \equiv \delta_1(\chi_2(t))$, $\delta_2^*(t) \equiv \equiv \delta_2(\chi_1(t))$. Но при указанных ограничениях на $\chi_i(t)$ на сегменте Δ определены обратные функции $t_j = t_j(u)$, $\delta_i^*(t_i(u)) = \delta_i(u_j)$, $j \neq i$; $i, j = 1, 2$.

4. Сформулируем в заключение результат для линейной модели, обобщающий в определенном смысле (1) и одновременно распространяющий установленный в [6] факт на систему двух уравнений.

Положим в (1)

$$\bar{a}_{0,i} \equiv a_{0,i}; \quad \bar{a}_{k,i} = \bar{a}_{k,i}(x, t), \quad k = \overline{0, 2}, \quad i = 1, 2. \tag{7}$$

Будем считать, что коэффициенты $a_{k,i}(x, t) \in W_2^{1,0}(Q)$ и удовлетворяют условиям (γ):

$$0 \leqslant \lambda_{k,i} \leqslant \bar{a}_{k,i}(x, t) \leqslant \bar{\lambda}_{k,i}; \quad \|\bar{a}_{k,i}\|_{W_2^{1,0}} \leqslant M_{k,i}, \quad k = \overline{0, 2},$$

$$i = 1, 2, \quad M_{k,i} \geqslant \tilde{\lambda}_{k,i} \sqrt{l\hat{t}}$$

и $\lambda_{k,i}$; $\tilde{\lambda}_{k,i}$; $M_{k,i}$ — априорно заданные константы. Множество таких наборов коэффициентов обозначим через K_a и поставим ему в соответствие множество K_u решений системы (2) при краевых условиях первого рода и при произвольных, согласованных с ними в классическом смысле начальных функциях.

Обозначим $\mathbf{p} \equiv \{\bar{a}_{k,i}(x, t)\} \in K_a$ и введем $\|\mathbf{p}\|$ формулой

$$\|\mathbf{p}\| \equiv (\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \sum_{k=0}^{2} \sum_{i=1}^{2} \iint_{Q} \left[\bar{a}_{k,i}^2 + \left(\frac{\partial \bar{a}_{k,i}}{\partial x} \right)^2 \right] dx\, dt. \tag{8}$$

Справедлива следующая

Теорема 3. *Если K_a — ограниченное, замкнутое, выпуклое множество, а диффузионные поля, определенные в Q, $\mathbf{u} = \{u_1, u_2\} \in K_u$, то им соответствует единственный набор $\mathbf{p} = \{\bar{a}_{k,i}(x, t)\}$, минимальный по норме* (8).

Для доказательства этой теоремы следует рассматривать вариационную задачу для функционала, аналогичного $F(\mathbf{p})$ в теореме 1, и тогда анализ может быть проведен в полной аналогии с [10].

Утверждению можно придать локальный характер, заменив Q на ω_{M_0}. Однако доказанная теорема не означает однозначности в классическом смысле решения интересующей нас прикладной задачи, в отличие от доказанных выше теорем 1 и 2.

Авторы благодарят А. Н. Тихонова и В. Д. Кальнера за полезные замечания и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Леонидова М. Н., Шварцман Л. А., Шульц Л. Н. Физико-химические основы взаимодействия металлов с контролируемыми атмосферами. М., 1980. [2] Моделирование и автоматизация на базе ЭВМ процессов химико-термической обработки автомобильных деталей. ЦНИИТЭИАВТОПРОМ, Министерство автомобильной промышленности СССР. Обзорная информация. Серия XI. «Технология автомобилестроения». М., 1987. [3] Тихонов А. Н., Кальнер В. Д., Гласко В. Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. М., 1990. [4] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986. [5] Фролов В. В.//Инж.-физ. журн. 1975. **29**, № 1. С. 808. [6] Будак Б. М., Васильева В. Н.//Решение задач оптимального управления и некоторых обратных задач. М., 1974. С. 3. [7]. Музылев Н. В.//ЖВМ и МФ. 1980. **20**, № 2. С. 388. [8] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., 1953. [9] Кальнер В. Д., Юрасов С. А., Гласко В. Б., Кулик Н. И., Евсеев Ю. К.//Металловедение и термическая обработка металлов. 1986. № 1. С. 11. [10] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.

Поступила в редакцию
05.02.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 6

УДК 519.688:519.85

ЗАДАЧА ВВОДА ГРАФИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ В ЭВМ

Б. М. Ибрахим (Сирия), А. Б. Кнуренко, С. Л. Меньшенин, Ю. П. Пытьев

(кафедра физики атмосферы и математической геофизики)

Рассматривается использование метода редукции измерений в задаче ввода графической информации в ЭВМ с диджитайзера. Описан алгоритм, учитывающий ошибки, возникающие при съеме графика, и положение графика на планшете диджитайзера и позволяющий получить в ЭВМ наиболее точные значения координат точек графика. Приведены оценки сопутствующей погрешности.

В последние годы вычислительные средства заняли прочное место в технике экспериментальных исследований. Экспериментальная установка в настоящее время содержит, как правило, ЭВМ, которая не