Обозначим $\mathbf{p}\equiv\{\tilde{a}_{k,i}(x,t)\}\in K_a$ и введем $\|\mathbf{p}\|$ формулой

$$\|\mathbf{p}\|\equiv(\mathbf{p},\mathbf{p})=\sum_{k=0}^{2}\sum_{i=1}^{2}\iint\limits_{Q}\left[\bar{a}_{k,i}^{2}+\left(\frac{\partial\bar{a}_{k,i}}{\partial x}\right)^{2}\right]dx\,dt. \tag{8}$$

Справедлива следующая

Теорема 3. *Если K_a — ограниченное, замкнутое, выпуклое множество, а диффузионные поля, определенные в Q, $\mathbf{u}=\{u_1, u_2\}\in K_u$, то им соответствует единственный набор $\mathbf{p}=\{\bar{a}_{k,i}(x,t)\}$, минимальный по норме* (8).

Для доказательства этой теоремы следует рассматривать вариационную задачу для функционала, аналогичного $F(\mathbf{p})$ в теореме 1, и тогда анализ может быть проведен в полной аналогии с [10].

Утверждению можно придать локальный характер, заменив Q на ω_{M_0}. Однако доказанная теорема не означает однозначности в классическом смысле решения интересующей нас прикладной задачи, в отличие от доказанных выше теорем 1 и 2.

Авторы благодарят А. Н. Тихонова и В. Д. Кальнера за полезные замечания и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Леонидова М. Н., Шварцман Л. А., Шульц Л. Н. Физико-химические основы взаимодействия металлов с контролируемыми атмосферами. М., 1980. [2] Моделирование и автоматизация на базе ЭВМ процессов химико-термической обработки автомобильных деталей. ЦНИИТЭИАВТОПРОМ, Министерство автомобильной промышленности СССР. Обзорная информация. Серия XI. «Технология автомобилестроения». М., 1987. [3] Тихонов А. Н., Кальнер В. Д., Гласко В. Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. М., 1990. [4] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986. [5] Фролов В. В.//Инж.-физ. журн. 1975. **29**, № 1. С. 808. [6] Будак Б. М., Васильева В. Н.//Решение задач оптимального управления и некоторых обратных задач. М., 1974. С. 3. [7]. Музылев Н. В.//ЖВМ и МФ. 1980. **20**, № 2. С. 388. [8] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., 1953. [9] Кальнер В. Д., Юрасов С. А., Гласко В. Б., Кулик Н. И., Евсеев Ю. К.//Металловедение и термическая обработка металлов. 1986. № 1. С. 11. [10] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.

Поступила в редакцию
05.02.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 6

УДК 519.688:519.85

ЗАДАЧА ВВОДА ГРАФИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ В ЭВМ

Б. М. Ибрахим (Сирия), А. Б. Кнуренко, С. Л. Меньшенин, Ю. П. Пытьев

(кафедра физики атмосферы и математической геофизики)

Рассматривается использование метода редукции измерений в задаче ввода графической информации в ЭВМ с диджитайзера. Описан алгоритм, учитывающий ошибки, возникающие при съеме графика, и положение графика на планшете диджитайзера и позволяющий получить в ЭВМ наиболее точные значения координат точек графика. Приведены оценки сопутствующей погрешности.

В последние годы вычислительные средства заняли прочное место в технике экспериментальных исследований. Экспериментальная установка в настоящее время содержит, как правило, ЭВМ, которая не только позволяет визуализировать и хранить информацию, но и в значительной степени определяет стратегию измерений. В то же время много ценной научной информации, полученной в предыдущие годы на экспериментальных установках, не оснащенных ЭВМ, хранится на бумажных носителях в виде графиков, электронограмм и т. п. Естественно, возникает проблема переноса этой информации в ЭВМ с тем, чтобы в дальнейшем использовать ее в задачах анализа и интерпретации эксперимента наряду с данными, полученными на современных экспериментальных установках. Такой перенос информации может быть выполнен как с помощью различных электронных устройств типа сканеров, так и вручную при помощи так называемых диджитайзеров.

В самом общем виде диджитайзер представляет собой планшет, на который помещаются результаты эксперимента в виде графиков, точек и т. п. на бумажном или каком-либо другом носителе, откуда при помощи специального электронного курсора производится съем точек графика и запись их координат в память ЭВМ. Очевидно, что при работе с этим устройством при съеме любой точки графика возникает погрешность, связанная с неточностью позиционирования курсора диджитайзера. При этом если $s_i=(s_{xi}, s_{yi})$ — координаты i-й точки графика в системе координат диджитайзера, $\nu_i=(\nu_{xi}, \nu_{yi})$ — ошибка определения координат i-й точки с помощью курсора, то

$$\xi_i=s_i+\nu_i \tag{1}$$

— полученное значение ее координат, $\xi_i=(\xi_{x_i}, \xi_{y_i})$, $i=1, ..., n$.

Очевидно также, что погрешности определения x, y-координат совсем не обязательно одинаковы. Это может быть связано не только со спецификой зрительной системы, но и с особенностями каждого отдельного человека и диджитайзера. Равенство (1) дает (в ЭВМ) результаты эксперимента в системе координат диджитайзера (СКД), не совпадающей с системой координат, в которой представлены результаты измерений. Поскольку диджитайзер имеет фиксированную, связанную с ним систему координат, а лист бумаги кладется на него достаточно произвольно, то добиться совпадения упомянутых систем координат практически невозможно. Поэтому будем считать, что

$$\xi=Af+\nu, \tag{2}$$

где $\xi=(\xi_1, ..., \xi_n)^*$; $\nu=(\nu_1, ..., \nu_n)^*$ — погрешности курсора, причем, как следует из проведенных исследований погрешности, можно считать, что известны $E\nu=0$ *) и корреляционный оператор $\Sigma=E\nu\nu^*$; $f=(f_1, ..., f_n)^*$ — данные измерений в системе координат, определяемой условиями эксперимента (СКЭ);

$$A=\begin{pmatrix} A' & & & \\ & A' & & \\ & & \ddots & \\ & & & A' \end{pmatrix},$$

где A', вообще говоря, неизвестный случайный оператор аффинного преобразования из СКЭ в СКД:

$$A'f_i=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} f_{xi} \\ f_{yi} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} f_{xi} \\ f_{yi} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

---

*) E — символ математического ожидания.

В одной из рассматриваемых ниже задач на основании измерения (2) необходимо получить наиболее точную версию $f=(f_1,...,f_n)^*$ или, другими словами, найти наилучшую в среднем квадратичном (с. к.) оценку вектора f.

Сформулируем вспомогательные результаты, которые будут использованы в дальнейшем. Пусть в схеме измерения (2) оператор A — случайный, известно его среднее $A_0=EA$, которое используется вместо истинного A при определении f. При этом, как известно, в линейной задаче определения f ковариационный оператор Σ должен быть заменен на $\Sigma+J$, где $J=E(((A-A_0)f)((A-A_0)f)^*)$ [1]. Если A_0 оказывается слишком грубым приближением A, т. е. $\operatorname{tr} J \gg \operatorname{tr}\Sigma$, то с целью уточнения A измеряется вектор Ag: не курсивом

$$\eta=Ag+\mu, \tag{4}$$

где g — «тестирующий» сигнал, μ — ошибка измерения. При этом уточненная версия $\hat{A}$ оператора A должна определяться из тех соображений, что мерой качества $\hat{A}$ является погрешность редукции ξ к вектору f, т. е. среднеквадратичная ошибка определения f из (2) как линейной функции $R_\eta\xi+r_\eta$ должна быть минимальна:

$$E\,\|R_\eta\xi+r_\eta-f\|^2=\min_{R,r}E\,\|R(\eta)+r(\eta)-f\|^2. \tag{5}$$

Согласно [1], решение задачи (5) дается равенствами

$$R(\eta)=FA_\eta^*(A_\eta FA_\eta^*+\Sigma_\eta)^{-1},$$

$$r(\eta)=f_0-R_\eta A_\eta f_0,$$

где*) $A_\eta=E(A|\eta)$, $f_0=Ef$, $F=E(f-f_0)(f-f_0)^*$, $\Sigma_\eta=\Sigma+J_\eta$, $J_\eta=E(((A-A_\eta)f)((A-A_\eta)f)^*|\eta)$; т. е. для решения задачи (5) необходимо знать условное среднее A_η и условный ковариационный оператор J_η. Если же пара A, μ в (4) независима и имеет нормальное распределение, g — известный вектор, то $E(A|\eta)$ — линейная функция η, а J_η от η не зависит [1].

Приведем результаты экспериментальных исследований работы диджитайзера, которые важны для дальнейшего изложения. Во-первых, экспериментально оценены математическое ожидание и ковариационный оператор шума, сопровождающего процесс съема каждой точки графика. Это было сделано путем съема точек на горизонтальной и вертикальной прямых. Поскольку погрешность, возникающая при съеме одной из координат, в этом случае несущественна, можно достаточно точно оценить погрешность съема другой координаты. Например,

$$\overline{\sigma}_y^2=\frac{1}{m-1}\sum_1^m\left(y_i-\frac{1}{m}\sum_1^m y_i\right)^2$$

можно использовать как оценку дисперсии ошибки y-координаты, где m — число выполненных измерений горизонтальной прямой. Аналогичные оценки можно получить и для погрешности съема координат отдельных точек. При этом оценки погрешностей, полученные вторым способом, несколько больше, что связано с особенностью устройства курсора, используемого в эксперименте диджитайзера, который может быть установлен более точно на вертикальных или горизонтальных прямых, нежели на отдельных точках. Кроме того, оценка дисперсии

*) $E(\cdot|\cdot)$ — символ условного математического ожидания.

зависит и от того, кто конкретно работает с диджитайзером. Однако, как правило, все эти оценки отличаются друг от друга незначительно и в задачах можно использовать некоторую усредненную оценку дисперсии каждой из координат.

Во-вторых, как следует из проведенных экспериментов, можно считать, что шум измерения имеет нормальное распределение. Наконец, согласно этим же экспериментам, можно считать, что шум при съеме различных точек графика не коррелирован, и его ковариационный оператор может быть записан как

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_x^2 & & \\ & \bar{\sigma}_y^2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\bar{\sigma}_x^2,\ \bar{\sigma}_y^2,\ \ldots).$$

Итак, задачу нахождения наилучшей в с. к. линейной оценки вектора f можно разделить на две: 1) необходимо на основании некоторых тестовых измерений получить оценку оператора A и 2) используя ее, построить наилучшую линейную оценку f.

Рассмотрим задачу уточнения оператора A, которая сводится к уточнению оператора A', априори заданного как элемент параметрического класса операторов в виде

$$A' = \sum_{i=1}^{N} a_i A_i', \tag{6}$$

где операторы $A_1', \ldots, A'_N$ известны, а вектор параметров $a = (a_1, \ldots, a_N)^* \in \mathcal{R}_N$ подлежит уточнению. «Детальность» представления (6) может быть различной начиная со случая «полностью уточняемого» оператора, когда $A_1', \ldots, A_N'$ — линейно независимые операторы $A' \in (\mathcal{R}_p \to \mathcal{R}_q)$ и $N = p \times q$. Например,

$$A' = \sum_{i,j=1}^{p,q} a_{i,j} E_{i,j},$$

где $E_{i,j}$ — матрица, у которой матричный элемент, расположенный на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен единице, а все остальные — нулю; $a_{i,j}$ — матричный элемент A', подлежащий уточнению; $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$. В другом крайнем случае требуется уточнить только «коэффициент усиления» A', $A' = a_1 A_1'$, $N = 1$.

В рассматриваемом здесь случае речь идет об аффинном преобразовании плоскости (3), и будем считать, что в равенстве (6) $a = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23})^*$,

$$A_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, A_6' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $s_i = A' f_i$, где $s_i = (s_{xi}, s_{yi})$ в СКД, $f_i = (f_{xi}, f_{yi}, 1)$ в СКЭ, $i = 1, \ldots, N$.

В данной задаче на основании измерений k известных «тестовых» точек $g_i = (g_{xi}, g_{yi}, 1)$

$$\eta_i = A' g_i + \mu_i, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{7}$$

где $\mu \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_\mu)$ — шум, сопровождающий процесс съема каждой «тестовой» точки, необходимо получить решение задачи уточнения оператора A'.

Предположим, что в (6) a — случайный вектор с распределением $\mathcal{N}(a_0, S_a)$. При этом, как правило, выбирают $a_0 = (1, 0, 0, 0, 1, 0)$, а $S_a =$

$=\operatorname{diag}(\overline{\sigma}_{11}^2, \overline{\sigma}_{12}^2, \ldots, \overline{\sigma}_{23}^2)$, где $\overline{\sigma}_{ij}$ рассчитываются исходя из возможных перекосов и сдвигов листа относительно планшета диджитайзера.

Используя представление (6), запишем (7) в виде схемы измерения вектора a:

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1'g_1 & \ldots & A_N'g_1\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_1'g_k & \ldots & A_N'g_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_N\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_k\end{pmatrix},$$

или короче:

$$\eta=Ta+\mu.$$

Тогда наилучшая в с. к. линейная оценка $R\eta+r$ вектора a может быть получена как решение следующей задачи:

$$\min_{R,r} E\,\|R\eta+r-a\|^2. \tag{8}$$

Ее решением будет

$$\widehat{a}=a_0+S_aT^*(TS_aT^*+\Sigma_\mu)^{-1}(\eta-Ta_0),$$

а сопутствующая погрешность оценки

$$E\,\|a-\widehat{a}\|^2=\operatorname{tr}(S_a-S_aT^*(TS_aT^*+\Sigma_\mu)^{-1}TS_a).$$

Таким образом, построив оценку вектора a, мы, исходя из соотношения (6), построили оценку оператора A, причем, согласно сформулированным выше результатам, полученная оценка $\hat{A}$ совпадает с $E(A\,|\,\eta)$ и является наилучшей для восстановления вектора f по измерениям (2). Однако поскольку $f=(f_{x1}, f_{y1}, 1, \ldots, f_{xn}, f_{yn}, 1)$, а нас интересуют только координаты точек, т. е. $\bar{f}=(f_{x1}, f_{y1}, \ldots, f_{xn}, f_{yn})$, то сформулируем задачу восстановления координат графика как задачу редукции измерения (2) к виду Uf, где

$$U=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}.$$

В [1] показано, что искомая редукция

$$\widehat{Uf}=Uf_0+UF\widehat{A}^*(\widehat{A}F\widehat{A}^*+\widetilde{\Sigma})^-(\xi-\widehat{A}f_0). \tag{9}$$

При этом с. к. значение сопутствующей погрешности

$$E(\|Uf-\widehat{Uf}\|^2\mid\eta)=E(\operatorname{tr}U(F-F\widehat{A}^*(\widehat{A}F\widehat{A}^*+\widetilde{\Sigma})^{-1}\widehat{A}F)U^*\mid\eta), \tag{10}$$

где $\widetilde{\Sigma}=\Sigma+J,\ J=E((A-\widehat{A})f)((A-\widehat{A})f)^*$.

Заметим также, что до съема точек с диджитайзера исходный корреляционный оператор сигнала f был F (соответственно Uf—UFU^*). Поскольку в данной задаче оператор аффинного преобразования точно не известен, а используется его оценка $\hat{A}$, полученная на основании тестовых измерений, то корреляционный оператор оценки $\widehat{Uf}$ будет равен $U(F+\widetilde{\Sigma})U^*$.

Однако в конечном счете исследователя интересуют не значения точек на графике, а соответствующие им значения сигнала, поступающего на вход устройства (самописца, графопостроителя и т. п.), нарисовавшего данный график. Это отдельная по отношению к рассматриваемой в данной статье задача, для решения которой необходима математическая модель, связывающая график и входной сигнал. Если работа такого устройства может быть представлена в виде схемы

$$\varphi = Bh + \lambda,$$

где φ — выходной сигнал (т. е. график), B — оператор, моделирующий работу устройства; h — входной сигнал; λ — шум, то задача восстановления входного сигнала h решается вполне аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Пытьев Ю. П. Методы анализа и интерпретации эксперимента. М., 1990.

Поступила в редакцию
18.06.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 6

УДК 534.222

СОЛИТОНЫ ОГИБАЮЩЕЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СВЯЗАННЫХ ВОЛНОВОДАХ

А. П. Сухоруков, Д. В. Першеев

(кафедра радиофизики)

Теоретически и численно исследованы автомодельные солитоноподобные решения системы двух нелинейных уравнений типа Шрёдингера (НУШ) для различных наборов коэффициентов. При равенстве соответствующих коэффициентов в обоих уравнениях системы обнаружено семейство солитонов нового класса, имеющих сложную амплитудную модуляцию. Доказана теорема существования и единственности для системы НУШ, исследована разностная схема.

В диспергирующих средах, показатель преломления которых зависит от интенсивности проходящей волны, оптические сигналы могут распространяться в виде солитонов огибающей [1]. Их профили рассчитываются на основе решения нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ) для комплексной амплитуды огибающей волнового пакета. Такие солитоны широко исследуются и находят применение в волоконной и интегральной оптике при построении различных информационных оптических систем.

В настоящей работе нами рассмотрены общие свойства солитонов, формирующихся в двух линейно связанных нелинейных волноводах. Напомним, что связанные волноводы могут использоваться в качестве направленных ответвителей, переключателей и т. д. Связанные волны наблюдаются также в гиротропных средах, средах с периодической неоднородностью [2, 3] и т. д. В этих случаях также можно говорить о связанных солитонах и использовать результаты, приведенные ниже.

Следует отметить, что свойства нелинейно связанных солитонов, возникающих за счет самовоздействия и кросс-воздействия, отличаются [4] от свойств солитонов с линейной связью. Нами показано, что в линейно связанных волноводах помимо тривиальных синфазных и противофазных солитонов [5] существует однопараметрическое семейство солитонов. Этот новый класс солитонов присущ связанным волноводам (или волнам) при наличии высокой степени симметрии их