

совавшего данный график. Это отдельная по отношению к рассматриваемой в данной статье задача, для решения которой необходима математическая модель, связывающая график и входной сигнал. Если работа такого устройства может быть представлена в виде схемы

$$\varphi = Bh + \lambda,$$

где φ — выходной сигнал (т. е. график), B — оператор, моделирующий работу устройства; h — входной сигнал; λ — шум, то задача восстановления входного сигнала h решается вполне аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Пытьев Ю. П. Методы анализа и интерпретации эксперимента. М., 1990.

Поступила в редакцию
18.06.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 6

УДК 534.222

СОЛИТОНЫ ОГИБАЮЩЕЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СВЯЗАННЫХ ВОЛНОВОДАХ

А. П. Сухоруков, Д. В. Першеев

(кафедра радиофизики)

Теоретически и численно исследованы автомодельные солитоноподобные решения системы двух нелинейных уравнений типа Шрёдингера (НУШ) для различных наборов коэффициентов. При равенстве соответствующих коэффициентов в обоих уравнениях системы обнаружено семейство солитонов нового класса, имеющих сложную амплитудную модуляцию. Доказана теорема существования и единственности для системы НУШ, исследована разностная схема.

В диспергирующих средах, показатель преломления которых зависит от интенсивности проходящей волны, оптические сигналы могут распространяться в виде солитонов огибающей [1]. Их профили рассчитываются на основе решения нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ) для комплексной амплитуды огибающей волнового пакета. Такие солитоны широко исследуются и находят применение в волоконной и интегральной оптике при построении различных информационных оптических систем.

В настоящей работе нами рассмотрены общие свойства солитонов, формирующихся в двух линейно связанных нелинейных волноводах. Напомним, что связанные волноводы могут использоваться в качестве направленных ответвителей, переключателей и т. д. Связанные волны наблюдаются также в гиротропных средах, средах с периодической неоднородностью [2, 3] и т. д. В этих случаях также можно говорить о связанных солитонах и использовать результаты, приведенные ниже.

Следует отметить, что свойства нелинейно связанных солитонов, возникающих за счет самовоздействия и кросс-воздействия, отличаются [4] от свойств солитонов с линейной связью. Нами показано, что в линейно связанных волноводах помимо тривиальных синфазных и противофазных солитонов [5] существует однопараметрическое семейство солитонов. Этот новый класс солитонов присущ связанным волноводам (или волнам) при наличии высокой степени симметрии их

диспергирующих и нелинейных свойств, т. е. соответствующих коэффициентов, входящих в систему двух НУШ:

$$\begin{cases} ip_z = a_1 p_{xx} + b_1 |p|^2 p + c_1 q + d_1 |q|^2 p \\ iq_z = a_2 q_{xx} + b_2 |q|^2 q + c_2 p + d_2 |p|^2 q \end{cases} \quad (1)$$

с начальным условием

$$p|_{z=0} = p_0(x), \quad q|_{z=0} = q_0(x), \\ -\infty < x < +\infty; \quad 0 \leq z \leq Z; \quad a_j, b_j, c_j, d_j > 0 - \text{const}, \quad j = 1, 2,$$

где z — координата вдоль направления распространения; $x = t - z/u$ — сопровождающие координаты; t — время; u — скорость; c_j — коэффициент линейной связи; a_j — коэффициент дисперсии второго порядка; b_j, d_j — коэффициенты самовоздействия и кросс-воздействия соответственно.

При постановке задачи с начальными условиями смысл независимых переменных z и x меняется: z — это время, а $x = y - uz$, y — координата вдоль оси распространения.

Решения p и q должны удовлетворять следующему ограничению

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} p(x, z) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x, z) = 0, \quad z \in [0, Z].$$

В случае произвольного набора коэффициентов в системе (1) система не может быть проинтегрирована методом обратной задачи рассеяния. Остается либо искать автомодельные решения, либо исследовать задачу путем численного моделирования. Для численного решения системы (1) необходимо изменить область определения переменной x .

Условия $-\infty < x < +\infty$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} p(x, z) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x, z) = 0$ [заменяем на $0 < x < l$, $p|_{x=0} = p|_{x=l} = q|_{x=0} = q|_{x=l} = 0$, где l — достаточно большое число, выбираемое с учетом начальных данных и величины Z].

Корректность математической постановки «усеченной» задачи (1) подтверждает теорема 1, приведенная в приложении.

Автомодельные солитонные решения

Изучим автомодельные решения системы (1) солитонного типа

$$p = r_1(x + \alpha_1 z) \exp\{i\beta_1(x + \delta_1 z) + \Phi_1\}, \\ q = r_2(x + \alpha_2 z) \exp\{i\beta_2(x + \delta_2 z) + \Phi_2\}, \quad (2)$$

где r_1, r_2 — действительные функции, определенные на всей числовой прямой; $a_h, \beta_h, \delta_h, \Phi_h$ — действительные константы; α_h — групповая скорость волнового пакета, δ_h — фазовая скорость. Для одного нелинейного уравнения типа Шрёдингера подобные автомодельные решения исследовались в работе [6].

Будем считать, что в системе (1) коэффициенты c_1 и c_2 равны. Для нашей модели это верно в силу физического смысла этих коэффициентов, а с математической точки зрения этого можно добиться элементарной заменой $\bar{p} = kp$.

Если $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то такие решения описывают волны, не распространяющиеся в координатах (x, z) . В данной работе мы рассматриваем решения типа «бегущей» волны, т. е. в (2) α_1 и α_2 не равны нулю

одновременно. Из условия поведения на бесконечности функций p и q имеем ограничения: $r_1, r_2 \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Подставляя решения типа (2) в уравнения (1) и выделяя в них действительную и мнимую части, мы для двух действительных функций r_1 и r_2 получаем четыре дифференциальных уравнения. В случае, когда одно из чисел a_1 или a_2 не равно нулю, условиями совместимости этой системы с ограничениями $r_1, r_2 \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ являются равенства параметров в (1), (2):

$$a_1 = a_2, \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2, \delta_1 = \delta_2, \varphi_1 = \varphi_2 + \pi l. \quad (3)$$

Кроме того, параметр β_1 удовлетворяет соотношению $\beta_1 = a_1/2a$. Знак функций r_1 и r_2 мы заранее не фиксировали, поэтому можно считать, что $\varphi_1 = \varphi_2$.

При выполнении условий (3) подстановкой решений типа (2) в систему (1) для функций r_1 и r_2 получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} -r_1'' = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \mu_1 r_1^3 + \eta_1 r_2^2 r_1, \\ -r_2'' = \lambda_2 r_1 + \lambda_1 r_2 + \mu_2 r_2^3 + \eta_2 r_1^2 r_2, \end{cases} \quad (4)$$

с коэффициентами

$$\lambda_1 = c_1/a_j, \mu_j = b_j/a_j, \eta_j = d_j/a_j, \lambda_1 = \beta_1(\beta_1 - \delta_1/a_1), j = 1, 2.$$

Для того чтобы из системы (4) определить решения r_1 и r_2 , необходимо задать начальные условия, причем такие, чтобы соответствующие решения системы стремились к нулю на бесконечности. Уравнения (4) исследовались по следующей схеме.

1. Среди всех решений (4) выделялось семейство решений, стремящихся к нулю при $x \rightarrow -\infty$;

2. Решения, стремящиеся к нулю при $x \rightarrow -\infty$, с помощью ЭВМ численно продолжались на правую половину числовой оси, и из них выделялись решения, сходящиеся к нулю при $x \rightarrow +\infty$.

Если при $|x| \gg 1$ функции $|r_1|, |r_2| \ll 1$, то вклад членов типа $r_1^3, r_1^2 r_2, r_2^3, r_2 r_1^2$ в систему (4) при больших x незначителен по сравнению с членами r_1 и r_2 , т. е. система ведет себя практически как линейная. Анализ линеаризованной системы (4) показывает, что при $\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0$ не существует решений, стремящихся к нулю даже на одном конце числовой прямой. При $\lambda_1 - \lambda_2 < 0, \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$ существует единственное решение, стремящееся к нулю при $x \rightarrow -\infty$, а при $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ имеется однопараметрическое семейство решений, стремящихся к нулю при $x \rightarrow -\infty$.

Решения системы типа (4), сходящиеся к нулю на бесконечности, не разлагаются в окрестности бесконечно удаленной точки в степенной ряд, так как на комплексной плоскости эта точка является существенной особой. Этот факт может быть проиллюстрирован на примере простейшего уравнения $r'' = r - 2r^3$. Его решение $r = 1/\operatorname{ch}(z)$ имеет особые точки $z_k = i(\pi/2 + \pi k), k \in Z$, накапливающиеся в бесконечности.

Систему (4) удалось исследовать с помощью обобщенного ряда Дирихле:

$$r_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) \exp\{n_k x\}, \quad r_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(x) \exp\{n_k x\}. \quad (5)$$

Здесь $n_h = k\sqrt{-(\lambda_1 - \lambda_2)}$ при $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$ и $n_h = k\sqrt{-(\lambda_1 + \lambda_2)}$ при $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$. Вид функций-коэффициентов $h_h(x)$, $s_h(x)$ в (5) зависит от соотношения параметров λ_1 и λ_2 . Приведем несколько примеров.

1. Если n_h выбрать равным $n_h = k\sqrt{-(\lambda_1 - \lambda_2)}$, то $h_h(x)$, $s_h(x)$ — константы;

2. Если $\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)/(\lambda_1 + \lambda_2)} = 2n$, где $n \in N$ и $n_h = k\sqrt{-(\lambda_1 + \lambda_2)}$, то $h_h(x)$ и $s_h(x)$ — константы;

3. Если $\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)/(\lambda_1 + \lambda_2)} = 2n + 1$, где $n \in N$ и $n_h = k\sqrt{-(\lambda_1 + \lambda_2)}$, то $h_h(x)$ и $s_h(x)$ — многочлены степени не выше k .

В более общей ситуации $h_h(x)$, $s_h(x)$ есть конечная сумма произведений полиномов степени не выше k на экспоненты $\exp\{-ax\}$, где $a < n_h$. Ряды типа (5) сходятся при $x \leq D$, где D — константа [7]. Для того чтобы продолжить решение в область $x > D$, нам необходимо в некоторой точке $x_0 < D$ по рядам (5) с высокой точностью вычислить $r_1(x_0)$, $r_1'(x_0)$, $r_2(x_0)$ и $r_2'(x_0)$, а затем решить с этими начальными данными задачу Коши для системы (4). По этой методике были проведены серии расчетов с различными коэффициентами в системе (4) целью определить, при каких коэффициентах в системе (1) существуют солитоноподобные автомодельные решения типа (2). По результатам численных экспериментов было выяснено, что различаются три случая симметрии коэффициентов в системе (1) при нелинейных членах:

1. Полная симметрия: $b_1 = b_2$, $d_1 = d_2$, $b_1 = d_1$;
2. «Квазисимметричный» случай: $b_1 + d_1 = b_2 + d_2$;
3. Отсутствие симметрии.

Оказалось, что для существования данных автомодельных решений необходима хотя бы «квазисимметрия» в нелинейных коэффициентах системы (1). Если при этом нет полной симметрии, то соответствующая система (4) имеет только элементарные решения: при $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$ противофазная пара

$$r_1 = -r_2 = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)/2(\mu_1 + \eta_1)} / \operatorname{ch}(\sqrt{-(\lambda_1 - \lambda_2)} x),$$

и при $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ к этому решению добавляется синфазная пара

$$r_1 = r_2 = \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)/2(\mu_1 + \eta_1)} / \operatorname{ch}(\sqrt{-(\lambda_1 + \lambda_2)} x).$$

Устойчивость данных решений при малых возмущениях и при столкновениях мы проанализируем ниже.

В случае полной симметрии коэффициентов в системе (1), а следовательно и в системе (4), найдены новые солитонные решения.

При $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$ существует только уже упоминавшаяся противофазная пара $r_1 = -r_2$. Наиболее интересные и неожиданные решения получены при $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$: кроме синфазных и противофазных солитонов найдено однопараметрическое семейство солитонобразных решений. Мы будем называть их «сложными» солитонами. Таким образом, в полностью симметричной системе (1) существует однопараметрическое семейство солитонных решений, имеющих одну и ту же фазовую и групповую скорости. Напомним, что для одного нелинейного уравнения Шрёдингера может существовать не более одного солитонного решения с фиксированными фазовой и групповой скоростями. «Сложные» солитоны имеют место только при определенном сочетании фазовой и групповой скоростей. На рис. 1 изображены область существования различных типов решений в зависимости от фазовой скорости δ и групповой скорости α для полностью симметричной си-

стемы (1) (точки разграничения на координатных осях зависят лишь от коэффициентов a_1 и c_1 системы (1)).

Важной особенностью «сложных» солитонов является постоянство их энергий во всем семействе решений, причем энергия (э. интеграл от квадрата амплитуды) каждого представителя семейства равна сумме энергий синфазного и противофазного солитонов. Типичные амплитуды «сложных» солитонов представлены на рис. 2. Они получены как решения следующей системы типа (4):

$$\begin{cases} -r_1 = -2,5r_1 + 1,5r_2 + r_1^3 + r_2^2 r_1, \\ -r_2 = 1,5r_1 - 2,5r_2 + r_2^3 + r_1^2 r_2. \end{cases}$$

Здесь противофазная пара: $r_1 = -r_2 = 2/\text{ch}(2x)$, синфазные солитоны: $r_1 = r_2 = 1/\text{ch}(x)$.

Столкновения солитонов

Для изучения столкновения солитоноподобных волн использовалась конечноэлементная аппроксимация «усеченной» задачи (т. е. переменная x изменяется на отрезке $[0, 1]$ и на границах отрезка значения решений равны нулю). В силу того что исследуемые решения экспоненциально убывают на бесконечности, подобное «усечение» позволяет получать высокоточные результаты. Более подробная информация о численных методах решения «усеченной» задачи приведена в приложении.

Квазисимметричный случай при наличии неравенства $b_1 \neq b_2$ характеризуется высокой неустойчивостью солитонообразных решений: при любом столкновении синфазной и противофазной пар солитонов происходит заметная перекачка энергии из канала в канал, амплитуда как синфазной, так и противофазной пары сильно искажается.

В симметричной системе разные типы солитонов имеют разную степень устойчивости. Наиболее устойчивыми оказались синфазные солитоны. При столкновениях колебания амплитуды в одном канале были в пределах 0,8—1,2, где за единицу обозначен максимум невозмущенного солитона. Меньшей устойчивостью при столкновениях обладают противофазные солитоны. Начальные условия можно подобрать так, что колебания в одном канале будут составлять 0,4—1,6 по сравнению с первоначальным солитоном, но были также найдены такие начальные условия, что столкновения противофазных солитонов происходили абсолютно упруго. Когда мы говорим про подбор начальных условий, мы всего лишь изменяем сдвиг фаз в одной из сталкивающихся пар солитонов. Сложные солитоны наименее устойчивы при взаимном прохождении. После столкновений при всех просчитанных начальных условиях амплитуда заметно изменялась, шла перекачка энергии из канала в канал. Однако после столкновения можно говорить о локализации энергии. «Бывшие» солитоны распространя-

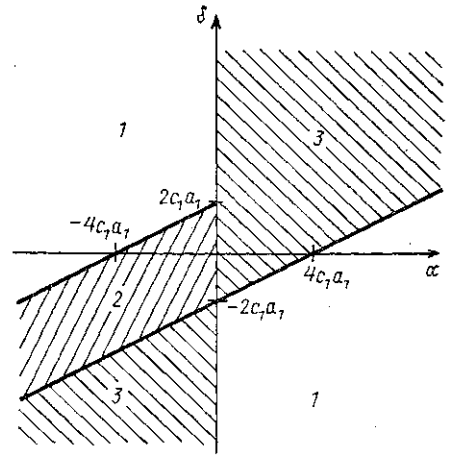


Рис. 1. Области существования различных типов солитонных решений в зависимости от параметров α , δ : 1 — солитонов нет, 2 — только противофазные солитоны, 3 — семейство солитонов

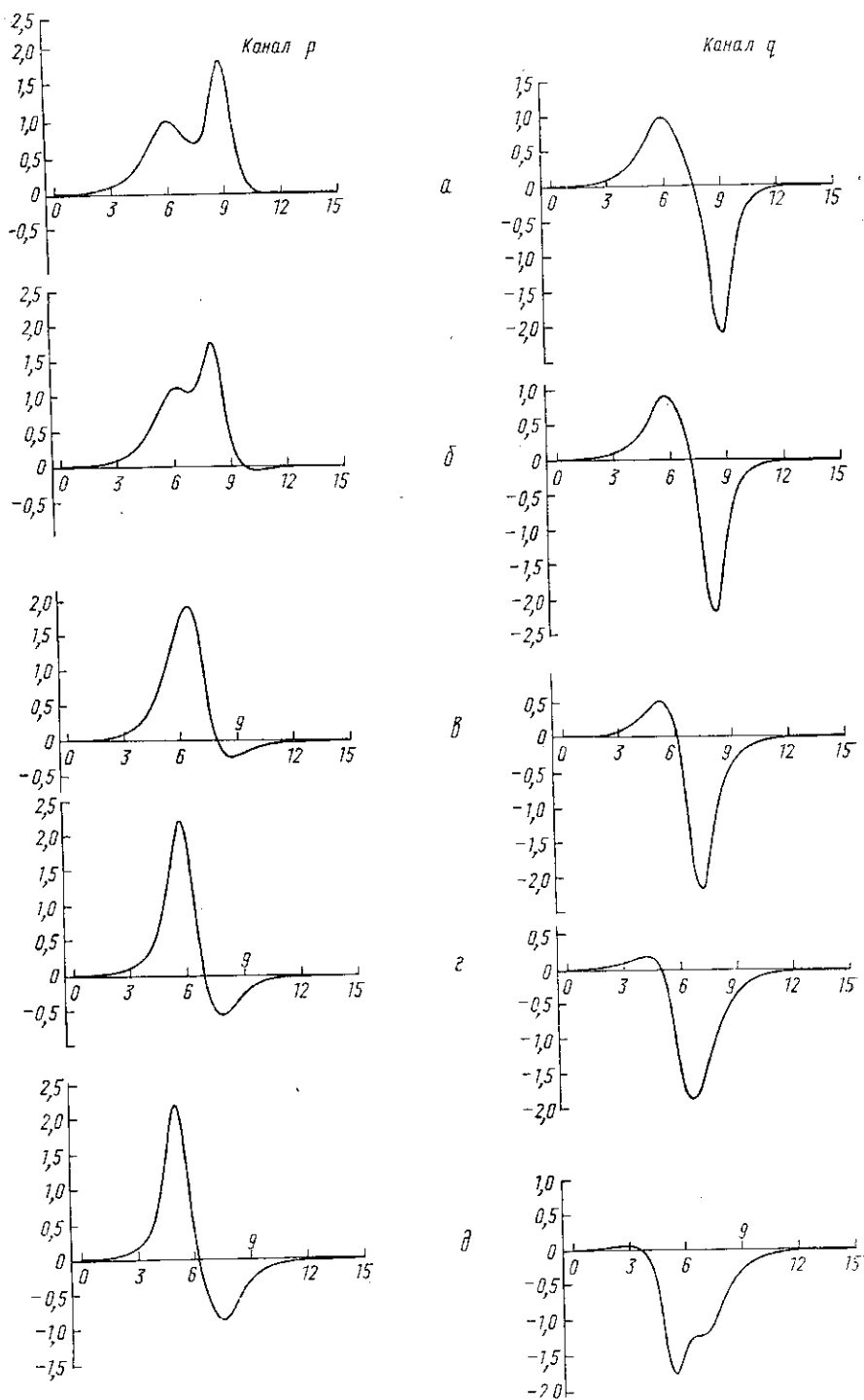


Рис. 2. Типичные амплитуды «сложных» солитонов при различных значениях параметров семейства c : $c=0,01$ (а); $0,08$ (б); $0,32$ (в); $1,28$ (г) и $5,12$ (д)

лись с постоянной скоростью, и в процессе движения более 90% первоначальной энергии было постоянно сосредоточено в небольшой по координате x области.

Приложение

Здесь мы хотим привести несколько чисто математических результатов, связанных с системой НУШ (1).

Теорема 1.

Пусть $a_k(z, x), c_k(z, x) \in C^1(0, Z; H^1(0, l))$, $a_k(z, x) \geq \theta_1 > 0$; $b_k(z, x), d_k(z, x) \in C^1(0, Z; L_\infty(0, l))$ и существует $s(z) \in C^1(0, Z)$; $s(z) \geq \theta_2 > 0$ и $d_1(z, x) = s(z)d_2(z, x)$, $k=1, 2$.

Пусть $p_0(x), q_0(x) \in H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l)$, тогда система

$$\begin{cases} ip_z = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_1(z, x) \frac{\partial p}{\partial x} \right) + b_1(z, x) |p|^2 p + c_1(z, x) q + d_1(z, x) |q|^2 p, \\ iq_z = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_2(z, x) \frac{\partial q}{\partial x} \right) + b_2(z, x) |q|^2 q + c_2(z, x) p + d_2(z, x) |p|^2 q, \\ p|_{x=0} = p|_{x=l} = q|_{x=0} = q|_{x=l} = 0, \\ p|_{z=0} = p_0(x), \quad q|_{z=0} = q_0(x) \end{cases}$$

имеет единственное решение из класса $p, q \in C(0, Z; H^2(0, l) \cap H^1(0, l))$.

Остановимся немного подробнее на численных методах решения «усеченной» системы (1). Пусть S^N — линейная оболочка сплайнов первого порядка $\varphi_j: S^N = \text{lin} \{ \varphi_j \}_{j=1}^N$, $\varphi_j(x) = \varphi(x - j \cdot h)$, $\varphi(x)$ определяется по формулам

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \\ x/h + 1, & x \in (-h, 0), \\ -x/h + 1, & x \in (0, h), \end{cases}$$

E^k аппроксимирует $p(k \cdot \tau, x)$, G^k аппроксимирует $q(k \cdot \tau, x)$. E^k, G^k — элементы пространства S^N — мы получаем как решение системы нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} i \left\langle \frac{E^k - E^{k-1}}{\tau}, \varphi_j \right\rangle + a_1 \left\langle \frac{E^k + E^{k-1}}{2}, \varphi_j \right\rangle_{(1)} = \\ = b_1 \left\langle \frac{(|E^k|^2 + |E^{k-1}|^2)(E^k + E^{k-1})}{4}, \varphi_j \right\rangle + c_1 \left\langle \frac{G^k + G^{k-1}}{2}, \varphi_j \right\rangle + \\ + d_1 \left\langle \frac{(|G^k|^2 + |G^{k-1}|^2)(E^k + E^{k-1})}{4}, \varphi_j \right\rangle, \\ i \left\langle \frac{G^k - G^{k-1}}{\tau}, \varphi_j \right\rangle + a_2 \left\langle \frac{G^k + G^{k-1}}{2}, \varphi_j \right\rangle_{(1)} = \\ = b_2 \left\langle \frac{(|G^k|^2 + |G^{k-1}|^2)(G^k + G^{k-1})}{4}, \varphi_j \right\rangle + c_2 \left\langle \frac{E^k + E^{k-1}}{2}, \varphi_j \right\rangle + \\ + d_2 \left\langle \frac{(|E^k|^2 + |E^{k-1}|^2)(G^k + G^{k-1})}{4}, \varphi_j \right\rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Начальные условия получим из соотношений

$$\langle E^0, \varphi_j \rangle_{(1)} = \langle p_0, \varphi_j \rangle_{(1)}, \quad \langle G^0, \varphi_j \rangle_{(1)} = \langle q_0, \varphi_j \rangle_{(1)}.$$

В (6) использованы обозначения $\langle f, g \rangle = \int_0^l f g dx$, $\langle f, g \rangle_{(1)} = \int_0^l f_x g_x dx$.

Отличие системы (6) от традиционно применяемых разностных схем состоит в вычислении нелинейных членов. Вычисления каждого нелинейного члена несколько громоздки, но итерационный процесс при решении нелинейной системы быстро сходится и позволяет делать достаточно большой шаг τ по координате z . По сравнению с известными авторам численными методами система (6) решает «усеченную» систему (1) примерно на 10—15% быстрее. Скорость сходимости разностной схемы, построенной на базе системы (6), к точному решению устанавливает

Теорема 2.

Пусть в системе (6) $\tau=O(h^2)$, тогда

$$\max_{z \in [0, Z]} \{ \|p - E\|_{L_2(0, t)}, \|q - G\|_{L_2(0, t)} \} \leq ch.$$

Разностная схема (6) является консервативной и устойчивой.

Проведенные расчеты показали наличие различий в поведении солитоноподобных решений в квазисимметричном случае $b_1 \neq b_2$, $b_1 + d_1 \neq b_2 + d_2$ и в полностью симметричной системе (напомним, что в остальных случаях распространяющихся в координатах (x, z) солитонных решений нет).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дианов Е. М., Прохоров А. М. // УФН. 1986. 149. С. 449. [2] Christodoulides D. N., Joseph R. I. // Phys. Rev. Lett. 1989. 62. P. 1746. [3] Mills D. L., Trullinger S. E. // Phys. Rev. 1987. 36. P. 947. [4] Манаков С. А. // ЖЭТФ. 1973. 65, № 8. С. 506. [5] Азимов Б. С., Сухоруков А. П., Трухов Д. В. // Изв. АН СССР, сер. физ. 1987. 52. С. 587. [6] Brull, Lange // Expos. Math. 1986. 4. P. 1127. [7] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М., 1976.

Поступила в редакцию
12.07.91

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12.01

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНДЕНСАТОВ КХД ИЗ ПРАВИЛ СУММ НА ОСНОВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ФОРМФАКТОРА ПИОНА

Д. В. Мещеряков

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

На основе аналитических свойств формфактора пиона из правил сумм КХД определены значения глюонного и четырехкваркового конденсатов. Непертурбативная структура формфактора пиона приводит к возрастанию значений конденсатов по сравнению со стандартными.

1. Введение

Со времени появления работы Шифмана, Вайнштейна и Захарова [1] проблеме определения величин конденсатов КХД было уделено большое внимание [2—7]. Тем не менее разброс полученных результатов достаточно велик. В работе [1] для определения с помощью правил сумм параметров ρ -мезона фактически использовалось приближение нулевой ширины. Недавно нами была получена простая формула для формфактора пиона, хорошо описывающая массу и ширину ρ -мезона