ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12.01

ТОПОЛОГИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ КАК СЛЕДСТВИЕ ДИНАМИКИ ЗАМКНУТЫХ БОЗОННЫХ СТРУН. II. ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Н. Ф. Нелипа, М. Ю. Пекар

(*НИИЯФ*)

Анализируется возможность построения теории, в которой топология пространства-времени определяется динамикой замкнутых бозонных струн. Анализ ведется в виде разложения в ряд по константе взаимодействия. Рассматривается второй порядок разложения. Найдены дополнительные по сравнению с первым порядком ограничения на допустимую топологию пространства-времени.

В предыдущей статье [1] был изложен подход, согласно которому топология пространства-времени определяется динамикой струн, и рассмотрены нулевой и первый порядки по константе взаимодействия струн. Цель настоящей статьи — проанализировать второй порядок. В соответствии с нашим подходом будет построен когомологический комплекс и найден топологический инвариант в данном приближении. Будет показано, что требование нильпотентности дифференциала во втором порядке усиливает ограничения на возможный выбор топологии пространства-времени.

1. Второму порядку соответствует однопетлевая диаграмма, а также диаграмма, описывающая четырехструнное взаимодействие. Выражение для вершины взаимодействия по-прежнему берем в виде [1, формула (1)].

Найдем систему уравнений, вытекающую из свойства нильпотентности полного дифференциала.

Так как в первом порядке дифференциал имеет вид [1, формула (3′)]

$$d^1\omega = d^0\omega + F^1(\omega) = d^0\omega + g\Phi * \omega,$$

то будем искать полный дифференциал в виде

$$d\omega = d^0\omega + F^1(\omega) + F^2(\omega) + F^3(\omega) + \ldots, \tag{1}$$

где $F^i(\omega)$ — линейный функционал на множестве дифференциальных форм ω, пропорциональный i-й степени константы взаимодействия. Учитывая (1), получаем для квадрата дифференциала

$$[d]^2\omega = [d^0]^2\omega + \{d^0F^1(\omega) + F^1(d^0\omega)\} + F^1(F^1(\omega)) +$$
$$+ \{d^0F^2(\omega) + F^2(d^0\omega)\} + F^2(F^1(\omega)) + F^1(F^2(\omega)) + \ldots .$$

В первом приближении

$$d^0(F^1(\omega)) + F^1(d^0\omega) + F^1(F^1(\omega)) = (d^1\Phi) * \omega = 0,$$

т. е. условие нильпотентности дифференциала в первом порядке выполняется на множестве замкнутых форм. Этому соотношению соответствует ковариантное уравнение для полного дифференциала:

$$[d]^2\omega = (d\Phi) * \omega. \tag{2}$$

Используя это соотношение, получим систему зацепляющихся уравнений для функционалов Φ, F^i:

$$
\begin{aligned}
&[d^0]^2=0,\\
&d^0(F^i(\omega))+F^i(d^0\omega)=F^{i\prime}(\omega),\\
&d^0(F^1(\omega))+F^1(d^0\omega)+F^1(F^1(\omega))=(d^1\Phi)*\omega,\\
&F^{2\prime}(\omega)+g(F^2(\Phi*\omega)+\Phi*F^2(\omega))=gF^2(\Phi)*\omega,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{3}
$$

В частности, для функционала F^2 находим систему

$$
\begin{cases}
F^{2\prime}(\omega)=0,\\
F^2(\Phi*\omega)+\Phi*F^2(\omega)=F^2(\Phi)*\omega,
\end{cases}
\tag{4}
$$

дополняющую условия (1), (4).

К системе (3) необходимо добавить условие, вытекающее из свойства дифференциала повышать порядок формы на единицу:

$$|F^i(\omega)|=|\omega|+1. \tag{5}$$

2. Нашей задачей является отыскание вида функционалов F^i, которые являются решениями системы уравнений (4), (5).

Для того чтобы удовлетворить условию (5), необходимо ввести на пространстве контуров дуальный дифференциал $\bar{d}^0$, понижающий, а не повышающий порядок формы на единицу. По определению этот дифференциальный оператор удовлетворяет соотношению

$$d^0\bar{d}^0\omega=\omega,\ \ \bar{d}^0d^0\tilde{\omega}=\tilde{\omega}. \tag{6}$$

Наряду с нулевым порядком дуального дифференциала $\bar{d}^0$ существует и полный дуальный дифференциал $\bar{d}$:

$$
\begin{cases}
d\bar{d}\omega=\omega,\ \ \bar{d}d\tilde{\omega}=\tilde{\omega},\\
[\bar{d}]^2\omega=0,
\end{cases}
\tag{7}
$$

для которого выполняются условия

$$\bar{d}\omega\equiv\bar{d}^0\omega+\bar{F}^1(\omega)+\bar{F}^2(\omega)+\ldots=\bar{d}^0\omega+\bar{\Phi}\circ\omega+\bar{F}^2(\omega)+\ldots$$

Заметим, что условия (6), (7) понимаются в смысле когомологических классов эквивалентности, т. е. с точностью до добавления к ω произвольной точной формы.

Раскрывая уравнения (7), найдем систему зацепляющихся уравнений для функционалов $\bar{F}^i$, которая получается путем замены в (3) $F\to\bar{F}$, $\Phi\to\bar{\Phi}$, $*\to\circ$. Кроме того, появляется дополнительная система уравнений

$$
\begin{cases}
d^0(\bar{\Phi}\circ\omega)=-\Phi*\bar{d}^0\omega,\\
\bar{d}(\Phi*\omega)=-\bar{\Phi}\circ d^0\omega,
\end{cases}
\tag{8}
$$

$$
\begin{cases}
\bar{\Phi}\circ(\Phi*\omega)+\bar{d}^0F^2(\omega)+\bar{F}^2(d^0\omega)=0,\\
\Phi*(\bar{\Phi}\circ\omega)+d^0\bar{F}^2(\omega)+F^2(\bar{d}^0\omega)=0.
\end{cases}
\tag{9}
$$

Уравнения (8) являются дополнительными правилами действия с функционалами Φ и $\bar{\Phi}$, а система (9) — дополнительной к (4) системой уравнений для функционалов F^2 и $\bar{F}^2$. Анализируя общую для F^2 и $\bar{F}^2$ систему (4), (7), (9) с учетом правил (8) и [1, (4)], получим следующий вид искомых функционалов во втором порядке по константе взаимодействия:

$$\begin{aligned} F^2&=g^2\left(d^0\left[\bar{\Phi}\circ\left((\bar{d}^0\Phi)*d^0\omega\right)\right]-\Phi*\bar{d}^0(\Phi*\omega)\right),\\ \bar{F}^2&=g^2\left(\bar{d}^0\left[(\bar{d}^0\Phi)*d^0(\Phi\circ\omega)\right]-\bar{\Phi}\circ d^0(\bar{\Phi}\circ\omega)\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Композиция «$*$» означает переход одной струны z в две струны x, y. Поэтому дуальная композиция «$\circ$» означает обратный переход $z'\leftarrow x, y$. Первые члены в выражениях (10) описывают однопетлевое взаимодействие, а вторые — четырехструнную вершину.

3. Найдем топологический инвариант во втором порядке по константе взаимодействия, определяющий эффективное действие.

Определим сначала меру интегрирования на U^2. Так как второй порядок по взаимодействию означает более высокую степень касания по сравнению с первым порядком, то в выражениях для топологических инвариантов окрестность, по которой ведется интегрирование, содержит U^1. Поэтому в интегральной мере на окрестности U^2 появляются два новых члена по сравнению с U^1:

$$\int\limits_2^{a}=\frac{1}{2}\left\{\int\limits_{-\tau_1}^{\tau_1}d\tau'd\tau''\oint Dx(\sigma,\ \tau')\oint Dy(\sigma,\ \tau'')\,\delta(\tau'-\tau'')\,v(xyz)=\right.$$

$$=\int\limits_{\tau'}^{\tau_1}d\tau\oint Dz(\sigma,\ \tau)\,\bar{v}\,(zxy)\int\limits_{\tau}^{\tau_1}d\tilde{\tau}\,d\tilde{\tilde{\tau}}\oint Dx(\sigma,\ \tilde{\tau})\oint Dy(\sigma,\ \tilde{\tilde{\tau}}),$$

$$\int\limits_2^{б}=\frac{1}{2}\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}d\tau\oint Dz(\sigma,\ \tau)\,v\,(xyz)\int\limits_{\tau}^{\tau_1}d\tau'd\tau''\oint Dx(\sigma,\ \tau')=$$

$$=\oint Dy(\sigma,\ \tau'')\,\delta(\tau'-\tau'')\,\bar{v}\,(zxy)\int\limits_{\tau'}^{\tau_1}d\tilde{\tau}\oint Dz(\sigma,\ \tilde{\tau}).$$

Правило преобразования функционалов при переходе от одной окрестности к другой во втором порядке выглядит так:

$$\delta^2\Phi=d^2\Psi=d^0\Psi+g\Phi*\Psi+F^2(\Psi). \tag{11}$$

Как можно убедиться непосредственной проверкой, топологический инвариант во втором порядке по константе взаимодействия, т. е. выражение, инвариантное относительно (11), примет вид

$$\Gamma^2=\underset{U^2}{\Gamma^1}+\frac{2}{5}\int\limits_{U^2}\langle\Phi,\ F_a^2(\Phi,\ \bar{\Phi})\rangle+\frac{1}{2}\int\limits_{U^2}\langle\Phi,\ F_б^2(\Phi,\ \bar{\Phi})\rangle, \tag{12}$$

где

$$F_a^2=g^2d^0\left[\bar{\Phi}\circ\left((\bar{d}^0\Phi)*d^0\Phi\right)\right],$$

$$F_б^2=-g^2\Phi*\bar{d}^0(\Phi*\Phi).$$

Используя (8), эти выражения можно привести к виду, не содержащему $\bar{\Phi}$:

$$F_a^2(\Phi) = g^2\Phi * \bar{d}^0 [(\bar{d}^0\Phi) * d^0\Phi].$$

Проварьировав (12), получим уравнения движения:

$$d^2\Phi = d^0\Phi + g\Phi * \Phi + F^2(\Phi) = 0.$$

Как видно, они совпадают с условием замкнутости формы Ф. Таким образом, инвариант Γ^2, описывающий топологические свойства пространства контуров, на множестве замкнутых форм принимает дискретный ряд значений.

Величина Γ^2 является однопетлевым приближением эффективного действия; тем самым сразу получена вторично квантованная теория.

4. Для того чтобы проиллюстрировать механизм появления дополнительных ограничений на топологию пространства-времени, обусловленных вторым приближением, рассмотрим простой пример топологии, допускаемой первым приближением.

Выберем в качестве примера тор $T = R^{(D-1,1)}/l$, где l — решетка $\{e_i\}$ на пространстве $R^{(D-1,1)}$, $(e_i, e_j) \equiv \sum_{IJ} e_i^I e_j^J \eta_{IJ} \equiv g_{ij}$. Рассмотрим выражение (10) для $F_a{}^2$. С физической точки зрения оно описывает переход одной струны в две и последующий обратный переход двух струн в одну. Если до взаимодействия индексы отображения струны z на торе равнялись нулю, то после взаимодействия индексы отображения струн x, y на некотором векторе решетки e_i становятся равными соответственно $\pm k_i \neq 0$. При повторном взаимодействии все индексы отображения опять обращаются в нуль. Такое взаимодействие может быть реализовано на торе, решетка которого содержит по крайней мере два вектора e_i, e_j ($\pi_1(T) \neq Z$, где Z — целые числа). Кроме того, дуальный оператор «$\circ$», входящий в выражение (8), есть композиция $x, y \to \bar{z}$ на дуальной решетке $\bar{l}$:

$$(\bar{e}_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Это означает, что решетка на пространстве-времени должна быть самодуальной.

В рассматриваемом порядке по константе взаимодействия в случае тора появляется еще одно ограничение на возможную топологию пространства-времени. Рассмотрим график решетки l: точками обозначаем элементы e_i, причем i-й и j-й элементы соединяем линией, если $(e_i, e_j) \neq 0$. Учитывая то, что мы параметризовали пространство контуров, последовательно переходя от одного вектора решетки к другому, из требования однозначности параметризации получим, что любые две точки на графике могут быть соединены только одним путем. Это эквивалентно тому, что график обладает древесной структурой, т. е. не имеет замкнутых циклов.

Таким образом, учет второго приближения приводит к дополнительным по сравнению с первым порядком ограничениям на возможную топологию пространства-времени. Можно ожидать, что учет более высоких приближений приведет к дальнейшей конкретизации пространственно-временной топологии и вместе с тем к прояснению некоторых вопросов, связанных с компактификацией.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Нелипа Н. Ф., Пекар М. Ю.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. 32. № 6. С. 18.

Поступила в редакцию
15.05.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1992. Т. 33, № 1

УДК 539.12.01

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО СИНГУЛЯРНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В. Б. Гостев, А. Р. Френкин

(*кафедра теоретической физики*)

На примере осциллятора с возмущением λx^{-2} решена обратная задача для одномерного уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом. Найденные поправки к потенциалу обладают особенностью более слабой, чем особенность затравочного потенциала.

Задача, рассматриваемая в настоящей статье, — вычисление поправок к потенциалу одномерного сингулярного осциллятора ($\hbar=2m=\omega/2=1$)

$$V(x)=U(x)+W(x)=x^2+s(s+1)x^{-2} \tag{1}$$

при изменении спектральных данных (уровни энергии, нормировочные постоянные), — возникла как естественное завершение решенных ранее прямой задачи с указанным потенциалом [1—3] и обратной задачи для одномерного гармонического осциллятора [4] ($V(x)=x^2$, $-\infty<x<\infty$) и радиального осциллятора [5] ($V(r)=r^2+l(l+1)r^{-2}$, $0<r<\infty$).

Обратная задача является существенной частью любой одномерной проблемы, и ее решение для потенциала с особенностями при $x=0$ и $x=\infty$ далеко не тривиально. Общий метод решения обратных задач с растущим потенциалом ($x\to\pm\infty$, $r\to\infty$) был указан только в восьмидесятых годах [4, 6, 7].

Потенциалы с особенностью λx^{-2} имеют физические приложения — моделируют переходы Вселенной на первоначальной стадии развития [8], описывают спектроскопию двухатомных молекул [9]. Ряд других приложений таких потенциалов указан в статье [10].

Ясно, что изменение экспериментальных данных об уровнях энергии или сведений о времени туннельного перехода Вселенной в другое состояние может привести к изменению потенциала без изменения особенности при $x=0$. Поэтому не только для теоретических, но и для прикладных задач необходимо решение обратной задачи для опорного потенциала с особенностью λx^{-2}. Один из путей решения такой обратной задачи намечен в статье. Способ решения применим к случаю «любого» гладкого потенциала $U(x)$ (1). Метод подробно приводится только для случая затравочного потенциала $U(x)=x^2$ (1), когда имеются замкнутые аналитические выражения для некоторых поправок к потенциалу (точные решения).

Стационарное уравнение Шрёдингера (УШ) для этой системы имеет хорошо известные точные решения [11, с. 158] и подробно исследовано (см., напр., монографии [12, 13]). Однако правильный, на наш взгляд, выбор четных решений УШ с потенциалом (1) был обоснован