ЛИТЕРАТУРА

[1] Нелипа Н. Ф., Пекар М. Ю.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. 32. № 6. С. 18.

Поступила в редакцию 15.05.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1992. Т. 33, № 1

УДК 539.12.01

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО СИНГУЛЯРНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В. Б. Гостев, А. Р. Френкин

(*кафедра теоретической физики*)

На примере осциллятора с возмущением λx^{-2} решена обратная задача для одномерного уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом. Найденные поправки к потенциалу обладают особенностью более слабой, чем особенность затравочного потенциала.

Задача, рассматриваемая в настоящей статье, — вычисление поправок к потенциалу одномерного сингулярного осциллятора ($\hbar=2m=\omega/2=1$)

$$V(x)=U(x)+W(x)=x^2+s(s+1)x^{-2} \tag{1}$$

при изменении спектральных данных (уровни энергии, нормировочные постоянные), — возникла как естественное завершение решенных ранее прямой задачи с указанным потенциалом [1—3] и обратной задачи для одномерного гармонического осциллятора [4] ($V(x)=x^2$, $-\infty<x<\infty$) и радиального осциллятора [5] ($V(r)=r^2+l(l+1)r^{-2}$, $0<r<\infty$).

Обратная задача является существенной частью любой одномерной проблемы, и ее решение для потенциала с особенностями при $x=0$ и $x=\infty$ далеко не тривиально. Общий метод решения обратных задач с растущим потенциалом ($x\to\pm\infty$, $r\to\infty$) был указан только в восьмидесятых годах [4, 6, 7].

Потенциалы с особенностью λx^{-2} имеют физические приложения — моделируют переходы Вселенной на первоначальной стадии развития [8], описывают спектроскопию двухатомных молекул [9]. Ряд других приложений таких потенциалов указан в статье [10].

Ясно, что изменение экспериментальных данных об уровнях энергии или сведений о времени туннельного перехода Вселенной в другое состояние может привести к изменению потенциала без изменения особенности при $x=0$. Поэтому не только для теоретических, но и для прикладных задач необходимо решение обратной задачи для опорного потенциала с особенностью λx^{-2}. Один из путей решения такой обратной задачи намечен в статье. Способ решения применим к случаю «любого» гладкого потенциала $U(x)$ (1). Метод подробно приводится только для случая затравочного потенциала $U(x)=x^2$ (1), когда имеются замкнутые аналитические выражения для некоторых поправок к потенциалу (точные решения).

Стационарное уравнение Шрёдингера (УШ) для этой системы имеет хорошо известные точные решения [11, с. 158] и подробно исследовано (см., напр., монографии [12, 13]). Однако правильный, на наш взгляд, выбор четных решений УШ с потенциалом (1) был обоснован недавно [2, 3]. Четные собственные функции УШ с гамильтонианом (1) имеют вид ($x>0$)

$$\psi_+(x)=x^{-s}\exp\{-x^2/2\}\,F\left(\frac{1-2s-E}{4},\ -s+1/2,\ x^2\right), \tag{2}$$

где E — энергия, $F(a, b, z)$ — регулярная при $z=0$ вырожденная гипергеометрическая функция [14, с. 321]. При $x\to+0$ функция (2) «нормирована» условием

$$\lim_{x\to+0} x^s\psi_+(x)=1. \tag{3}$$

Четные уровни энергии [12, 3] эквидистантны:

$$E_{n+}=-2s+1+4n_+,\ n_+=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{4}$$

как и нечетные:

$$E_{n-}=2s+3+4n_-, \tag{5}$$

волновые функции которых ($x>0$)

$$\psi_-(x)=x^{s+1}\exp\{-x^2/2\}\,F\left(\frac{3+2s-E}{4},\ s+\frac{3}{2},\ x^2\right), \tag{6}$$

«нормированные» условием

$$\lim_{x\to+0}(x^{-s}\psi_-(x))'=1, \tag{7}$$

совпадают с радиальными для осциллятора (1) ($0\leqslant x<\infty$) [11, с. 140].

Используя функции (2), (6), можно построить опорные решения УШ (1) и перейти к обратной задаче — восстановлению поправок к потенциалу (1) при изменении спектральных данных методом Гельфанда—Левитана (ГЛ) [15] применительно к случаю удерживающего потенциала [16]. Чтобы записать интегральное уравнение ГЛ, надо построить набор регулярных (опорных) решений УШ (1) на всей прямой $-\infty<x<\infty$. Для этого требуется указать правило продолжения любого решения УШ с потенциалом с особенностью $W(x)=s(s+1)x^{-2}$ (1) через точку $x=0$ (не обязательно с четным гладким потенциалом $U(x)$ (1)). В качестве такого правила предлагается локально четное (нечетное) продолжение на $x<0$ компонент решений УШ, удовлетворяющих при $x\to+0$ тем же граничным условиям, что и функции $\psi_+(x)$ и $\psi_-(x)$ (2), (6) [1].

Выберем в качестве регулярной точки $x=-\infty$. Тогда удобно взять для регулярных решений УШ (1) решение, имеющее при $x\to-\infty$ ту же асимптотику, что и убывающие при $x\to-\infty$ решения УШ для гармонического осциллятора ($s=0$):

$$\psi_{as}=\exp\{-x^2/2\}\,|x|^{\frac{E-1}{2}},\ x\to-\infty. \tag{8}$$

То есть наложим на регулярное решение УШ (1) $\psi_r(x)$ «нормировку» (аналог условий (3), (7))

$$\lim_{x\to-\infty}\exp\{x^2/2\}\,|x|^{-\frac{E-1}{2}}\,\psi_r(x)=1. \tag{9}$$

Такими являются решения УШ (1) ($x<0$, E — любое)

$$\psi_r(x)=|x|^{-s}\exp\{-x^2/2\}\, U\left(\frac{1-2s-E}{4},\ -s+1/2,\ x^2\right), \tag{10}$$

где $U(a, b, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, регулярная при $z\to+\infty$ [14, с. 321, 325].

Продолжив функцию (10) на $x>0$ по указанному выше правилу (с изменением направления перехода) с учетом связи между разными решениями УШ (1) [14, с. 321], находим

$$\psi_r(x)=A_+\psi_+(x)+A_-\psi_-(x),\ x>0, \tag{11}$$

$$A_+=\frac{\pi}{\cos\pi s\Gamma\left(\frac{3+2s-E}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)},$$
$$A_-=\frac{\pi}{\cos\pi s\Gamma\left(\frac{1-2s-E}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+s\right)}. \tag{12}$$

Функция $\psi_r(x)$ при всех энергиях вне спектра (4), (5) имеет растущую при $x\to+\infty$ асимптотику

$$\psi_r(x)=\frac{2\pi}{\cos\pi s\Gamma\left(\frac{3+2s-E}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1-2s-E}{4}\right)}\, x^{-\frac{E+1}{2}}\exp\{x^2/2\}. \tag{13}$$

На спектре (4), (5) регулярные решения имеют вид

$$\psi_{r+}=(-1)^{n_+} n_+!\, L_{n_+}^{-\left(\frac{1}{2}+s\right)}(x^2)\,|x|^{-s}\exp\{-x^2/2\}, \tag{14}$$

$$\psi_{r-}=(-1)^{n_-} n_-!\, L_{n_-}^{\left(\frac{1}{2}+s\right)}(x^2)\,|x|^{s}\exp\{-x^2/2\}, \tag{15}$$

где $L_m^\alpha(z)$ — обобщенный полином Лагерра [14, с. 580]. Асимптотики $\psi_{r\pm}(x)$ при $x\to+\infty$, конечно, убывающие:

$$\psi_{r\pm}(x)=\exp\{-x^2/2\}\, x^{\frac{E-1}{2}}. \tag{16}$$

Удобно в дальнейшем нумеровать волновые функции и уровни энергии в порядке возрастания энергии (четные и нечетные уровни чередуются). При этом ($n_+=m/2$, $m=0, 2, 4 \ldots$; $n_-=(m-1)/2$, $m=1, 3, 5 \ldots$)

$$E_m=(2m+1)-2(-1)^m s,\ m=0,\ 1,\ 2\ldots. \tag{17}$$

Нормировочные постоянные регулярных функций (14), (15) C_m имеют вид

$$C_m=\left[\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m^2\,dx\right]^{-1}=\left[\Gamma\left(\frac{E_m-2s-1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{E_m+2s+3}{4}\right)\right]^{-1}. \tag{18}$$

С помощью опорных регулярных решений (10), (11), (14), (15) можно записать интегральное уравнение ГЛ [15, 16] для заранее выбранного изменения спектральных данных (E_m, C_m). Решение уравнения ГЛ дает возможность найти поправки к потенциалу ΔV и новые регулярные (для потенциала $V+\Delta V$) волновые функции $\bar{\psi}_r(x)$ (на спектре $\bar{\psi}_m(x)$). В случае изменения конечного числа спектральных данных уравнение ГЛ решается в квадратурах. Выражения для ΔV и $\bar{\psi}_m(x)$ даны в [16] (надо сделать замену нижнего предела интегрирования $0 \to -\infty$ во всех формулах).

Представляют интерес асимптотики $\bar{\psi}_m$ и ΔV при $x \to 0, \pm\infty$. Для их нахождения используются асимптотики (8), (13), (16) и формулы (2), (6) при $x \to +0$.

Опишем поведение $\bar{\psi}_m$ и ΔV в нескольких характерных случаях.

1. Изменение нормировочной постоянной: $C_m \to \bar{C}_m = C_m + \Delta C_m$,

$$\bar{\psi}_m(x) = \exp\{-x^2/2\} |x|^{(E_m-1)/2} = \psi_m(x), \ x \to -\infty, \tag{19}$$

$$\bar{\psi}_m(x) = \psi_m(x) C_m/\bar{C}_m, \ x \to +\infty, \tag{20}$$

$$\bar{\psi}_n(x) = \psi_n(x), \ x \to \pm\infty, \tag{21}$$

$$\bar{\psi}(x) \sim |x|^{-s}, \ x \to 0. \tag{22}$$

Четность при замене C_m не сохраняется:

$$\bar{\psi}_{n\pm}(-x) \neq \pm \bar{\psi}_{n\pm}(x), \tag{23}$$

$$\Delta V = -4\Delta C_m \exp\{-x^2/2\} |x|^E, \ x \to \pm\infty, \tag{24}$$

$$\Delta V \sim |x|^{1+2s} \varepsilon(x), \ x \to 0, \ m=1, 3, 5 \ldots, \tag{25}$$

$\varepsilon(x)$ — знаковая функция;

$$\Delta V = \frac{4\Delta C_m A_+^2 \, s\varepsilon(x) \, |x|^{-(1+2s)}}{1+(1/2)\Delta C_m C_m^{-1}} + \frac{2(\Delta C_m)^2 A_+^4 \, |x|^{-4s}}{(1+(1/2)\Delta C_m C_m^{-1})^2}, \tag{26}$$

$x \to 0, \ m=0, 2, 4 \ldots,$

$$A_+ = \frac{(-1)^{m/2} \Gamma(m/2+1/2-s)}{\Gamma(1/2-s)}. \tag{27}$$

Сильнейшей особенностью в добавке (26) обладает первое слагаемое.

2. Включение дополнительного уровня $\bar{E}$ с постоянной нормировки $\bar{C}$ дает

$$\Delta V = \begin{cases} -4\bar{C}\exp\{-x^2\} |x|^E, \ x \to -\infty, \\ \dfrac{4\bar{C} A_+^2(\bar{E}) \, s\varepsilon(x) \, |x|^{-(1+2s)}}{1+\bar{C}\int\limits_{-\infty}^{0} \psi_r^2(\bar{E}, x)\, dx}, \ x \to 0, \\ -4, \ x \to +\infty, \end{cases} \tag{28}$$

где $A_+(\bar{E})$ определяется формулой (12), $\psi_r(\bar{E}, x)$ см. (10).

3. Выключение уровня E_m приводит к результатам, близким к (28), но

$$\Delta V = 4, \ x \to +\infty. \tag{29}$$

4. Сдвиг уровня дает

$$\Delta V \sim x^{-2}, \ x \to +\infty. \tag{30}$$

Отметим, что все результаты обратной задачи на всей прямой $(-\infty < x < \infty)$ в отличие от радиального случая $(0 \leqslant r < \infty)$ имеют тривиальное двукратное вырождение в зависимости от выбора точки регулярности ($-\infty$ или $+\infty$). Полученные формулы при $s \to 0$ и при $x \to \to \pm\infty$ совпадают с аналогичными формулами для одномерного осциллятора ($s=0$), частично приведенными в [4] и радиального осциллятора ($x \to \infty$) [5].

Асимптотика же ΔV при $x \to 0$ (26), (28), присущая и случаям 3, 4, является новым нетривиальным результатом. Отметим, что сингулярность (28) $(-1/2 < s < 1/2)$ является более слабой, чем сингулярность опорного потенциала (1) (и связанного с ним точечного потенциала $\delta V = -2s\delta(x)|x|^{-1}$ [1]).

В случае, если из тех или иных соображений четные функции гамильтониана (1) будут выбраны в виде комбинации $\psi_+(x)$ и $\psi_-(x)$ (2), (6) (такая возможность обсуждалась в [1]), изложенный метод решения обратной задачи легко обобщается.

Однако, если сингулярная часть потенциала имеет более слабую, чем (1), особенность $W = \lambda|x|^{-\nu}$, $0 < \nu < 2$ (см. [17]), выбор четного решения УШ требует дополнительных физических аргументов по сравнению с [2, 3]. Поэтому решение обратной задачи, приведенное здесь, не продолжается автоматически от $\nu = 2$ вниз. Оно будет рассмотрено отдельно.

Найденное нами решение обратной задачи можно использовать для других потенциалов с особенностью λx^{-2}.

В этом случае решением обратной задачи можно воспользоваться для решения уравнения Кортевега—де Фриза с сингулярными начальными данными ($V \sim \lambda x^{-2}$, $x \to 0$; $V \to 0$, $x \to \pm\infty$) по аналогии с несингулярной задачей Кортевега—де Фриза [15].

Таким образом, нам удалось заполнить одну из немногочисленных лакун в классической проблеме восстановления потенциала по спектральным данным, обнаружив при этом нетривиальное поведение ΔV при $x \to 0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гостев В. Б., Минеев В. С., Френкин А. Р. // ТМФ. 1986. **68**. С. 45. [2] Гостев В. Б., Френкин А. Р. // Изв. вузов, Физика. 1989. № 10. С. 85. [3] Гостев В. Б., Френкин А. Р. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1990. **31**, № 6. С. 72. [4] Abracham P. B., Moses H. E. // Phys. Rev. 1980. **A22**. P. 1333. [5] Гостев В. Б., Минеев В. С., Френкин А. Р. // ТМФ. 1983. **56**. С. 74. [6] Адамян М. Н. // ТМФ. 1981. **48**. С. 76. [7] Гостев В. Б., Минеев В. С., Френкин А. Р. // ДАН СССР. 1982. **262**. С. 1364. [8] Рубаков В. А. // Кварки 84. М., 1985. Т. 1. С. 169. [9] Пиппард А. Физика колебаний. М., 1989. Т. 2. Гл. 14. [10] Dittrich J., Exner P. // J. Math. Phys. 1985. **28**. P. 2000. [11] Ландау Л. Д. Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1989. [12] Малкин И. А., Манько В. И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М., 1979. [13] Переломов А. М. Обобщенные когерентные состояния и их приложения. М., 1987. [14] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стеган. М., 1979. [15] Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М., 1980. [16] Гостев В. Б., Френкин А. Р. // ТМФ. 1985. **62**. С. 472. [17] Гостев В. Б., Френкин А. Р. // ТМФ. 1988. **74**. С. 247.

Поступила в редакцию
18.10.90