УДК 535.5+517.9

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ БОЛЬШИХ x И t

П. И. Наумкин

(кафедра математики)

Получено асимптотическое представление при больших x и t решений задачи Коши для следующих нелинейных диссипативных уравнений: Кортевега—де Фриза—Бюргерса, Колмогорова—Петровского—Пискунова, Отта—Судана—Островского и Бюргерса с линейным затуханием.

Изучение асимптотического поведения при $t \to \infty$ решений различных нелинейных эволюционных уравнений привлекает огромное внимание исследователей. Например, в [1] рассматривалась так называемая задача о распаде ступеньки для уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова (КПП):

$$u_t + u^2 + u - u_{xx} = 0 \tag{1}$$

(см. также обзор [2]), т. е. вычисление асимптотики при больших временах решений задачи Коши, удовлетворяющих следующим граничным условиям:

$$u(x, t) \to 1 \text{ при } x \to -\infty \text{ и } u(x, t) \to 0 \text{ при } x \to +\infty.$$

Асимптотическое поведение при $t \to \infty$ решений задачи Коши для уравнения Бюргерса

$$u_t + (u_x)^2 - u_{xx} = 0 \tag{2}$$

может быть определено с помощью подстановки Хопфа—Коула [3, 4].

Обнаруженный недавно метод обратной задачи рассеяния дает возможность вычисления асимптотики при $t \to \infty$ решений уравнения Кортевега—де Фриза (КдФ) (см. [5, 6]):

$$u_t + (u_x)^2 + \frac{a}{3} u_{xxx} = 0. \tag{3}$$

Все эти результаты существенно связаны с уравнениями (1)—(3) и теряют силу при произвольном возмущении этих уравнений. Например, замена Хопфа—Коула неприменима к уравнению Бюргерса с линейным затуханием

$$u_t + (u_x)^2 + \lambda u - u_{xx} = 0, \tag{4}$$

а асимптотика решений уравнения Кортевега—де Фриза—Бюргерса (КдФБ)

$$u_t + (u_x)^2 - u_{xx} + \frac{a}{3} u_{xxx} = 0 \tag{5}$$

и уравнения Отта—Судана—Островского [7, 8]

$$u_t + (u_x)^2 + H(u_x) + \frac{a}{3} u_{xxx} = 0, \tag{6}$$

где $H(u)$ — преобразование Гильберта, не может быть вычислена с помощью метода обратной задачи рассеяния. И наконец, асимптотика решений уравнения КПП (1) не рассматривалась до сих пор в случае, когда $u(x, t)\to 0$ при $x\to\pm\infty$.

Перечисленные выше уравнения (1)—(6) являются частными случаями следующего модельного уравнения:

$$u_t+\left(\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\right)^2+\mathbf{K}(u)=0, \tag{7}$$

где $s=0;\ 1$,

$$\mathbf{K}(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp\exp\{ipx\}K(p)\,\widehat{u}(p,\ t),$$

$\widehat{u}(p,\ t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\{-ipx\}u(x,\ t)\,dx$ — фурье-преобразование функции $u(x,\ t)$.

Уравнение (7) применимо для описания широкого класса волновых процессов в диссипативных и диспергирующих средах и включает в себя многие как локальные, так и нелокальные уравнения (см. обзор [9]). В случае уравнений (1)—(6) символ оператора $K(p)$ имеет вид

$$K(p)=\lambda+|p|^{\delta}+\varphi(p), \tag{8}$$

где $\lambda\geqslant 0$, $\varphi(p)=-(ia/3)p^3$, $a\geqslant 0$, $\delta=2$ для уравнений (1), (2), (4), (5) и $\delta=1$ для уравнения (6). В работах [10, 11] для решений задачи Коши для уравнения (7) получена следующая асимптотика при $t\to\infty$ равномерно по $\xi=x/t^{1/\delta}$:

$$u(x,\ t)=A\exp\{-\lambda t\}\,t^{-1/\delta}\int_0^{\infty}\cos(p\xi)\exp\{-p^{\delta}\}\,dp+O\left(\frac{\exp\{-\lambda t\}}{t^{1/\delta+\mu}}\right), \tag{9}$$

где $\lambda\geqslant 0$, $\delta>0$, $\mu>0$ и A — некоторые константы, определяемые явно символом $K(p)$ и фурье-образом начального условия. Из формулы (9) неясна асимптотика решений при одновременном стремлении $\xi\to\infty$ и $t\to\infty$, поскольку главный член в (9) стремится к нулю при $\xi\to\infty$, а зависимость от ξ остатка не выписана явно.

Оказывается справедливой

Теорема 1. *Пусть* 1) *символ* $K(p)$ *оператора* $\mathbf{K}$ *представим в виде* (8) *при* $p\in R_1\backslash 0$, *где* $\varphi(p)\in C^4(R_1\backslash 0)$ *и удовлетворяет оценке*

$$\left|\frac{d^l\varphi(p)}{dp^l}\right|\leqslant c_1 m^{\delta-l+\sigma}(p)\,M^{\alpha}(p),\quad 0\leqslant l\leqslant 4,$$

2) *фурье-образ* $\widehat{\bar{u}}(p)$ *начального возмущения* $\bar{u}(x)$ *принадлежит* $C^4(R_1)$ *и подчиняется оценке*

$$\left|\frac{d^l\widehat{\bar{u}}(p)}{dp^l}\right|\leqslant \varepsilon M^{-3-4\alpha}(p),\quad 0\leqslant l\leqslant 4,$$

где $0<\varepsilon<c$, $c>0$ — *некоторая константа*, $c_1>0$, $\alpha\geqslant 0$, $\lambda\geqslant 0$, $\sigma>0$ $m(p)=\min(1;\ |p|)$, $M(p)=\max(1;\ |p|)$ *и, кроме того, если* $\lambda=0$, *то* $\delta\in(0,\ 1+2s)$, *а если* $\lambda>0$, *то* $\delta\in(0,\ \infty)$.

Тогда при $t \to \infty$ *и* $\xi = \frac{|x|}{t^{1/\delta}} \to \infty$ *справедливо асимптотическое представление*

$$u(x, t) = \xi^{-\delta-1} t^{-1/\delta} \exp\{-\lambda t\} (B + O(\xi^{-\mu} + t^{-\mu/\delta})), \tag{10}$$

где $B = A\Gamma(1+\delta)\sin(\pi\delta/2)$, $\mu > 0$, *величина* A *та же, что и в формуле* (9).

В частности, для решений уравнения (6) из формул (9) и (10) имеем при всех $x \in R_1$ и $t \to \infty$

$$u(x, t) = \frac{A}{t(1 + (x/t)^2)} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

Для уравнений (1), (2), (4), (5) величина $\delta = 2$ и главный член в формуле (10) обращается в нуль. Для вычисления асимптотики в этих случаях приходится потребовать аналитичности фурье-образа начального возмущения. Имеет место

Теорема 2. *Пусть* 1) *символ* $K(p)$ *оператора* K *в уравнении* (7) *имеет вид* (8) *с* $\varphi(p) = -iap^3/3$, $a \geqslant 0$, $\delta = 2$, $\lambda \geqslant 0$ *при* $s = 1$, *но* $\lambda > 0$ *при* $s = 0$;

2) *фурье-образ* $\hat{\bar{u}}(p)$ *начального возмущения* $\bar{u}(x)$ *аналитичен в области* $\eta = \operatorname{Im} p \geqslant d \equiv -1/a$ *и удовлетворяет оценке*

$$\left| \frac{d^l \hat{\bar{u}}(p)}{dp^l} \right| \leqslant \varepsilon M^{-6}(p) \exp\{b\mu(p)\}, \quad l = 0;\ 1,$$

где $b > 0$, $0 < \varepsilon \leqslant c$, $c < 0$ — *некоторая константа,* $\mu(p) = \eta^2(1 + a\eta/3)$.

Тогда при $t \to \infty$ *имеют место следующие асимптотические формулы:* 1) *при* $y = x/t > d$

$$u(x, t) = A(i\sigma) \exp\{-\nu t\} \sqrt{\frac{\pi}{t\sqrt{1+ay}}} + O(\exp\{-\nu t\} t^{-3/4}), \tag{11}$$

где $\sigma = \frac{\sqrt{1+ay} - 1}{a}$, $\nu = \lambda + \frac{2}{3a^2}\left((1+ay)^{3/2} - 1 - \frac{3ay}{2}\right)$;

2) *при* $y = d$

$$u(x, t) = A(id) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \exp\{-\lambda t - t/3a^2\}}{(\sqrt{3}\, at)^{1/3}} + O\left(\frac{\exp\{-\lambda t - t/3a^2\}}{t^{1/2}}\right); \tag{12}$$

3) *при* $y < d$

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{a\beta t}} \exp\{-\chi t\} \sum_{l=1}^{2} A(id + (-1)^l \beta) \times$$

$$\times \exp\left\{(-1)^l i \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} a\beta^3 t\right)\right\} + O(\exp\{-\chi t\} t^{-3/4}), \tag{13}$$

где $\chi = \lambda + yd - \frac{2}{3} d^3$, $\beta = \frac{\sqrt{-1-ay}}{a} > 0$.

Величина $A(p)$ явным образом выражается через символ $K(p)$ и фурье-образ начального возмущения.

Теорема 2 дает асимптотику решения уравнения КдФБ (5). В случае $a=0$, т. е. для уравнений (1), (2) и (4), как следствие теоремы 2 получается

Теорема 3. *Пусть* 1) *символ* $K(p)$ *равен* $K(p)=\lambda+p^2$, *где* $\lambda\geqslant 0$ *при* $s=1$ *и* $\lambda>0$ *при* $s=0$,

2) *фурье-образ* $\hat{\tilde{u}}(p)$ *начального возмущения* $\tilde{u}(x)$ *аналитичен всюду на комплексной плоскости и удовлетворяет оценкам* ($\eta=\operatorname{Im} p$):

$$\left|\frac{d^l\hat{\tilde{u}}(p)}{dp^l}\right|\leqslant\varepsilon M^{-6}(p)\exp\{b\eta^2\},\quad l=0,1,$$

где $0<\varepsilon\leqslant c$, $c>0$, $b>0$ — *некоторые постоянные.*

Тогда при $t\to\infty$ *и* $x\to\pm\infty$ *равномерно по* $y=(x/t)\in R_1$ *справедлива асимптотика*

$$u(x,\ t)=A\left(\frac{iy}{2}\right)\sqrt{\frac{\pi}{t}}\exp\{-\lambda t-y^2t/4\}+O\left(\frac{\exp\{-\lambda t\}}{t^{3/4}}\right). \qquad (14)$$

Заметим, что асимптотики (9) и (10) не зависят от явного вида консервативной части $\operatorname{Im} K(p)$ символа $K(p)$. А характер асимптотики (11)—(14) при одновременном стремлении $x\to\infty$ и $t\to\infty$ существенно определяется консервативной частью $\operatorname{Im} K(p)$, равно как и диссипативной частью $\operatorname{Re} K(p)$, символа $K(p)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. // Бюлл. МГУ. Матем. и мех. 1937. Т. 1. С. 1. [2] Вольперт А. И. // Петровский И. Г. Избранные труды. М., 1987. Т. 2. С. 333. [3] Hopf E. // Comm. Pure and Appl. Math. 1950. 3. P. 201. [4] Cole J. D. // Quart. Appl. Math. 1951. 9. P. 226. [5] Абловиц М., Сигур X. Солитоны и метод обратной задачи. М., 1987. [6] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М., 1980. [7] Ott E., Sudan R. N. // Phys. Fluids. 1969. 12, N 11. P. 2388. [8] Ostrovsky L. A. // Int. J. Non- Linear Mech. 1976. 11. P. 401. [9] Наумкин П. И., Шишмарев И. А. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1990. 31, № 5. С. 3; Там же. № 6. С. 3. [10] Наумкин П. И., Шишмарев И. А. // // Матем. моделирование. 1989. 1, № 6. С. 109. [11] Наумкин П. И., Шишмарев И. А. // Матем. моделирование. 1990. 2, № 3. С. 75.

Поступила в редакцию
26.06.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1992. Т. 33, № 1

УДК 539.123

ПЕРЕНОРМИРОВКА В ТЕРМИНАХ НАБЛЮДАЕМЫХ

Д. А. Славнов

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Описана процедура, позволяющая однозначно выразить все наблюдаемые величины через несколько базовых. Результат не зависит от используемой схемы перенормировок.

Стандартная схема расчета наблюдаемых величин квантовой теории поля в рамках пертурбативного метода заключается в следующем. Вычисляются подходящие функции Грина в терминах голых параметров теории с использованием некоторой регуляризации. Затем приме-