Теорема 2 дает асимптотику решения уравнения КдФБ (5). В случае $a=0$, т. е. для уравнений (1), (2) и (4), как следствие теоремы 2 получается

Теорема 3. *Пусть* 1) *символ* $K(p)$ *равен* $K(p)=\lambda+p^2$, *где* $\lambda\geqslant 0$ *при* $s=1$ *и* $\lambda>0$ *при* $s=0$,

2) *фурье-образ* $\hat{\tilde{u}}(p)$ *начального возмущения* $\tilde{u}(x)$ *аналитичен всюду на комплексной плоскости и удовлетворяет оценкам* ($\eta=\operatorname{Im} p$):

$$\left|\frac{d^l\hat{\tilde{u}}(p)}{dp^l}\right|\leqslant\varepsilon M^{-6}(p)\exp\{b\eta^2\},\quad l=0,1,$$

где $0<\varepsilon\leqslant c$, $c>0$, $b>0$ — *некоторые постоянные.*

Тогда при $t\to\infty$ *и* $x\to\pm\infty$ *равномерно по* $y=(x/t)\in R_1$ *справедлива асимптотика*

$$u(x,\ t)=A\left(\frac{iy}{2}\right)\sqrt{\frac{\pi}{t}}\exp\{-\lambda t-y^2t/4\}+O\left(\frac{\exp\{-\lambda t\}}{t^{3/4}}\right). \tag{14}$$

Заметим, что асимптотики (9) и (10) не зависят от явного вида консервативной части $\operatorname{Im} K(p)$ символа $K(p)$. А характер асимптотики (11)—(14) при одновременном стремлении $x\to\infty$ и $t\to\infty$ существенно определяется консервативной частью $\operatorname{Im} K(p)$, равно как и диссипативной частью $\operatorname{Re} K(p)$, символа $K(p)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. // Бюлл. МГУ. Матем. и мех. 1937. Т. 1. С. 1. [2] Вольперт А. И. // Петровский И. Г. Избранные труды. М., 1987. Т. 2. С. 333. [3] Hopf E. // Comm. Pure and Appl. Math. 1950. 3. P. 201. [4] Cole J. D. // Quart. Appl. Math. 1951. 9. P. 226. [5] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М., 1987. [6] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М., 1980. [7] Ott E., Sudan R. N. // Phys. Fluids. 1969. 12, N 11. P. 2388. [8] Ostrovsky L. A. // Int. J. Non- Linear Mech. 1976. 11. P. 401. [9] Наумкин П. И., Шишмарев И. А. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1990. 31, № 5. С. 3; Там же. № 6. С. 3. [10] Наумкин П. И., Шишмарев И. А. // // Матем. моделирование. 1989. 1, № 6. С. 109. [11] Наумкин П. И., Шишмарев И. А. // Матем. моделирование. 1990. 2, № 3. С. 75.

Поступила в редакцию
26.06.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1992. Т. 33, № 1

УДК 539.123

ПЕРЕНОРМИРОВКА В ТЕРМИНАХ НАБЛЮДАЕМЫХ

Д. А. Славнов

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Описана процедура, позволяющая однозначно выразить все наблюдаемые величины через несколько базовых. Результат не зависит от используемой схемы перенормировок.

Стандартная схема расчета наблюдаемых величин квантовой теории поля в рамках пертурбативного метода заключается в следующем. Вычисляются подходящие функции Грина в терминах голых параметров теории с использованием некоторой регуляризации. Затем приме-

няется та или иная схема перенормировок. Голые параметры выражаются через перенормированные и константы перенормировок. Сингулярные (по параметру регуляризации) части констант перенормировок определяются однозначно. В несингулярных появляется произвол, который устраняется наложением некоторых условий на функции Грина. Но функции Грина лишь опосредствованно связаны с наблюдаемыми величинами. Это приводит к тому, что связь между различными наблюдаемыми оказывается запутанной и зависящей от используемой схемы перенормировок.

Мы хотим предложить метод, в котором в рамках фиксированной модели все наблюдаемые однозначно (по теории возмущений) выражаются через некоторый набор базовых наблюдаемых. В значительной мере идеи этого метода навеяны статьей [1]. Под наблюдаемой мы будем подразумевать величину, которая имеет определенное численное значение, например некоторое сечение рассеяния при определенных импульсах. То же сечение при других импульсах будем считать другой наблюдаемой. Кроме того, наблюдаемая должна быть действительно измеримой величиной, в частности она должна быть инфракрасно стабильной. Поэтому сечение, возможно, должно быть инклюзивным по конечным, а в некоторых случаях и по начальным состояниям.

Рассмотрим перенормируемую модель, динамика которой задается лангранжианом, зависящим от одной голой константы связи α_0 и одной голой массы m_0. Обобщение на случай большего числа затравочных констант тривиально. Введем некоторую регуляризацию. Через μ обозначим параметр этой регуляризации. Будем считать, что снятию регуляризации соответствует предельный переход $\mu\to\infty$.

По стандартным правилам квантовой теории поля можно представить наблюдаемую Q в виде ряда теории возмущений:

$$Q=Q_0(m_0)+\alpha_0 Q_1(m_0,\ \mu)+\alpha_0^2 Q_2(m_0,\ \mu)+\ldots \tag{1}$$

Хорошо известно, что для того чтобы выражение (1) выдерживало предельный переход $\mu\to\infty$, нужно чтобы α_0 и m_0 определенным образом зависели от μ:

$$\begin{aligned}\alpha_0&=\alpha+\alpha^2 Z_2(m,\ \mu)+\alpha^3 Z_3(m,\ \mu)+\ldots\\ m_0&=m+\alpha Y_1(m,\ \mu)+\alpha^2 Y_2(m,\mu)+\ldots,\end{aligned} \tag{2}$$

где α и m — так называемые перенормированные константа связи и масса, а Z_i и Y_i — константы перенормировок. Обычно α фиксируют как значение определенной функции Грина при некоторых значениях импульсов, а m — как полюс двухточечной функции Грина. Но функции Грина не являются наблюдаемыми величинами. Значение их зависит от способа вычисления (схемы перенормировок, выбора калибровки и т. п.). Поэтому нет ничего удивительного в том, что, взяв в качестве фундаментальных (α и m) неоднозначно определенные величины, в дальнейшем мы можем встретиться с неоднозначностью в результатах расчетов.

Мы поступим по-другому. Возьмем в качестве базовых какие-нибудь две независимые наблюдаемые A и M. Удобно их выбрать такими, чтобы в разложении (1) для них выполнялись равенства

$$A_0(m_0)=0,\ A_1(m_0,\ \mu)=1,\ M_0(m_0)=m_0.$$

После этого наблюдаемую A будем считать перенормированной кон-

стантой связи (α), а наблюдаемую M — условной перенормированной массой (m). Таким образом,

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \alpha_0^2 A_2(m_0, \mu) + \ldots, \\ m &= m_0 + \alpha_0 M_1(m_0, \mu) + \alpha_0^2 M_2(m_0, \mu) + \ldots . \end{aligned} \tag{3}$$

Разрешая эти уравнения относительно α_0 и m_0, получим соотношения (2) с константами перенормировок

$$\begin{aligned} Z_2(m, \mu) &= -A_2(m, \mu), \\ Y_1(m, \mu) &= -M_1(m, \mu), \\ Y_2(m, \mu) &= M_1(m, \mu) A_2(m, \mu) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial m} M_1^2(m, \mu) - M_2(m, \mu). \end{aligned} \tag{4}$$

Подставляя представления (2) в разложение (1), для наблюдаемой Q будем иметь

$$\begin{aligned} Q = Q_0(m) &+ \alpha \left[Q_1(m, \mu) + \frac{\partial Q_0(m, \mu)}{\partial m} Y_1(m, \mu) \right] + \\ &+ \alpha^2 \left[Q_2(m, \mu) + \frac{\partial Q_1(m, \mu)}{\partial m} Y_1(m, \mu) + \frac{\partial Q_0(m, \mu)}{\partial m} Y_2(m, \mu) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q_0(m, \mu)}{\partial m^2} Y_1^2(m, \mu) + Q_1(m, \mu) Z_2(m, \mu) \right] + \ldots . \end{aligned} \tag{5}$$

Если мы теперь подставим в (5) выражения Z_2, Y_1, Y_2 из (4), то в силу перенормируемости модели каждая сумма, заключенная в квадратные скобки в правой части (5), будет выдерживать предельный переход $\mu \to \infty$, причем результат этого перехода не зависит от способа регуляризации.

Никакой конкретной схемой перенормировок мы вообще не пользовались. Поэтому выражение (5) дает совершенно однозначное разложение наблюдаемой Q по константе связи α. Возникает естественный вопрос: куда же исчезла неоднозначность? На самом деле она существует: вид разложения (5), конечно, будет зависеть от того, какие наблюдаемые A и M мы возьмем в качестве базовых. Но эта неоднозначность имеет чисто физическое происхождение. Ясно, что никакими математическими ухищрениями ее обойти нельзя.

Конечно, скорость сходимости ряда (5) может зависеть от того, какие наблюдаемые выбраны в качестве базовых, но в любом случае разложение однозначно.

Так как процедура перенормировок не использовалась, то отдельные слагаемые в квадратных скобках в (5), вообще говоря, не выдерживают предельный переход $\mu \to \infty$. При конкретных вычислениях это неудобно, поэтому можно использовать какую-нибудь процедуру перенормировок. Покажем, что все эти процедуры приводят к одному и тому же результату.

Как известно, любая процедура перенормировок, совместная с условиями причинности и унитарности, эквивалентна [2] R-операции Боголюбова—Парасюка при некотором выборе в последней конечных контрчленов [3]. Вычислим наблюдаемые Q, A и M с помощью некоторой R-операции с фиксированными контрчленами. Тогда, ограничи-

ваясь вторым порядком теории возмущений, соотношения (1) и (3) можно переписать в виде

$$Q=\widetilde{Q}_0(m_0')+\alpha_0'\widetilde{Q}_1(m_0')+(\alpha_0')^2\widetilde{Q}_2(m_0') \tag{6}$$

и

$$A=\alpha=\alpha_0'+(\alpha_0')^2\widetilde{A}_2(m_0'),$$

$$M=m=m_0'+\alpha_0'\widetilde{M}_1(m_0')+(\alpha_0')^2\widetilde{M}_2(m_0'). \tag{7}$$

В выражениях (6) и (7) α_0', m_0' — конечные константы, а функции $\widetilde{Q}_i$, $\widetilde{A}_i$, $\widetilde{M}_i$ выдерживают процедуру снятия регуляризации. Будем считать, что в (6) и (7) регуляризация уже снята.

При использовании R-операции с другими контрчленами для функций $\widetilde{Q}_i$, $\widetilde{A}_i$, $\widetilde{M}_i$ получатся новые выражения. Но в силу перенормируемости модели введение новых контрчленов в R-операцию можно скомпенсировать конечной перенормировкой $\alpha_0'\to\alpha_0''$, $m_0'\to m_0''$. Так что результат действия новой R-операции для наблюдаемой Q можно записать в виде

$$Q=\widetilde{Q}_0(m_0'')+\alpha_0''\widetilde{Q}_1(m_0'')+(\alpha_0'')^2\widetilde{Q}_2(m_0'')+\Delta\widetilde{Q}(m_0'') \tag{8}$$

и аналогично для заряда и массы:

$$\alpha=\alpha_0''+(\alpha_0'')^2\widetilde{A}_2(m_0'')+\Delta\widetilde{A}(m_0''), \tag{9}$$

$$m=m_0''+\alpha_0''\widetilde{M}_1(m_0'')+(\alpha_0'')^2\widetilde{M}_2(m_0'')+\Delta\widetilde{M}(m_0'').$$

Остаточные члены $\Delta\widetilde{Q}$, $\Delta\widetilde{A}$, $\Delta\widetilde{M}$ третьего порядка по α_0'' обязаны своим происхождением тому, что в (6) и (7) ряды теории возмущений оборваны.

Соотношения (10) будем рассматривать как систему уравнений для определения α_0'' и m_0'', решение которой затем подставляется в (9). Но тогда соотношения (9) и (10) отличаются от соотношений (6) и (7) только тем, что неизвестные α_0' и m_0' переобозначены через α_0'' и m_0'' и появились остаточные члены. Переобозначение промежуточных величин α_0' и m_0' на окончательном выражении Q через α и m сказаться, конечно, не может, а остаточные члены могут изменить Q только в третьем порядке по α. Но мы интересуемся в этом примере величиной Q только до второго порядка по α. До этого порядка все определяется вполне однозначно.

Из приведенного рассуждения вроде бы следует, что на допустимые схемы перенормировок никаких ограничений нет. Можно, например, в модели, обладающей некоторой симметрией, использовать перенормировки, нарушающие эту симметрию. В действительности это верно лишь отчасти. В наших предыдущих рассуждениях мы существенным образом использовали свойство перенормируемости теории. Поэтому допустимыми схемами перенормировок будут только те, которые не нарушают это свойство. То есть допустимы те перенормировки, которые эквивалентны переопределению конечного числа голых констант модели. Чтобы из окончательных результатов исключить эти константы, достаточно зафиксировать такое же число независимых базовых наблюдаемых. Однако часто можно ограничиться и меньшим числом базовых наблюдаемых. Например, в калибровочных теориях свойство калибровочной инвариантности обеспечивает устойчивое равенство некоторых констант связи (в квантовой хромодинамике равенство констант кварк-глюонной и глюон-глюонной связи). Предположим, что

нам удалось придумать такую перенормировку, которая сохраняет перенормируемость теории, но нарушает калибровочную инвариантность. В этом случае константы связи будут перенормироваться независимо, и для их исключения из окончательного результата нужно будет ввести соответствующее число базовых наблюдаемых. Но мы знаем, что существуют для этой модели перенормировки, сохраняющие калибровочную инвариантность. Так как обе схемы сохраняют перенормируемость теории, то, во-первых, окончательный результат и при использовании калибровочно неинвариантной перенормировки будет калибровочно инвариантным. Во-вторых, так как при калибровочно инвариантной перенормировке достаточно зафиксировать меньшее число базовых наблюдаемых, то и при использовании неинвариантной перенормировки зависимость окончательных результатов от избыточных базовых наблюдаемых можно исключить, считая, что они являются соответствующими функциями независимых наблюдаемых.

Свобода в выборе перенормировочных схем в действительности еще более широкая. Из приведенного доказательства эквивалентности различных схем видно, что если мы интересуемся окончательным результатом до некоторого порядка теории возмущений, то достаточно использовать перенормировочную схему, обеспечивающую перенормируемость теории до этого порядка. Результат будет тот же, как и при использовании перенормировочной схемы, сохраняющей перенормируемость теории во всех порядках теории возмущений и обладающей всеми нужными симметриями.

Отсюда, в частности, следует, что для получения симметричного результата достаточно, чтобы в данной модели в принципе существовала симметричная перенормировка. Но мы ее можем и не знать, а пользоваться любой другой схемой, удовлетворяющей условию перенормируемости до требуемого порядка. Симметрия результата до этого порядка будет обеспечена автоматически.

Все сказанное о допустимых перенормировочных схемах относится и к допустимым схемам регуляризации. Напомним, что формула (5) позволяет получить окончательный результат, не используя никакой схемы перенормировок. Допустимыми схемами регуляризации являются те, которые можно воспроизвести, переопределяя голые константы теории, вводя в них зависимость от параметра регуляризации.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Dhar A., Gupta V. // Phys. Rev. 1984. D29. P. 2822. [2] Хепп К. Теория перенормировок. М., 1974. [3] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., 1984.

Поступила в редакцию
24.09.91