УДК 536.758; 539.201

О ЕДИНСТВЕННОСТИ В ОДНОЙ ИЗ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

В. Б. Гласко, И. Э. Степанова

(*кафедра математики*)

Рассматривается задача, связанная с технологической обработкой заготовки, имеющей неоднородную в поперечном направлении структуру, что выражается в зависимости коэффициента диффузии (или теплопроводности) от поперечной координаты. Доказана единственность определения этого коэффициента по заданному профилю концентрации (или температуры) в близкий к концу процесса момент времени.

1. В задачах математического моделирования технологических процессов предполагаются известными физические параметры материалов, которые могут быть функциями независимых переменных или физических полей.

Соответствующие зависимости не всегда известны, и тогда они могут быть определены с помощью постановки и решения обратных задач, где в качестве входной используется информация о наблюдаемых физических полях. При этом принципиальное значение имеет вопрос о единственности решения обратной задачи [1], без чего невозможна разработка эффективных регуляризирующих операторов [2].

Рассматриваемая в настоящей статье задача связана с технологической обработкой цилиндрической заготовки, которая имеет (или должна иметь) неоднородную в поперечном направлении структуру, например в пределах приповерхностного слоя. При термической обработке сталей такая неоднородность может характеризоваться зависимостью коэффициента теплопроводности от поперечной координаты, а при карбонировании или легировании — зависимостью от нее коэффициента диффузии.

В обоих случаях косвенной информацией о таких зависимостях ($p=p(x)$) является наряду с данными поверхностных наблюдений профиль температуры (концентрации) в момент, близкий к концу процесса или по окончании последнего.

Решение соответствующей обратной задачи может быть получено двумя различными способами: а) как решение операторного уравнения относительно $p(x)$ с алгоритмически заданной левой частью [2] либо б) как решение смешанной задачи для дифференциального уравнения, определяющей и физическое поле, и искомую характеристику [3]. Для исследования единственности оказывается удобной вторая форма постановки, согласующаяся с применяемым нами методом [4].

2. Математическая задача в этом случае описывается, например, уравнением диффузии со следующими дополнительными условиями:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ 0<x<l,\ 0<t\leqslant T,\\
u(0,\ t)=\varphi_1(t),\ u(l,\ t)=\varphi_2(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,\\
p(x)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=q(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,\\
u(x,\ t_1)=\psi(x),\ 0\leqslant x\leqslant l,\\
0<t_1<T
\end{gathered}\tag{1}$$

в предположении, что φ_i, $i=1, 2$; $q(t)$; $\psi(x)$ известны. Заметим, что при заданной $u(0,t)$ условие $p(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=q(t)$ включает и случай конвективного обмена на границе при данной концентрации (температуре) внешней среды.

Теорема. *Пусть* $p(x)\in C^2([0, l])$, $p(x)\geqslant p_0>0$. *Предположим также, что* $\partial u/\partial x\neq 0$ *в* $\overline{Q}_T$, *где* $\overline{Q}_T\equiv[0, l]\times[0, T]$. *Тогда при заданных* $\varphi_i(t)$, $i=1, 2$; $q(t)$; $\psi(x)$ *существует не более одного решения задачи* (1) $\{u(x, t), p(x)\}\in U=\{u: u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{xtx}, u_{xtt}, u_{xtxx}\in C(\overline{Q}_T)\}\times C^2([0, l])$.

Доказательство. Пусть существуют два решения задачи (1): $\{u_1(x,t), p_1(x)\}$ и $\{u_2(x,t), p_2(x)\}$. Их разность $u_1-u_2\equiv\tilde{u}$, $p_1-p_2\equiv\tilde{p}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(p_1\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{p}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right),\ 0<x<l,\ 0<t\leqslant T,$$

и дополнительным условиям

$$\begin{aligned}&\tilde{u}(0, t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T,\\ &p_1\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\Big|_{x=0}+\tilde{p}\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\\ &\tilde{u}(l, t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T,\\ &\tilde{u}(x, t_1)=0,\ 0\leqslant x\leqslant l.\end{aligned}\qquad(1')$$

Введем функции

$$v=\int_0^x\tilde{u}(\xi, t)\,d\xi,\ w=v_t,\ h=\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)_t\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^{-1},\ y=w-hv.$$

Сделаем замену переменной $z=t-t_1$. Тогда

$$v(x, z)=\int_0^z v_\tau(x, \tau)\,d\tau,\ y=v_z-hv,\ w=v_z,\ \partial/\partial z=\partial/\partial t.$$

(Мы сохранили прежние обозначения для функций.) Так как $w=y+\int_0^z wdz$, то $w=y+\int_0^z S(x, z, \tau)\,y(x, \tau)\,d\tau$ — резольвента неоднородного интегрального уравнения Вольтерра второго рода, $S(x, z, \tau)\in C^1(\overline{Q}'_T\times[-t_1, T-t_1])$, $\overline{Q}'_T\equiv[0, l]\times[-t_1, T-t_1]$.

Проинтегрируем уравнение в (1′) по x:

$$\int_0^x\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\,d\xi=p_1\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\Big|_{\xi=0}^{\xi=x}+\tilde{p}\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{\xi=0}^{\xi=x}=p_1(x)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}(x, z)+$$
$$+\tilde{p}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x}(x, z),\ \text{так как}\ p_1(x)\frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=0}=p_2\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=0}=q(z).$$

Продифференцируем равенство

$$\left(\int_0^x \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial z}(\xi, z)\,d\xi - p_1 \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^{-1} = \widetilde{p}(x) \text{ по } z.$$

Получим $\frac{\partial w}{\partial z} - p_1 \frac{\partial w}{\partial x} - h\left(w - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$. Поэтому для $y(x, z)$ справедливо неравенство

$$\left| y_z - p_1(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right| \leqslant A \left\{ |y_x| + |y| + \left| \int_0^z [|y_x| + |y|](x, \tau)\,d\tau \right| \right\},$$

где A — несущественная постоянная, и выполняются условия $y|_{x=0} = 0$, $y_x|_{x=0} = 0$ в $\bar{Q}'_T$.

В более общем случае эта оценка оператора для y с указанными граничными условиями приводит к однозначному выводу о том, что $y \equiv 0$ в некоторой окрестности отрезка $[0, l]$ [5]. В нашем случае такой окрестностью является

$$\Omega_{\delta, \frac{1}{2}} = \left\{ (x', z) : 0 < x' < \frac{1}{2}(1 - \delta^{-2} \cdot z^2) \right\},$$

где $x' = \frac{x}{2l}$, или

$$\Omega_{\delta, \frac{1}{2}} = \left\{ (x', t) : 0 < x' < \frac{1}{2}(1 - \delta^{-2}(t - t_1)^2) \right\}.$$

Значение δ выберем так, чтобы $[t_1 - \delta, t_1 + \delta] \subset [0, T]$, $0 < \delta < 1$. Так как

$$\widetilde{p}(x) = \left(\int_0^x \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial z}(\xi, z)\,d\xi - p_1 \frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^{-1},$$

$$v(x, z) = \int_0^z y(x, \tau)\,d\tau + \int_0^z d\zeta \int_0^\zeta S(x, \zeta, \tau)\, y(x, \tau)\,d\tau,$$

то отсюда следует, что $p(x) \equiv 0$ в $[0, l]$.

Установлено, таким образом, что принятая дополнительная информация достаточна для однозначного определения $p(x)$. Нетрудно, однако, убедиться, что и $u(x, t)$ определена однозначно указанными условиями. Действительно, для $\widetilde{u}(x, t)$ имеем задачу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x) \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}\right), \quad 0 < x < l, \ 0 < t \leqslant T, \\ &\widetilde{u}(x, t_1) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ &\widetilde{u}(0, t) = \widetilde{u}_x(0, t) = \widetilde{u}(l, t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned} \tag{2}$$

На отрезке $[t_1, T]$ задача (2) имеет решение, тождественно равное нулю [6]. Рассмотрим (2) на $[0, t_1]$. Фигурирующий здесь дифференциальный оператор является частным случаем рассмотренного в [7]. В частности, он удовлетворяет требованию

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right)-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}\right|\leqslant C_1\tilde{u}^2+C_2\tilde{u}_x^2,$$

где C_1, $C_2\geqslant 0$, при котором условиям $\tilde{u}(0,t)=0$, $\tilde{u}(l,t)=0$, $\tilde{u}(x,t_1)=0$ может удовлетворять лишь тривиальное решение. Теорема доказана.

3. Возможен другой подход к постановке рассматриваемой задачи, соответствующий работе [8], посвященной определению коэффициента теплообмена (или массообмена). Если предположить, что физическое поле задано на сегменте $[t_1, T]$, а заданные функции $u(0,t)=\varphi_1(t)$, $u(l,t)=\varphi_2(t)$, $p(x)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=q(t)$ аналитичны, как и искомая $p(x)$, то аналитичной оказывается и функция $u(x,t)$ [9]. Тогда функция $u(0,t)$ аналитична на $[t_1, T]$ и может быть однозначно продолжена (например, через комплексную плоскость [10]) на $[0,T]$. В этом случае априорное задание $u(0,t)$ оказывается излишним, и мы автоматически попадаем в условия доказанной выше теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Тихонов А. Н., Кальнер В. Д., Гласко В. Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. М., 1990. [2] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986. [3] Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М., 1980. [4] Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., 1965. [5] Клибанов М. В. // Неклассические проблемы математической физики. Новосибирск, 1981. С. 101. [6] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. [7] Фридман А. Уравнения параболического типа с частными производными. М., 1970. [8] Богомолова И. А., Гласко В. Б., Кальнер В. Д. и др. // Инж.-физ. журн. 1987. 53, № 5. С. 835. [9] Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1983. [10] Булычев Е. В., Гласко В. Б., Федоров С. М. // ЖВМ и МФ. 1983. 23, № 6. С. 1410.

Поступила в редакцию
20.05.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1992. Т. 33, № 1

УДК 53.001.57:577.12

НАКОПЛЕНИЕ ФОТОСЕНСИБИЛИЗАТОРА В КЛЕТКЕ С УЧЕТОМ ПРОНИКНОВЕНИЯ ЕГО ЗАРЯЖЕННЫХ ФОРМ ЧЕРЕЗ МЕМБРАНУ

Л. В. Жорина, Н. В. Степанова

(*кафедра общей физики и волновых процессов*)

Построена и исследована математическая модель проникновения и накопления в клетках ионных форм гематопорфирина (ГП) — фотосенсибилизатора, наиболее часто используемого в фотодинамической терапии опухолевых заболеваний. Показано, что селективность накопления ГП в опухолях определяется: 1) пониженной кислотностью внутри злокачественных клеток и в окружающей их среде и 2) повышенной концентрацией в опухолевых клетках липидов, с которыми связываются молекулы ГП.

Некоторые флуоресцирующие красители при введении их в организм способны преимущественно накапливаться в опухолевых тканях. Эти красители могут использоваться как фототерапевтические агенты. Облучение злокачественных тканей, содержащих краситель, видимым