# КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

## АКУСТИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УДК 530.18

### ОБ ОДНОМ АВТОМОДЕЛЬНОМ СОЛИТОНЕ

**П. В. Елютин**

(*кафедра квантовой радиофизики*)

**Для уравнения Кортевега—де Фриза с дополнительным членом, учитывающим нелинейную диссипацию, получено автомодельное решение солитонного вида, сохраняющее при распространении свою форму при изменяющихся параметрах.**

В теории нелинейных волн одной из центральных моделей является уравнение Кортевега—де Фриза (КдФ)

$$\frac{\partial a}{\partial x}=a\frac{\partial a}{\partial \tau}+\frac{\partial^2 a}{\partial \tau^3}, \tag{1}$$

учитывающее нелинейные эффекты и дисперсию [1]. Решения (1), имеющие вид солитонов — уединенных волн, сохраняющих при распространении свои форму и параметры, — хорошо известны и весьма важны.

Для другой известной модели теории нелинейных волн — уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial a}{\partial x}=a\frac{\partial a}{\partial \tau}+\frac{\partial^2 a}{\partial \tau^2}, \tag{2}$$

учитывающего нелинейность и диссипацию, Руденко и Солуяном [2] было найдено решение, имеющее вид автомодельного солитона — уединенной волны, сохраняющей форму, но изменяющей по мере распространения свои амплитуду и ширину.

Автомодельные решения известны и для КдФ [3]; однако они описывают волны с неограниченно нарастающими амплитудой и/или частотой и весьма далеки от солитонов.

Существует ли уравнение, близкое к уравнению Кортевега—де Фриза, включающее диссипативные члены и обладающее автомодельными решениями солитонного типа ($a\to 0$ при $|\tau|\to\infty$)? Положительный ответ на этот вопрос составляет главное содержание данного сообщения.

Уравнение КдФ инвариантно при преобразовании

$$a\to\lambda^2 a,\ x\to\lambda^{-3}x,\ \tau\to\lambda^{-1}\tau, \tag{3}$$

где $\lambda$ — параметр. Вид диссипативного члена, пропорционального, как и последний член в (2), $\partial^2 a/\partial\tau^2$ и инвариантного при преобразовании (3), определяется однозначно. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial a}{\partial x}=a\frac{\partial a}{\partial \tau}+\frac{\partial^3 a}{\partial \tau^3}+\varkappa\sqrt{|a|}\,\frac{\partial^2 a}{\partial \tau^2}, \tag{4}$$

где $\varkappa$ — безразмерный коэффициент, характеризующий величину диссипации. Добавленный в (4) диссипативный член, во-первых, исчезает при линеаризации, а, во-вторых, с увеличением $a$ растет медленнее первого члена в правых частях (1) и (4). Поэтому формально уравнение (4) является близким к КдФ. С содержательной стороны этот член соответствует диссипации, растущей при увеличении амплитуды волны, что приемлемо физически: такая (качественно) зависимость известна, например, в теории дислокационного поглощения звука [4].

Рассмотрим автомодельные решения (4). Подстановка

$$a=x^{-2/3}\varphi(\xi),\ \xi=\tau x^{-1/3} \tag{5}$$

сводит (4) к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^3\varphi}{d\xi^3}+\varphi\frac{d\varphi}{d\xi}+\frac{1}{3}\xi\frac{d\varphi}{d\xi}+\frac{2}{3}\varphi+\varkappa\sqrt{|\varphi|}\,\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}=0. \tag{6}$$

Простыми и точными решениями (6) являются функции $\varphi_1=-\xi$ и $\varphi_2=-A_0\xi^{-2}$, где $A_0=z^2$, а $z$ есть корень уравнения $z^2+3\varkappa z-12=0$. Эти решения не представляют, однако, физической ценности.

Нас интересуют решения (6), удовлетворяющие условиям $\varphi\to 0$ при $|\xi|\to\infty$. Решение (6), убывающее при $\xi\to+\infty$, может быть представлено в форме асимптотического ряда

$$\varphi_R=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\xi^{-2-3n}, \tag{7}$$

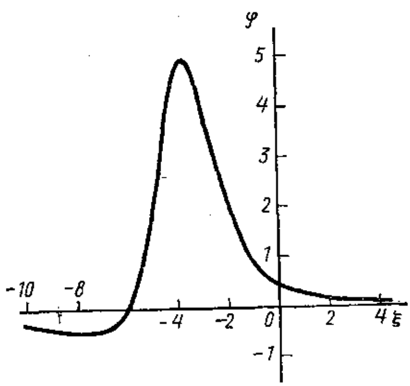
который полностью определяется заданием коэффициента $c_0=A$. Остальные коэффициенты определяются рекуррентно подстановкой (7) в (6): при $A>0$ имеем

$$\begin{aligned} c_1&=(-24+6\varkappa A^{1/2}-2A)\,c_0,\\ c_2&=(-210+33\varkappa A^{1/2}-7A)\,c_1/2, \end{aligned} \tag{8}$$

и т. д. С другой стороны, при $\xi\to-\infty$ линеаризованное уравнение (6), а с ним и КдФ имеют два линейно независимых убывающих решения с асимптотиками

$$\varphi_{L1}\sim\xi^{-2},\ \varphi_{L2}\sim(-\xi)^{1/4}\exp\left\{-\frac{2}{3}(-\xi)^{3/2}\right\}. \tag{9}$$

(Мимоходом заметим: по не вполне понятной причине решения автомодельного линеаризованного КдФ со степенными асимптотиками $\varphi_R$ и $\varphi_{L1}$ в [3] не рассматривались.) Поэтому при каждом значении $\varkappa$ можно найти такое значение $A$, что решение с асимптотикой $\varphi_R$ в области $\xi\to+\infty$ перейдет в области $\xi\to-\infty$ в линейную комбинацию убывающих решений (9). Практически удобнее поступать иначе: фиксировав $A$, определять соответствующее значение $\varkappa$.




Автомодельное решение солитонного типа для уравнения Кортевега—де Фриза с нелинейной диссипацией (4)

На рисунке показано решение, полученное численным интегрированием (6) с асимптотическим условием (7) при значении $A=1$. Соответствующее значение $\varkappa=0{,}556$. Решение имеет вид солитона с широким предвестником малой отрицательной амплитуды. Интересно отметить, что коэффициент $B$ при $\varphi_{L1}$ оказывается довольно большим: $B\approx-30$.

Обсудим теперь начальные условия, соответствующие найденному решению. Учитывая, что сопровождающее время $\tau$ связано с лабораторным $t$ соотношением $\tau=t-x/v$ ($v$ — групповая скорость), находим для начального условия $a(x)\equiv a(t=0,\ x)$ выражение

$$a(x)=x^{-2/3}\,\varphi\,(t_0x^{-1/3}-v^{-1}x^{2/3}),$$

где $t_0$ — произвольный параметр. Используя определенные выше асимптотики $\varphi_L$ и $\varphi_R$, можно убедиться, что функция $a(x)$ ограничена всюду; такое начальное условие физически допустимо. Заметим, что при $x=0$ функция $a(x)$ имеет скачок, величина которого $\Delta a=(A-B)^2t_0^{-2}$ может быть сделана малой выбором $t_0$.

Автор благодарит О. В. Руденко за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М., 1979. С. 210. [2] Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., 1975. С. 62. [3] Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., 1973. С. 89. [4] Гранато А., Люкке К.//Физическая акустика. / Ред. У. Мезон. М., 1969. Т. 4, ч. А. С. 285.

Поступила в редакцию
04.03.91