ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12.01

ТОПОЛОГИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ КАК СЛЕДСТВИЕ ДИНАМИКИ ЗАМКНУТЫХ СУПЕРСТРУН

Н. Ф. Нелипа, М. Ю. Пекар

(*НИИЯФ*)

Полученные в предыдущих работах результаты для замкнутой бозонной струны обобщаются на случай замкнутой суперструны.

В предыдущих статьях [1, 2] был изложен подход, согласно которому топология пространства-времени определяется динамикой замкнутых струн, и рассмотрены замкнутые бозонные струны. Цель настоящей статьи — применить предложенный подход к анализу замкнутых суперструн во втором порядке по константе взаимодействия. В соответствии с методом будет построен когомологический комплекс де Рама на суперпространстве контуров и найден топологический инвариант в данном приближении, а также получены ограничения на топологию пространства-времени.

1. Для описания бесконечномерного супермногообразия контуров G зададим бозонное пространство контуров M и пучок суперкоммутативных колец Θ на M (см., напр., [3]). Это означает, что на каждой окрестности U_α, введенной в [1], задан пучок $\overset{0}{\Theta}_{U_\alpha}\otimes\overset{1}{\Theta}_{U_\alpha}$, где Θ^0 и Θ^1 — пучки четных и нечетных функционалов на U_α. Кроме того, для каждой окрестности U_α существует отображение Ψ_α такое, что

$$\Psi_\alpha(\Theta^0\otimes\Theta^1)_z=\overset{0}{\Theta}_{z_i(\sigma)}\otimes\overset{1}{\Theta}_{z_j(\sigma)}, \tag{1}$$

где $z\in U_\alpha$, $z_i(\sigma)$ — замкнутые контуры в пространстве R^N.

Гладкие кривые на супермногообразии с помощью Ψ_α отображаются в дифференцируемую двумерную поверхность на $u_\alpha\subset R^N$, на каждой задан суперкоммутативный пучок функционалов. Функция перехода $\Psi_{\alpha\beta}=\Psi_\beta\circ\Psi_\alpha^{-1}$ сохраняет дифференцируемость двумерных поверхностей, но может менять род поверхности. Для любой поверхности рода $g\neq0$ на u_β существует такая функция перехода $\Psi_{\beta\alpha}$, которая переводит ее в поверхность рода нуль на u_α. Тем самым функции перехода описывают одновременно геометрию супермногообразия G и динамику контуров.

2. Для того чтобы определить дифференцирование на суперпространстве контуров, необходимо ввести гладкую параметризацию окрестностей $U_\alpha{}^s$. Для этого выберем на $U_\alpha{}^s$ начало координат z^s и зададим семейство гладких непересекающихся кривых $z(\tau)$, $\tau_0<\tau<\tau_1$, покрывающих всю окрестность U_α. В данном семействе выделим все те кривые $z^0(\tau)$, которые соответствуют гладким поверхностям рода нуль без разветвлений и покрывают окрестность $U_\alpha{}^0\subset U_\alpha$. Поверхности $\overset{0}{\Theta}_{z(\sigma,\tau)}\otimes$ $\otimes\overset{1}{\Theta}_{z(\sigma,\tau)}$ распространяют параметризацию на все контуры, лежащие в $U_\alpha{}^0$. Проведенная параметризация соответствует линеаризованной теории в нулевом порядке по взаимодействию и описывает пространство, касательное к пространству контуров с нулевым порядком касания.

В первом порядке параметризуем все поверхности с разветвлением $z^s \to x^s$, y^s. В терминах пучков разветвление будет выглядеть так:

$$
\begin{aligned}
&\Theta_z \to \Theta_x, \ \Theta_y, \\
&\Theta_z^0 = V^0(\Theta_x\Theta_y\Theta_z)\,\Theta_x^0\Theta_y^0 \oplus V^1(\Theta_x\Theta_y\Theta_z)\,\Theta_x^1\Theta_y^1, \qquad (2)\\
&\Theta_z^1 = V^1(\Theta_x\Theta_y\Theta_z)\,(\Theta_x^0\Theta_y^1 \oplus \Theta_x^1\Theta_y^0).
\end{aligned}
$$

При условии, что пространство локально расщепимо, вершину можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
&V^0 = V(x,\ y,\ z)\,V(\vartheta,\ \xi,\ \lambda),\\
&V^1 = P(\sigma^a,\ \sigma^b)\,V(x,\ y,\ z)\,\widetilde{V}(\vartheta,\ \xi,\ \lambda).
\end{aligned}
$$

Здесь использовано выражение для $V(x,y,z)$, данное в формуле (1) работы [1]. В выражениях для $V(x,y,z)$ и $V(\vartheta,\xi,\lambda)$ пределы изменения σ совпадают, а оператор $P(\sigma^a,\sigma^b)$ переводит элементы из Θ^0 в Θ^1 и наоборот. Граничные условия контуров ϑ, ξ, λ, имеющих ненулевой индекс отображения, могут быть двух видов: $\xi(0)=\pm\xi(2\pi)$. Поэтому в определенной точке σ в выражении для вершины $\widetilde{V}(\vartheta,\xi,\lambda)$ попарно меняется знак величин ϑ, ξ, λ, т. е.

$$
\widetilde{V}(\vartheta,\ \xi,\ \lambda) = V(\vartheta,\ \widetilde{\xi},\ \widetilde{\lambda}) + V(\widetilde{\xi},\ \vartheta,\ \widetilde{\lambda}) + V(\widetilde{\xi},\ \widetilde{\vartheta},\ \lambda).
$$

3. Любой элемент кольца Θ_z не должен зависеть от введенной выше параметризации, т. е. должно выполняться условие

$$
(L_\sigma + G_\sigma)\begin{pmatrix} f(z(\sigma)) \\ h(z(\sigma)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (L'_\sigma + G'_\sigma)\,f(z(\sigma)) \\ (L''_\sigma + G''_\sigma)\,h(z(\sigma)) \end{pmatrix} = 0, \qquad (3)
$$

где L_σ' и L_σ'' — генераторы репараметризаций вдоль σ на Θ_z^0 и Θ_z^1 для $z(\sigma)$-координат, а G_σ', G_σ'' — то же самое для $\xi(\sigma)$-координат.

Введем теперь касательное пространство на U_α^0. Касательный вектор к поверхности $z(\sigma,\tau)$, $\vartheta(\sigma,\tau)$ аналогично [1] определим как производную по параметру:

$$
\begin{pmatrix} \partial f \\ \partial h \end{pmatrix} = \begin{cases} \lim\limits_{\tau\to\tau_0} \dfrac{f(z(\sigma,\ \tau),\ \vartheta(\sigma,\ \tau)) - f(z(\sigma,\ \tau_0),\ \vartheta(\sigma,\ \tau_0))}{\tau-\tau_0}, \\[2ex] \lim\limits_{\tau\to\tau_0} \dfrac{h(z(\sigma,\ \tau),\ \vartheta(\sigma,\ \tau)) - h(z(\sigma,\ \tau_0),\ \vartheta(\sigma,\ \tau_0))}{\tau-\tau_0}. \end{cases}
$$

Учитывая требование инвариантности касательного пространства относительно параметризации, выпишем общий вид дифференциальной формы на окрестности U_s^0:

$$
\Omega^0 = \begin{pmatrix} \omega \\ \widetilde{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega(z,\ c,\ \vartheta,\ \beta) \\ \widetilde{\omega}(z,\ c,\ \vartheta,\ \beta) \end{pmatrix},
$$

где β — коммутирующие величины, описывающие касательные дифференциалы в ϑ-направлении. Условие репараметризационной инвариантности для дифференциальных форм запишется так:

$$
d^0\Omega^0 = 0,
$$

где

$$
d^0 = L_\sigma^{(\pm)}\,c^{(\pm)}(\sigma) + G_s^{(\pm)}\,\beta^{(\pm)}(\sigma) + K + \widetilde{K}. \qquad (4)
$$

До сих пор не было необходимости в различиях RNS и GS-струны. Выбор дифференциала в виде (4) означает, что мы ограничиваемся рассмотрением RNS-струны.

Общий вид дифференциальной формы на окрестности $U_s{}^1$ (т. е. в первом приближении) определяется тремя парами переменных: z, ϑ; x, ξ; y, λ и запишется в виде

$$\Omega^1 = \{\Omega^0(z, \vartheta) + \Omega^0(x, \xi) + \Omega^0(y, \lambda)\},$$

а условие замкнутости, аналогично (4), примет вид

$$d^1\Omega^1 = d^0\Omega^0(z, \vartheta) + F_1(\Omega^0(x, \lambda), \Omega^0(y, \xi)) = 0, \tag{5}$$

где

$$F_1(\Omega^0) = F_1\begin{pmatrix}\omega\\ \tilde{\omega}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(\omega(x, \xi)) + \tilde{F}_1(\tilde{\omega}(x, \xi)) \\ \hat{F}_1(\tilde{\omega}(\xi, x)) + \tilde{F}_1(\omega(x, \xi)) \end{pmatrix} \tag{6}$$

— линейные функционалы на множестве касательных форм со значениями в множестве $T^*_{U^1/U^0}$ касательных форм $T^*_{U^0}$.

Учитывая разложение (2) пучков Θ при взаимодействии контуров и линейность функционалов F, перепишем (6) в виде

$$F(\Omega^0) = g\Phi * \Omega^0 = g\begin{pmatrix} \varphi * \omega + \tilde{\varphi} \bigstar \tilde{\omega} \\ \varphi \bigstar \tilde{\omega} + \tilde{\varphi} \bigstar \omega \end{pmatrix}.$$

Дифференциальная форма $\Phi = \begin{pmatrix}\varphi\\ \tilde{\varphi}\end{pmatrix}$ целиком определяется топологической структурой пространства M, поэтому будем трактовать ее как величину, описывающую струнное поле.

4. Полный дифференциал на окрестности $U_\alpha{}^s$ супермногообразия контуров будет иметь вид

$$d\Omega = d^0\Omega^0 + F_1(\Omega^0) + F_2(\Omega^0) + \ldots =$$

$$= d^0\begin{pmatrix}\omega\\ \tilde{\omega}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(\omega) + F_2(\omega) + \ldots + \tilde{F}_1(\tilde{\omega}) + \tilde{F}_2(\tilde{\omega}) + \ldots \\ \hat{F}_1(\tilde{\omega}) + \hat{F}_2(\tilde{\omega}) + \ldots + \tilde{F}_1(\omega) + \tilde{F}_2(\omega) + \ldots \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Такой вид дифференциала обусловлен тем, что мы с самого начала линеаризовали теорию и исследуем последовательные приближения по константе взаимодействия, при этом каждое приближение соответствует аппроксимации окрестности $U_\alpha{}^s$ касательным пространством с определенной степенью соприкосновения.

Как и в [1], потребуем нильпотентности дифференциала при условии замкнутости формы:

$$[d]^2\,\Omega = g\,(d\Phi) * \Omega^0,$$

$$[d]^2\,\Omega = [d^0]^2\,\Omega^0 + [d^0F_1(\Omega^0) + F_1(d^0\Omega^0) + F_1(F_1(\Omega^0))] +$$
$$+ [d^0F_2(\Omega^0) + F_2(d^0\Omega^0) + F_1(F_2(\Omega^0)) + F_2(F_1(\Omega^0))] + \ldots.$$

Собирая члены при одинаковых степенях константы g, получаем систему уравнений для функционалов F_i и дифференциала d^0:

$$\begin{cases} [d^0]^2 = 0, \\ d^0(\Phi * \Omega) + \Phi(d^0\Omega) + g\Phi * (\Phi * \Omega) = (d^0\Phi + g\Phi * \Phi) * \Omega, \\ d^0F_2(\Omega) + F_2(d^0\Omega) + \Phi * F_2(\Omega) + F_2(\Phi * \Omega) = F_2(\Phi) * \Omega. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{8}$$

Первое уравнение системы (8) есть условие нильпотентности нулевого порядка дифференциала.

Из второго уравнения получаем правила действия с функционалами:

$$\begin{aligned} &d^0(\Phi * \Omega) = (d^0\Phi) * \Omega - \Phi * d^0\Omega,\\ &\Phi * (\Phi * \Omega) = (\Phi * \Phi) * \Omega,\\ &\Phi * \Omega + \Omega * \Phi = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Отсюда получаем правила дифференцирования для четных и нечетных составляющих:

$$d^0(\varphi \bigstar \tilde\omega) = (d^0\varphi) \bigstar \tilde\omega - \varphi \bigstar d^0\tilde\omega,$$

$$d^0(\tilde\varphi \bigstar \tilde\omega) = (d^0\tilde\varphi) \bigstar \tilde\omega - \tilde\varphi \bigstar d^0\tilde\omega,$$

а также свойства ассоциативности для композиции функционалов:

$$(\varphi \bigstar \tilde\varphi) \bigstar \tilde\omega = \varphi * (\tilde\varphi \bigstar \tilde\omega);\ \tilde\varphi \bigstar (\tilde\varphi \bigstar \omega) = (\tilde\varphi \bigstar \tilde\varphi) * \omega,$$

$$\tilde\varphi \bigstar (\varphi \bigstar \tilde\omega) = (\tilde\varphi \bigstar \varphi) \bigstar \tilde\omega;\ \varphi * (\varphi * \omega) = (\varphi * \varphi) * \omega.$$

5. Для того чтобы разрешить третье уравнение системы, разобьем его на два уравнения:

$$\begin{cases} d^0F_2(\Omega) = -F_2(d^0\Omega),\\ \Phi * F_2(\Omega) = F_2(\Phi) * \Omega - F_2(\Phi * \Omega). \end{cases} \tag{10}$$

Так же, как и в [1], введем оператор дуального дифференцирования

$$\bar d d\Omega' = \Omega',\ d\bar d\Omega'' = \Omega'',\ [\bar d]^2\Omega = [\bar d\,\bar\Phi] \circ \Omega, \tag{11}$$

где

$$\bar d\Omega = \bar d^0\Omega^0 + \bar F_1(\Omega^0) + \bar F_2(\Omega^0) + \dots.$$

Раскрывая (11), получим систему уравнений для $\bar F$, аналогичную (8), и систему дополнительных к (8), (10) уравнений на F, $\bar F$. Так как алгебра функционалов Φ, Ω совпадает с алгеброй φ, ω в [1], то для F_2 получим аналогичное формуле (10) из работы [2] выражение

$$\begin{aligned} F_2(\Omega) = {} & g^2\{\bar d^0[\Phi * ((\bar d^0\Phi) \circ d^0\Omega)] - \Phi \circ \bar d^0(\Phi * \Omega)\} = \\ = {} & g^2\left\{ \bar d^0 \begin{pmatrix} \varphi * ((\bar d^0\varphi) \circ d^0\omega + (\bar d^0\tilde\varphi) \cdot d^0\tilde\omega) + \tilde\varphi \bigstar ((\bar d^0\varphi) \cdot d^0\tilde\omega + d^0\tilde\varphi \cdot d^0\tilde\omega) \\ \varphi \bigstar ((\bar d^0\varphi) \cdot d^0\tilde\omega + \bar d^0\tilde\varphi \cdot d^0\omega) + \tilde\varphi \bigstar ((\bar d^0\varphi) \circ d^0\omega + \bar d^0\tilde\varphi \cdot d^0\tilde\omega) \end{pmatrix} - \right. \\ & \left. - \begin{pmatrix} \varphi \circ (\bar d^0(\varphi * \omega) + \bar d^0(\tilde\varphi \bigstar \omega)) + \tilde\varphi \cdot (\bar d^0(\varphi \bigstar \tilde\omega) + \bar d^0(\tilde\varphi \bigstar \omega)) \\ \varphi \cdot (\bar d^0(\varphi \bigstar \tilde\omega) + \bar d^0(\tilde\varphi \bigstar \omega)) + \tilde\varphi \cdot (\bar d^0(\varphi * \omega) + \bar d^0(\tilde\varphi \bigstar \tilde\omega)) \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

6. Чтобы найти закон преобразования формы Φ при инфинитезимальном переходе от одной окрестности к другой, используем свойство инвариантности полного дифференциала относительно этих преобразований. В результате получим

$$\delta\Phi = d\Psi + g\Phi * \Psi + F_2(\Psi) + \dots, \tag{13}$$

где $\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \tilde\varphi \end{pmatrix}$ — инфинитезимальная функция перехода.

Уравнение (13) означает, что теория инвариантна относительно добавления точной формы $d\Psi$ к замкнутой форме Φ, т. е. что все решения геометрических уравнений — образующие первой группы когомологий пространства контуров. В частности, если $\Psi \in T^1_{U^1_\alpha}$, то в первом порядке преобразование будет выглядеть так:

$$\delta_1^{(1)}\Phi = \begin{pmatrix} \delta_1^{(1)}\varphi \\ \delta_1^{(1)}\tilde{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g\tilde{\varphi} \bigstar \tilde{\psi} \\ d^0\tilde{\psi} + g\varphi \bigstar \tilde{\varphi} \end{pmatrix}.$$

Скалярное произведение форм запишется так:

$$\langle \Phi, \Omega \rangle = \langle \varphi, \omega \rangle + \langle \tilde{\varphi}, \tilde{\omega} \rangle,$$

где $\langle \varphi, \omega \rangle$ описано в [1].

Действие в первом порядке, инвариантное относительно преобразования (13), выглядит следующим образом:

$$\Gamma_s^1 = \int \langle \Phi, d^0\Phi \rangle + \frac{2}{3} g \int \langle \Phi, \Phi * \Phi \rangle = \int \langle \varphi, d^0\varphi \rangle + \int \langle \tilde{\varphi}, d^0\tilde{\varphi} \rangle +$$
$$+ \frac{2}{3} g \left[\int \langle \varphi, \varphi * \varphi \rangle + \int \langle \varphi, \tilde{\varphi} \bigstar \tilde{\varphi} \rangle + \int \langle \tilde{\varphi}, \varphi \bigstar \tilde{\varphi} \rangle + \int \langle \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi} \bigstar \varphi \rangle \right]. \quad (14)$$

В заключение отметим одну из основных особенностей геометрической теории суперструн, описанной выше. Дело в том, что спектр безмассовых состояний суперструны в алгебраическом подходе представляет собой мультиплет супергравитации, а калибровочные поля со спином 1 появляются только в теории гетеротической струны. В изложенном здесь подходе поля со спином 1 с необходимостью появляются в безмассовом спектре. Действительно, теория взаимодействующих струн предполагает, что в параметрической окрестности $u_\alpha \subset R^N$ существуют «дырки» и состояния струн с ненулевым индексом кручения n_i. Поэтому состояния $\alpha_\mu^{-1} |n_i\rangle$, $\sum_i n_i^2 = 1$ будут безмассовыми со спином 1. При этом, используя разложение струны по модам, можно решить вопрос о локальной расщепимости: функционалы $f(z)$ на $U_\alpha{}^s$ — бесконечномерные тензорные поля $f(z_0, \alpha, \bar{\alpha}, \gamma, \bar{\gamma})$ на u_α, которые разлагаются в тензорное произведение $f_R \otimes f_L = f(z_0, \alpha, \gamma) \otimes f(z_0, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})$ и f_L является локально расщепимым суперполем, а f_R содержит индекс отображения n_i. Таким образом, нет необходимости рассматривать теорию гетеротической струны, так как суперструна в данном подходе уже является по сути гетеротической.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Нелипа Н. Ф., Пекар М. Ю.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. **32**, № 6. С. 18. [2] Нелипа Н. Ф., Пекар М. Ю.//Там же. 1992. **33**, № 1. С. 3. [3] Манин Ю. И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. М., 1984.

Поступила в редакцию
15.11.91