ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОГРУЖЕНИЯ ЗАДАННЫХ НА СФЕРЕ МЕТРИК ВРАЩЕНИЯ В ВИДЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ В E^4

А. В. Бадьин

(кафедра математики)

Исследуется вопрос о погружении метрики на S^2, которая в некоторой стереографической проекции имеет вид $ds^2=g(r)(dr^2+r^2d\varphi^2)$, в E^4 в виде поверхности вращения с полюсом. Обозначим полюсы O_1 и O_2. Установлено существование погружения в классе $C^1(S^2)\cap C^2(S^2\setminus(O_1\cup O_2))$. Для погружения в классе $C^2(S^2)$ даны необходимые и достаточные условия. Доказана изгибаемость полученных поверхностей в том же классе.

В настоящей статье исследуется вопрос о возможности изометрических погружений заданной на сфере метрики вида

$$g(r)(dr^2+r^2d\varphi^2) \qquad (1)$$

с отрицательной кривизной в полюсах в виде поверхности вращения в E^4. В E^3 это невозможно.

Возьмем в E^3 сферу со стереографической проекцией на некоторую плоскость. Пусть M — многообразие класса C^3, диффеоморфное сфере. В его координатный атлас войдут карты всех стереографических проекций сферы. Для краткости будем говорить о стереографической проекции M с полюсами O_1 и O_2 и картами 1 и 2. Точкам O_1 и O_2 соответствуют точки на сфере, прямую (O_1, O_2) будем называть осью проекции. Пусть g_{nm} — риманова метрика класса $C^2(M)$. Будем говорить, что g_{nm} — метрика вращения, если существует стереографическая проекция M такая, что в карте 1 в декартовых координатах $\{x, y\}$ с началом в O_1: $g_{nm}=g(\sqrt{x^2+y^2})\delta_{nm}$. Легко видеть, что в карте 2 в декартовых координатах с началом в O_2: $g_{nm}=\tilde{g}(\sqrt{x^2+y^2})\delta_{nm}$. Будем говорить, что $F: M\to E^4$ — погружение M в E^4 в виде поверхности вращения, если существует стереографическая проекция такая, что если $\{u, t\}$ — полярные координаты в карте 1 с началом в O_1, то существуют декартовы координаты $\{x^1, x^2, x^3, x^4\}$ в E^4 такие, что F определяется формулами

$$\begin{aligned} x^1&=r_1(u)\cos(\gamma_1 t+f_1(u)),\\ x^2&=r_1(u)\sin(\gamma_1 t+f_1(u)),\\ x^3&=r_2(u)\cos(\gamma_2 t+f_2(u)),\\ x^4&=r_2(u)\sin(\gamma_2 t+f_2(u)), \end{aligned} \qquad (2)$$

где $\gamma_1, \gamma_2\in N$; $r_1, r_2, f_1, f_2\in C^2[0, +\infty)$.

Пусть g_{nm} — метрика вращения с отрицательной кривизной в O_1 и O_2. Пусть существуют $g^{(k)}(0)$, $\tilde{g}^{(k)}(0)$, $k=\overline{1, 5}$. Тогда справедлива следующая

Теорема

1. Существует изометрическое погружение метрики g_{nm} в E^4 в классе $C^1(M)\cap C^2(M\setminus(O_1\cup O_2))$ в виде поверхности вращения.

2. В классе $C^2(M)$ необходимым условием существования изометрического погружения в виде поверхности вращения является требова-

ние $\forall u \in [0, +\infty)\,((\alpha(u)+1)^2 \leqslant 4)$, *а достаточным* — $\forall u \in [0, +\infty)\,((\alpha(u)+1)^2 < 4)$, *где* $\alpha(u) = \dfrac{ug'(u)}{2g(u)}$.

Доказательство. Докажем вспомогательное утверждение. Убедимся, что все проекции, в которых у нашей метрики в декартовых координатах $g_{11} = g_{11}(\sqrt{x^2+y^2})$, имеют одну ось. Очевидно, что $g(u) = \lambda(u) g_0(u)$, где $g_0(\sqrt{x^2+y^2})\delta_{nm}$ — метрика сферы. Так как $K(O_1) < 0$, то $\lambda \not\equiv \mathrm{const}$. Совершим переход к проекции с другой осью, в которой $g_{11} = g_{11}(\tilde{u})$ (это движение g_0): $\tilde{g}(\tilde{u}, \tilde{t}) = g_0(\tilde{u})\lambda(u(\tilde{u}, \tilde{t}))$. Однако $du/d\tilde{t} \neq 0$ для всех $\tilde{u}$ и почти всех $\tilde{t}$, а это противоречит условию $g_{11} = g_{11}(\tilde{u})$, что и доказывает наше утверждение. Тогда если искомое погружение F существует, то проекции, в которых метрика имеет вид (1), а F — вид (2), имеют общую ось. В этом случае переход от одной проекции к другой описывается формулами $\tilde{u} = \delta u$, $\tilde{t} = t$, где $\delta \in R^1$. При этом $\tilde{\alpha}(\tilde{u}) = \alpha(\tilde{u}/\delta)$. Поэтому если $(\alpha+1)^2 \leqslant 4$, то $(\tilde{\alpha}+1)^2 \leqslant 4$. Следовательно, для доказательства первой части пункта *2* теоремы достаточно показать, что если в некоторой проекции метрика имеет вид (1), а погружение — вид (2), то в этой проекции $(\alpha+1)^2 \leqslant 4$. Для доказательства пункта *1* и второй части пункта *2* достаточно взять некоторые декартовы координаты в E^4, некоторую проекцию с метрикой вида (1) и построить погружение вида (2).

Поставим задачу:

$$\{1\} \begin{cases} r_1,\ r_2,\ f_1,\ f_2 \in C^2[0, +\infty); \\ \forall u \in (0, +\infty)\ r_1'^2 + r_1'^2 + r_1^2 f_1'^2 + r_2^2 f_2'^2 = g, & (3) \\ \qquad \gamma_1^2 r_1^2 + \gamma_2^2 r_2^2 = gu^2, & (4) \\ \qquad \gamma_1 r_1^2 f_1' + \gamma_2 r_2^2 f_2' = 0; & (5) \\ \forall u \in [0, +\infty)\ (r_1(u) \geqslant 0 \wedge r_2(u) \geqslant 0). \end{cases}$$

Если в карте 1 перейти к декартовым координатам $\{x, y\}$, то $x^1(x, y)$, $x^2(x, y)$, $x^3(x, y)$, $x^4(x, y) \in C^2(R^2)$, и это же справедливо при переходе к декартовым координатам в карте 2. Если погружение существует, то задача $\{1\}$ имеет решение.

Очевидно, когда решение задачи $\{1\}$ существует, формулы (2) дают искомое погружение. Для погружения, которое мы построим, плоскость (X^1OX^2) окажется касательной к полученной поверхности в точке O_1. Пусть r_1, r_2, f_1, f_2 — решение задачи $\{1\}$, тогда для всех $u \in \{x : r_1^2(x) \neq gx^2/\gamma_1^2\}$ выполняются соотношения

$$r_2 = \frac{\sqrt{gu^2 - \gamma_1^2 r_1^2}}{|\gamma_2|}, \tag{6}$$

$$r_2' = \frac{(gu^2)' - 2\gamma_1^2 r_1 r_1'}{2|\gamma_2| \sqrt{gu^2 - \gamma_1^2 r_1^2}}. \tag{7}$$

Из (3)—(7) получаем

$$(\varepsilon_0 \sqrt{\gamma_2^2 (gu^2 - \gamma_1^2 r_1^2)(-4a\varphi - (gu^2)'^2)} + (gu^2)' \gamma_1^2 r_1)/2a = r_1',$$

где

$$a = \gamma_2^2 (gu^2 - \gamma_1^2 r_1^2) + \gamma_1^4 r_1^2;\ k = f_1'^2;\ \varphi = r_1^2 \{1 + \gamma_1^2 r_1^2/(gu^2 - \gamma_1^2 r_1^2)\}\, k - g;$$

$$\forall u\, (|\varepsilon_0(u)| = 1).$$

Введем замену $\xi_1 = r_1 |\gamma_1| / \sqrt{g}\, u$. Обозначим $\alpha = ug'/2g$. Тогда

$$\xi_1' u = \left\{ \varepsilon_\upsilon |\gamma_1|\, |\gamma_2| \sqrt{(1-\xi_1^2)\left(b\left[1 - \frac{ku^2\xi_1^2}{\gamma_1^2(1-\xi_1^2)}\right] - (\alpha+1)^2\right)} + \right.$$

$$\left. + (\alpha+1)\xi_1(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)(1-\xi_1^2) \right\} / b, \quad 0 \leqslant \xi_1 \leqslant 1, \tag{8}$$

где $b = \gamma_2^2(1-\xi_1^2) + \gamma_1^2\xi_1^2$. Пусть, к примеру, $\gamma_2^2 \leqslant \gamma_1^2$. Пусть $\exists u (\gamma_1^2 < (\alpha(u) + 1)^2)$, тогда в точке u равенство (8) выполняться не может, так как $b \leqslant \gamma_1^2 < (\alpha+1)^2$ и под корнем стоит отрицательная величина. Если в точке $u : r_1^2 = gu^2/\gamma_1^2$, процедуру можно повторить для r_2. Поэтому когда задача {1} имеет решение, $(\alpha+1)^2 \leqslant \gamma_1^2$.

Поставим задачу:

$$\{2\} \begin{cases} \xi_1 \in C^2[0, u_2], \; k \in C^1[0, u_2]; \\ \forall u \in (0, u_2)\; \xi_1' u = \left\{ (\alpha+1)\xi_1(1-\xi_1^2)(\gamma_1^2 - 1) - \right. \\ \left. - \varepsilon_0\gamma_1 \sqrt{(1-\xi_1^2)\left(b\left[1 - \frac{ku^2}{\gamma_1^2}\frac{\xi_1^2}{1-\xi_1^2}\right] - (\alpha+1)^2\right)} \right\} \frac{1}{b}; \\ \forall u \in [0, u_2]\,(0 \leqslant \xi_1(u) < 1 \wedge k(u) \geqslant 0), \\ \text{где } \gamma_1 \geqslant 2;\; |\varepsilon_0| = 1;\; \operatorname{sgn}\varepsilon_0 = \operatorname{sgn}(\alpha+1); \\ \xi_1(u_2) = \xi_0, \text{ где } \xi_0 \in [\bar{\xi}_0, 1),\; b = 1 + (\gamma_1^2 - 1)\xi_1^2. \end{cases}$$

Введем обозначение:

$$a = 1 - \frac{ku^2}{\gamma_1^2}\frac{\xi_1^2}{1-\xi_1^2}.$$

Покажем, что если $\gamma_1^2 > (\alpha+1)^2$, то для любого u_2 существует такое $\bar{\xi}_0$, что задача {2} имеет решение.

Возьмем некоторое $u_1 \in (0, u_2)$. Положим на $[0, u_1] : \xi_1 = \beta_1 u + \beta_3 u^3$. Обозначим $\xi_1' u = f$, тогда если существует решение, то можно выразить k через ξ_1 и f:

$$k = \frac{\gamma_1^2}{b\xi_1^2 u^2}\left\{ b(1-\xi_1^2) - f^2\frac{b^2}{\gamma_1^2} + 2f\xi_1(1-\xi_1^2)(\alpha+1)\frac{(\gamma_1^2-1)}{\gamma_1^2} b - \right. \tag{9}$$

$$\left. -\xi_1^2(1-\xi_1^2)^2(\alpha+1)^2\frac{(\gamma_1^2-1)^2}{\gamma_1^2} - (\alpha+1)^2(1-\xi_1^2) \right\}.$$

Разложим α по формуле Тейлора и затем подставим в (9) вместе с выражением для ξ_1. Коэффициент при члене порядка u^2 для выражения в фигурных скобках: $\beta_1^2(3 - 4/\gamma_1^2) - \alpha''(0)$, члены 0, 1 и 3-го порядков отсутствуют. Положим $\beta_1 = \sqrt{\alpha''(0)/(3-4/\gamma_1^2)}$, тогда, используя (9), получаем $k \in C^1[0, u_1]$. Члены порядка $u^4 : 2\beta_1\beta_3(\gamma_1^2 + 3 - 7/\gamma_1^2) + R$, где R — члены, не содержащие β_3. Так как $\gamma_1 \geqslant 2$, то $\gamma_1^2+3-\frac{7}{\gamma_1^2}>0$, поэтому верно утверждение: $\forall\gamma_1\, \exists u_1\, \exists\beta_3\, \forall u \in [0, u_1]\ (k>0)$, тогда $\sqrt{k} \in C^1[0, u_1]$. Легко видеть

$$\forall\gamma_1\, \forall\beta_3\, \exists u_1\, \forall u \in (0, u_1]\,(f-\xi_1(1-\xi_1^2)(\alpha+1)(\gamma_1^2-1)/b<0). \tag{10}$$

В этом случае из (9) следует, что уравнение задачи {2} превращается в тождество при подстановке $\xi_1=\beta_1 u+\beta_3 u^3$ и найденного k, значит, эти функции действительно являются решением задачи {2} на $[0, u_1]$ (без краевого условия).

Положим $\delta(u) \in C^2[0, u_2]$;

$$u\xi_1'=(\alpha+1)\,\xi_1\,(1-\xi_1^2)\,(\gamma_1^2-1-\delta)/b. \tag{11}$$

Если существует C^2 — гладкое решение (11), то должны выполняться соотношения

$$\frac{\delta\,(\alpha+1)\,\xi_1\,(1-\xi_1^2)}{b}=\frac{\varepsilon_0\gamma_1\sqrt{(1-\xi_1^2)\,(ab-(\alpha+1)^2)}}{b}, \tag{12}$$

$$\delta^2\,(\alpha+1)^2\,\xi_1^2\,\frac{(1-\xi_1^2)}{\gamma_1^2}=ab-(\alpha+1)^2. \tag{13}$$

Если $\delta(u)\geqslant 0$, то в силу выбора ε_0 из (13) следует (12). Выразим k:

$$k=\frac{\gamma_1^2\,(1-\xi_1^2)}{bu^2\xi_1^2}\left\{1+\xi_1^2\left(\gamma_1^2-1-\frac{(\alpha+1)^2}{\gamma_1^2}\,(1-\xi_1^2)\,\delta^2\right)-(\alpha+1)^2\right\}. \tag{14}$$

Пусть $\delta\equiv\gamma_1^2-1$ на $[u_1u_2]$. Так как $\gamma_1^2>(\alpha+1)^2$, то

$$\exists\bar{\xi}_0 \in (0,\ 1)\,\forall\xi_0 \in [\bar{\xi}_0,\ 1)\,\forall u \in [u_1,\ u_2]\,(k(u)>0),\ \xi_1\equiv\xi_0.$$

Значит, на $[u_1,\ u_2]$ ξ_0, k действительно являются решением задачи {2}. Рассмотрим некоторое $u_1^* \in (0,\ u_1)$ и $\delta(u)$: на $[u_1^*,\ u_1]$ $0\leqslant\delta\leqslant\gamma_1^2-1$. Существует u_1^* такое, что на $[u_1^*,\ u_1]$ существует решение (11) для всякого δ, удовлетворяющего указанным условиям. Тогда $u\xi_1'\leqslant(\alpha+1)\xi_1(1-\xi_1^2)(\gamma_1^2-1)/b$. Если использовать замену $t=-u$ и лемму Чаплыгина, то получим, что для всех $\delta:\xi_1\geqslant\bar{\xi}_1$, где $u\bar{\xi}_1=(\alpha+1)\bar{\xi}_1\,(1-\bar{\xi}_1^2)(\gamma_1^2-1)/b$. Тогда $\exists u_1^*\forall\delta\forall u \in [u_1^*,\ u_1](k(u)>0)$. Положим $\delta(u)\equiv 0$ на $[0,\ u_1^*]$. Можно считать u_1 столь малым, что $1<\alpha+1<2$. В этом случае в области существования решения уравнения (11) на $(0,\ u_1^*]$ должны выполняться соотношения $u\xi_1'\leqslant 2(\gamma_1^2-1)\xi_1$,

$$\xi_1\geqslant Cu^{2(\gamma_1^2-1)};\ u\xi_1'\geqslant\xi_1\frac{(1-\xi_1^2(u_1^*))\,(\gamma_1^2-1)}{1+(\gamma_1^2-1)\,\xi_1^2(u_1^*)};$$

$$\xi_1\leqslant\tilde{C}u^{\frac{(\gamma_1^2-1)\,(1-\xi_1^{*2})}{1+(\gamma_1^2-1)\,\xi_1^{*2}}}.$$

Тогда решение существует на $(0,\ u_1^*]$ и $\xi_1\to 0+0$ при $u\to 0+0$, откуда получаем, что $\exists\tilde{u} \in (0,\ u_1^*]\,((\gamma_1^2-1)(1-\xi_1^2)/[1+(\gamma_1^2-1)\xi_1^2]>1)$, следовательно, на $(0,\ \tilde{u}]$ $\xi_1\leqslant\bar{C}u^{1+\varepsilon}$, где $\varepsilon>0$. Тогда $\exists\bar{u} \in (0,\ u_1^*]\,(k(\bar{u})=0 \wedge \forall u \in (\bar{u},\ u_1^*]\,(k>0))$ — это следует из (14), и на $(\bar{u},\ u_1^*]$ ξ_1, k действительно являются решением задачи {2}. Однако на $[0, u_1^*]$ мы уже имеем решение в виде $\beta_1 u+\beta_3 u^3$, и его тоже можно представить как решение (11), причем из (12) следует, что соответствующее $\delta \geqslant 0$, поэтому из (14) $\xi_1(\bar{u}) < \beta_1\bar{u}+\beta_3\bar{u}^3$. Тогда $\exists u_0 \in (\bar{u}, u_1^*]\,(\xi_1(u_0)=\beta_1 u_0+\beta_3 u_0^3)$. Введем обозначения:

$$\xi_1^{(1)}=\beta_1 u+\beta_3 u^3;\ \xi_1^{(2)}=\xi_1;$$

$$\xi_1=\begin{cases}\xi_1^{(1)} \text{ на } [0, u_0],\\ \xi_1^{(2)} \text{ на } [u_0, u_2].\end{cases}$$

Вообще говоря, ξ_1' и k в точке u_0 испытывают скачок. Пусть сначала $\xi_{10}^{(2)'} > \xi_{10}^{(1)'}$. Можно показать, что для всякого $\varepsilon > 0$ существуют число $\mu > 0$ и функция $\Delta(u)$ со следующими свойствами: $\Delta \equiv 1$ вне $[u_0-\mu, u_0+\mu]$; $\|\Delta-1\|_{C[0,u_2]} \leqslant \varepsilon$, $\xi_1^{(1)'} \leqslant (\Delta\xi_1)' \leqslant \xi_1^{(2)'}$ на $[u_0-\mu, u_0+\mu]$; $\Delta\xi_1 \in C^2[0, u_2]$. Из (9) следует, что $k[\Delta\xi_1] \in C^1[0, u_2]$. Если ε достаточно мало, то, учитывая, что в (9) стоит квадратный трехчлен с переменной f с отрицательным первым коэффициентом, получаем, что найдутся μ и Δ такие, что $k[\Delta\xi_1] > 0$. Аналогично поступаем, если $\xi_1^{(2)'} < \xi_1^{(1)'}$. Если $\xi_{10}^{(2)'} = \xi_{10}^{(1)'}$, то требуем $\|\Delta-1\|_{C^1} \leqslant \varepsilon$ и тоже добиваемся сглаживания. Обозначим $\xi_1=\Delta\xi_1$, $k(u)=k[\Delta\xi_1](u)$, очевидно, ξ_1 и k—решение задачи {2} (условие, подобное условию (10), тоже легко проверяется).

Положим

$$f_1=\int_0^u \sqrt{k}\,dp;\ \xi_2=\sqrt{1-\xi_1^2};\ f_2=\int_0^u \frac{\xi_1^2}{\gamma_1^2\xi_2^2}\sqrt{k}\,dp,$$

тогда $r_1, r_2, f_1, f_2 \in C^2[0, u_2]$; это означает, что на $[0, u_2]$ существует решение задачи {1}. Сделаем в задаче {2} замену: $\tilde{u}=1/u$; $\tilde{\xi}_1(\tilde{u})=\xi_1(1/\tilde{u})$ (этот закон преобразования следует из определения ξ_1). Можно показать, что $\tilde{\xi}_1$ на $[1/u_2, +\infty)$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{u}\tilde{\xi}_1'=\frac{1}{b}\{\varepsilon_0\gamma_1\sqrt{(1-\tilde{\xi}_1^2)(ab-(\tilde{\alpha}+1)^2)}+\tilde{\xi}_1(1-\tilde{\xi}_1^2)(\tilde{\alpha}+1)(\gamma_1^2-1)\}.$$

Можно считать u_2 столь большим, что $\forall u \geqslant u_2/2$ $(\alpha+1 \leqslant 0)$ ($\alpha \to -2$ при $u \to +\infty$ это следует из теоремы Гаусса—Боннэ). Тогда $\varepsilon_0(u)=-1$ и $\tilde{\xi}_1$ на $[1/u_2, 2/u_2]$ удовлетворяет уравнению того же вида, что и ξ_1 на $[0, u_2]$. Аналогично можно построить $\tilde{\xi}_1$ на $[0, 1/u_2]$, причем $\tilde{\xi}_1 \in C^2[0, +\infty)$. Исследуем гладкость в полюсах в декартовых координатах *). Обозначим $z=x+iy \in Q$; $x^1+ix^2=\{Cu^2+o(u^2)\}\exp\{i\gamma_1 t\}=o(|z|)$; $x^1+ix^2 \in C^1(R^2)$, если $\gamma_1=2$, то $x^1+ix^2=Cz^2+o(|z|^2)$, тогда $x^1+ix^2 \in C^2(R^2)$. Если нас интересует класс $C^1(R^2)$, то $\exists\gamma_1(\forall u \in [0, u_2]\ ((\alpha+1)^2 < \gamma_1^2) \wedge \forall u \in [0, 1/u_2]\ ((\tilde{\alpha}+1)^2 < \gamma_1^2))$. Далее, $x^3+ix^4=\sqrt{g(0)}\,z+o(|z|^2)$, следовательно, $x^3+ix^4 \in C^2(R^2)$. Из уравнений погружения $g_{nm}\dfrac{\partial x^n}{\partial u^\alpha}\dfrac{\partial x^m}{\partial u^\beta}=G_{\alpha\beta}$ вытекает, что ранг отображения F максимален. Покажем необходимость условия $(\alpha+1)^2 \leqslant 4$ при поиске решения в классе $C^2(M)$. Из уравнений задачи {1} следует, что при некотором k $r_k'(0) \neq 0$. Например, пусть $r_2'(0) \neq 0$, тогда $x^3+i\,\mathrm{sgn}\,\gamma_2 x^4=r_2\exp\{i|\gamma_2|t+f_2\}=Cu\exp\{i|\gamma_2|t\}+o(|z|)$, где $C \in Q$, и

---

*) Здесь мы используем идею из работы [1].

так как $x^3+i\,\mathrm{sgn}\,\gamma_2 x^{4'}\in C^1(R^2)$, то $|\gamma_2|=1$. Проделаем замену r_1 на ξ_f сразу в задаче {1}. Получим

$$\xi_1^2+\xi_2^2=1,\ \frac{1}{\gamma_1^2}\{u\xi_1'+\xi_1(\alpha+1)\}^2+\frac{1}{\gamma_2^2}\{u\xi_2'+\xi_2(\alpha+1)\}^2+$$

$$+\frac{ku^2}{\gamma_1^2}\xi_1^2\left\{1+\frac{\xi_1^2}{\xi_2^2}\right\}=1.$$

При $u=0$ $\xi_1^2/\gamma_1^2+\xi_2^2=\xi_1^2+\xi_2^2$. Так как $K(0)<0$, то $\exists\varepsilon>0$ $\forall u\in(0,\varepsilon)$ $(\alpha>0)$, следовательно, $\gamma_1^2>1$ (в противном случае $\exists u((\alpha+1)^2>\max(\gamma_1^2,\gamma_2^2)))$. Тогда $\xi_1(0)=0$, это означает, что найдется $\varepsilon>0$ такое, что для всех u из $(0,\varepsilon]$ ξ_1 удовлетворяет уравнению задачи {2} (знак ε_0 не важен). Из того, что $r_1\in C^2[0,+\infty)$, следует, что $\xi_1\in C^1[0,+\infty)$. Используя разложение $\xi_1=\xi_1'(0)u+o(u)$ и повторяя вычисления для k, получаем $\xi_1'(0)>0$. Тогда $x^1+i\,\mathrm{sgn}\,\gamma_1 x^2=\{Cu^2+o(|z|^2)\}\exp\{i\,|\gamma_1|\,t\}$ и $|\gamma_1|=2$, но $(\alpha+1)^2\leqslant\gamma_1^2=4$.

Замечание. Произвол в выборе Δ означает, что построенная поверхность изгибаема в классе поверхностей вращения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Сабитов И. Х. // Сибирский математический журнал. 1989. **30**, № 5. С. 179.

Поступила в редакцию
26.04.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1992. Т. 33, № 2

ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

УДК 535.3

ПАРАМЕТРЫ ДЕФАЗИРОВКИ (ВРЕМЯ, ДЕКРЕМЕНТ, УГОЛ) И ИХ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ДАВЛЕНИЯ; ЭФФЕКТЫ ЗАМЕДЛЕНИЯ И УСКОРЕНИЯ ДЕФАЗИРОВКИ

Ю. Е. Дьяков

(*кафедра общей физики и волновых процессов*)

Развито детальное математическое описание времени дефазировки τ_{ph} как функции давления при различных моделях корреляции скоростей частиц. Вводятся новые параметры затухания поляризации — декремент m_{ph} и угол φ дефазировки — и рассматривается их зависимость от давления. Рассчитаны пороги появления характерных экстремумов (провала Дикке, пика функции τ_{ph} и т. п.) для различных веществ. Предложен «спектронный» метод измерения спектра затухания поляризации по одному лазерному выстрелу.

1. Зависимость ширины спектра $\Delta\omega$ от давления p, обусловленная доплеровским и столкновительным механизмами дефазировки, для одних сред может быть представлена в виде монотонно возрастающей кривой; для других — $\Delta\omega$ с ростом p сначала уменьшается (сужение Дикке), проходит через минимум (провал Дикке), а затем возрастает (рис. 1, *а*) (см., напр., [1, с. 18], [2, с. 89]). При этом оценка $\Delta\omega$ проводится по некоторому уровню $1-\varepsilon$ от основания спектра (рис. 1, *б*),