

так как $x^3 + i \operatorname{sgn} \gamma_2 x^4 \in C^1(R^2)$, то $|\gamma_2| = 1$. Проведем замену r_1 на ξ_1 сразу в задаче {1}. Получим

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1, \quad \frac{1}{\gamma_1^2} \{u \xi_1' + \xi_1 (\alpha + 1)\}^2 + \frac{1}{\gamma_2^2} \{u \xi_2' + \xi_2 (\alpha + 1)\}^2 + \frac{ku^2}{\gamma_1^2} \xi_1^2 \left\{ 1 + \frac{\xi_1^2}{\xi_2^2} \right\} = 1.$$

При $u=0$ $\xi_1^2/\gamma_1^2 + \xi_2^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$. Так как $K(0) < 0$, то $\exists \varepsilon > 0 \forall u \in (0, \varepsilon)$ ($\alpha > 0$), следовательно, $\gamma_1^2 > 1$ (в противном случае $\exists u ((\alpha + 1)^2 > \max(\gamma_1^2, \gamma_2^2))$). Тогда $\xi_1(0) = 0$, это означает, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для всех u из $(0, \varepsilon)$ ξ_1 удовлетворяет уравнению задачи {2} (знак ε_0 не важен). Из того, что $r_1 \in C^2[0, +\infty)$, следует, что $\xi_1 \in C^1[0, +\infty)$. Используя разложение $\xi_1 = \xi_1'(0)u + o(u)$ и повторяя вычисления для k , получаем $\xi_1'(0) > 0$. Тогда $x^3 + i \operatorname{sgn} \gamma_1 x^4 = \{Cu^2 + o(|z|^2)\} \exp\{i |\gamma_1| t\}$ и $|\gamma_1| = 2$, но $(\alpha + 1)^2 \leq \leq \gamma_1^2 = 4$.

Замечание. Произвол в выборе Δ означает, что построенная поверхность изгибаема в классе поверхностей вращения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Сабитов И. Х. // Сибирский математический журнал. 1989. 30, № 5. С. 179.

Поступила в редакцию
26.04.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1992. Т. 33, № 2

ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

УДК 535.3

ПАРАМЕТРЫ ДЕФАЗИРОВКИ (ВРЕМЯ, ДЕКРЕМЕНТ, УГОЛ) И ИХ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ДАВЛЕНИЯ; ЭФФЕКТЫ ЗАМЕДЛЕНИЯ И УСКОРЕНИЯ ДЕФАЗИРОВКИ

Ю. Е. Дьяков

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Развита детальное математическое описание времени дефазировки τ_{ph} как функции давления при различных моделях корреляции скоростей частиц. Вводятся новые параметры затухания поляризации — декремент m_{ph} и угол φ дефазировки — и рассматривается их зависимость от давления. Рассчитаны пороги появления характерных экстремумов (провала Дикке, пика функции τ_{ph} и т. п.) для различных веществ. Предложен «спектральный» метод измерения спектра затухания поляризации по одному лазерному выстрелу.

1. Зависимость ширины спектра $\Delta\omega$ от давления p , обусловленная доплеровским и столкновительным механизмами дефазировки, для одних сред может быть представлена в виде монотонно возрастающей кривой; для других — $\Delta\omega$ с ростом p сначала уменьшается (сужение Дикке), проходит через минимум (провал Дикке), а затем возрастает (рис. 1, а) (см., напр., [1, с. 18], [2, с. 89]). При этом оценка $\Delta\omega$ проводится по некоторому уровню $1-\varepsilon$ от основания спектра (рис. 1, б),

измеряемого методами стационарной спектроскопии; обычно выбирается $\varepsilon=0,5$.

В нестационарной спектроскопии наблюдается процесс, разворачивающийся во времени, — затухание интенсивности $\mathcal{I}(t)$ молекулярных колебаний, возбужденных достаточно коротким начальным импульсом поля (рис. 2). Быстрота спада кривой $\mathcal{I}(t)$ характеризует скорость дефазировки; количественно это можно оценить, введя время дефазировки τ_{ph} , соответствующее спаду \mathcal{I} в e^{-2m} раз, $m>0$ [3]. Вопрос о зависимости τ_{ph} от p исследовался в [3] (см. также [4, 5]).

В отличие от $\Delta\omega(p)$ функция $\tau_{ph}(p)$ даже для одного и того же вещества может иметь различный вид в зависимости от выбранного значения m (рис. 3). При $m < m_0$ (m_0 — не зависящий от давления параметр вещества — см. ниже) с ростом p величина τ_{ph} монотонно уменьшается. Таким образом, в этом случае при переходе к более высоким давлениям дефазировка ускоряется, поскольку для достижения уровня e^{-2m} требуется все меньшее время. Если же $m > m_0$, то вначале имеется участок подъема τ_{ph} (интервал $0 < p < p_1$ замедления дефазировки), затем функция $\tau_{ph}(p)$ проходит через максимум и в дальнейшем уменьшается (интервал $p > p_1$ ускорения дефазировки) (см. рис. 3).

Такая картина получается, когда учитываются два механизма дефазировки: доплеровский (доминирует на интервалах замедления) и столкновительный (доминирует на интервалах ускорения).

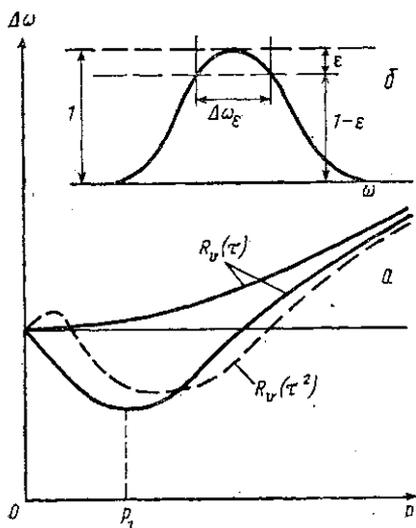


Рис. 1

Такая картина получается, когда учитываются два механизма дефазировки: доплеровский (доминирует на интервалах замедления) и столкновительный (доминирует на интервалах ускорения).

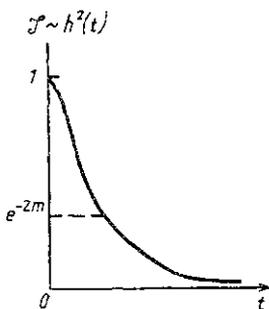


Рис. 2

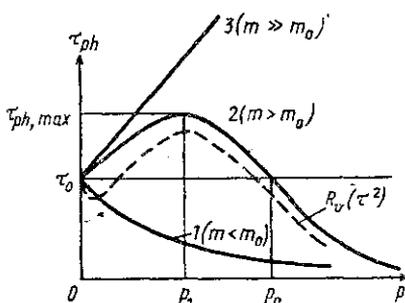


Рис. 3

2. Для описания затухания интенсивности молекулярных колебаний $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}(0)h^2(t)$ было получено выражение [3—5]

$$h(t) = e^{-L(t)}, \quad L(t) = \frac{t}{T_c} + k_0^2 \int_0^t (t-\tau) B_v(\tau) d\tau. \quad (1)$$

В (1) первый член описывает столкновительную дефазировку, второй — доплеровскую; T_c — время релаксации, связанное с изменением частоты излучения при столкновениях; $k_0 = \omega_0/c$ — волновое число молекулярных колебаний; $B_v(\tau) = \langle v_z v_{z,\tau} \rangle = \sigma_v^2 R(\tau/\tau_v)$ — корреляционная функция скорости частиц по направлению z распространения волн, $\sigma_v^2 = kT/\mu$ (k — постоянная Больцмана, T — температура, μ — масса частицы), $R(\tau/\tau_v)$ — коэффициент корреляции тепловых скоростей; соответствующее время корреляции τ_v определим соотношением

$$\tau_v = \int_0^{\infty} R(\tau/\tau_v) d\tau \quad \text{или} \quad \int_0^{\infty} R(x) dx = 1. \quad (2)$$

На основании (1) было впервые объяснено [3, 4] экспериментально наблюдаемое затухание молекулярных колебаний в газах по нелинейному экспоненциальному закону, при больших и малых t переходящему в линейный:

$$h(t \rightarrow 0) = \exp \left\{ -\frac{t}{T_c} - \frac{1}{2} v_0^2 t^2 \right\}, \quad h(t \rightarrow \infty) = \exp \left\{ -\frac{t}{T_2} + v_0^2 \tau_v^2 y_1 \right\} \quad (3)$$

$$\left(v_0 = k_0 \sigma_v, \quad \frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_c} + v_0^2 \tau_v, \quad y_1 = \int_0^{\infty} x R(x) dx \right).$$

В дальнейшем предполагается, что

$$\frac{1}{T_c} = \alpha \rho, \quad \frac{1}{\tau_v} = \beta \rho \quad \left(\gamma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{T_c}{\tau_v} = \text{const} \right), \quad (4)$$

где $\alpha, \beta > 0$. Выражение (1) можно переписать в виде

$$L(t) = y/\gamma + v_0^2 t^2 F(y) y^{-2} = y/\gamma + (v_0/\beta \rho)^2 F(y) \quad (5)$$

$$(y = t/\tau_v = \beta \rho t),$$

где

$$F(y) = \int_0^y (y-x) R(x) dx, \quad F(y) = \frac{1}{2} y^2 \quad (y \rightarrow 0), \quad y - y_1 \quad (y \rightarrow \infty). \quad (6)$$

Если теперь представить $R(x)$ в виде разложения

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n x^n \quad (R_0 = 1, R_1 \leq 0), \quad (7)$$

то получим

$$F(y) = y^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n y^n}{(n+1)(n+2)},$$

$$L(t) = \alpha \rho t + v_0^2 t^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n}{(n+1)(n+2)} (\beta \rho t)^n. \quad (8)$$

3. При обсуждении результатов [3] высказывалось мнение, что случай малых ε для функции $\Delta \omega_\varepsilon(\rho)$ является полным аналогом случая больших t для $\tau_{ph}(\rho)$, так что, уменьшая ε (т. е. измеряя ширину лишь

верхушки спектра), можно добиться появления провала Дикке у *любой* среды. Покажем, что это не так [6]. Обозначим через $\Delta\omega_\varepsilon$ ширину верхушки спектра $G(\omega) = \int_0^\infty h(t) \cos \omega t dt$ ($\varepsilon \ll 1$ — см. рис. 1, б). Очевидно, что с уменьшением ε величина $\Delta\omega_\varepsilon$ тоже уменьшается и для ее оценки можно использовать разложение

$$G(\omega) \approx G(0) - \frac{1}{2} \omega^2 \left. \frac{\partial^2 G}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=0}.$$

Полагая здесь $\omega = (1/2) \Delta\omega_\varepsilon$, $G(\omega)/G(0) = 1 - \varepsilon$, получим

$$\Delta\omega_\varepsilon = \sqrt{8\varepsilon / \langle \tau^2 \rangle}, \quad \langle \tau^2 \rangle = \int_0^\infty h(t) t^2 dt / \int_0^\infty h(t) dt. \quad (9)$$

От p в (9) может зависеть только параметр $\langle \tau^2 \rangle$, не связанный с ε . Таким образом, p и ε влияют на $\Delta\omega_\varepsilon$ независимо, т. е. изменения ε никак не сказываются на появлении или исчезновении провала Дикке. Как показано ниже, порог возникновения провала Дикке для $\Delta\omega_\varepsilon$ оказывается даже *выше*, чем для $\Delta\omega$, определенной по уровню $\varepsilon \approx 0,5$ (см. п. 8).

4. Согласно (1) время дефазировки τ_{ph} определяется соотношением

$$L(\tau_{ph}) = m. \quad (10)$$

Используя (5), уравнение (10) можно представить как

$$y/\gamma + v_0^2 \tau_{ph}^2 F(y) y^{-2} = m \quad (y = \tau_{ph}/\tau_v = \beta p \tau_{ph}) \quad (11)$$

или

$$y/\gamma + \left(\frac{v_0}{\beta p} \right)^2 F(y) = m. \quad (12)$$

Отсюда следует, что

$$\tau_{ph}(y) = \frac{y}{v_0} \sqrt{\frac{m - y/\gamma}{F(y)}}, \quad p(y) = \frac{v_0}{\beta} \sqrt{\frac{F(y)}{m - y/\gamma}}. \quad (13)$$

Как следует из (13), при $0 < p < \infty$ величина y меняется в пределах

$$0 < y < y_{\max}, \quad y_{\max} = m\gamma. \quad (14)$$

Учитывая (8), перепишем (11) в виде

$$\alpha p \tau_{ph} + v_0^2 \tau_{ph}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n}{(n+1)(n+2)} (\beta p \tau_{ph})^n = m. \quad (15)$$

Согласно (15) с точностью до членов первого порядка по p (т. е. в области малых давлений)

$$\tau_{ph}(p) = \tau_0 + \tau'_0 p, \quad (16)$$

где

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2m}}{v_0}, \quad \tau'_0 = \frac{\alpha}{v_0^2} (M-1), \quad M = \frac{m |R_1|}{3} \gamma \equiv \frac{m}{m_0}, \quad m_0 = \frac{3}{\gamma |R_1|}. \quad (17)$$

Кривым типа 2 и 3 на рис. 3 соответствует $\tau_0' > 0$, или согласно (17)

$$\gamma > \frac{3}{m |R_1|} \quad (\text{или } m > m_0, M > 1). \quad (18)$$

В обратном предельном случае больших давлений согласно (8) и (12)

$$y \rightarrow y_\infty = \beta \rho \tau_{ph} \approx m, \quad \tau_{ph} \approx \frac{m}{\alpha \rho} = m T_c. \quad (19)$$

5. Остановимся на некоторых частных моделях корреляции тепловых скоростей частиц.

1) Аналитическое выражение для $\tau_{ph}(p)$, справедливое при всех p , можно получить в случае $\beta=0$, когда действует только столкновительная дефазировка, а доплеровская — пренебрежимо мала. При этом $\tau_0 = \infty$, $\gamma=0$, $m_0 = \infty$, $M=0$, $y=0$,

$$R(x) = 1, \quad F(x) = (1/2) x^2, \quad (20)$$

и уравнение (7) принимает вид

$$\alpha \rho \tau_{ph} + (1/2) v_0^2 \tau_{ph}^2 = m,$$

откуда

$$\tau_{ph}(p) = \frac{\alpha \rho}{v_0^2} \left(\sqrt{1 + 2m \left(\frac{v_0}{\alpha \rho} \right)^2} - 1 \right). \quad (21)$$

Формула (21) согласуется с полученными ранее асимптотическими оценками (16) и (19). Ей соответствует кривая 1 на рис. 3.

2) Явный вид функции $\tau_{ph}(p)$ может быть также найден, если предположить, что [6]

$$R(x) = \frac{1}{(1 + |x/2|)^3}, \quad F(x) = \frac{x^2}{2 + x}, \quad R_1 = -3/2. \quad (22)$$

В этом случае $M = m\gamma/2$, $m_0 = 2/\gamma$, $y_{\max} = 2M$, уравнение (12) принимает вид

$$y + \frac{\lambda y^2}{2 + y} = m\gamma \quad \left(\lambda = \frac{v_0^2}{\alpha \beta \rho^2} \right)$$

и преобразуется в квадратное уравнение

$$(1 + \lambda) y^2 + (2 - m\gamma) y - 2m\gamma = 0, \quad (23)$$

из которого находим

$$y = \frac{m\gamma/2 - 1}{1 + \lambda} \pm \sqrt{\left(\frac{m\gamma/2 - 1}{1 + \lambda} \right)^2 + \frac{2m\gamma}{1 + \lambda}} > 0$$

или

$$\tau_{ph}(p) = \frac{m\gamma/2 - 1}{\beta \rho (1 + v_0^2/\alpha \beta \rho^2)} \left[1 \pm \sqrt{1 + 2m\gamma \frac{1 + v_0^2/\alpha \beta \rho^2}{(m\gamma/2 - 1)^2}} \right] > 0. \quad (24)$$

Согласно (24) при чисто доплеровской дефазировке ($\alpha=0, T_c=\infty$) функция $\tau_{ph}(p)$ монотонно возрастает:

$$\tau_{ph}(p)_{\alpha=0} = \frac{m\beta p}{2v_0^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{8v_0^2}{m\beta^2 p^2}} \right] \quad (25)$$

(рис. 3, кривая 3), а при чисто столкновительной ($\beta=0, \tau_v=\infty$) — монотонно уменьшается:

$$\tau_{ph}(p)_{\beta=0} = \frac{\alpha p}{2v_0^2} \left(\sqrt{1 + 8m \left(\frac{v_0}{\alpha p} \right)^2} - 1 \right), \quad (26)$$

как и в модели (20), но по другому закону — ср. (21) и (26) (рис. 3, кривая 1). «Ширину» p_0 пика τ_{ph} (см. рис. 3) найдем, полагая в (24) $\tau_{ph}=\tau_0=\sqrt{2m}/v_0$. В результате получим

$$p_0 = \frac{2}{\beta\tau_0} (M-1) = \left(\sqrt{M} + \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \frac{v_0}{\sqrt{\alpha\beta}},$$

$$y_0 = \beta p_0 \tau_0 = 2(M-1) = y_{\max} - 2. \quad (27)$$

Чтобы найти точку кривой $\tau_{ph}(p)$, в которой $\tau_{ph}=\tau_{ph, \max}$, $p=p_1$, можно было бы исследовать на максимум функцию (24). В рассматриваемом случае проще поступить иначе, так как из (23) нетрудно найти обратную функцию

$$p(\tau_{ph}) = \frac{M-1}{\beta\tau_{ph}} \pm \sqrt{\left(\frac{M-1}{\beta\tau_{ph}} \right)^2 - \frac{v_0^2 (\tau_{ph}^2 - \tau_0^2)}{\alpha\beta\tau_{ph}^2}}. \quad (28)$$

Оба давления, определяемые формулой (28), при $p=p_1$ должны, очевидно, совпадать. Поэтому, приравняв корень в (28) нулю, найдем

$$\tau_{ph, \max} (= \tau_1) = \frac{M+1}{v_0 \sqrt{\gamma}}, \quad p_1 = \frac{M-1}{M+1} \frac{v_0}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{M-1}{M+1} \frac{v_0 \sqrt{\gamma}}{\beta}. \quad (29)$$

Для относительного максимума отсюда получим

$$\kappa = \tau_{ph, \max}/\tau_0 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{M} + \frac{1}{\sqrt{M}} \right), \quad M = (\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1})^2. \quad (30)$$

3) Модель

$$R(x) = e^{-x}, \quad F(x) = x - 1 + e^{-x}, \quad R_1 = -1 \quad (31)$$

часто используется в спектроскопических расчетах [4, 7]. В [4] был сделан вывод, что экспериментальные данные, полученные методом нестационарной (пикосекундной) активной спектроскопии, лучше всего согласуются с моделью (31).

4) Случай

$$R(x) = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad F(x) = \sqrt{1+x^2} - 1, \quad R_1 = 0, \quad R_2 = -\frac{3}{2} \quad (32)$$

принципиально отличается от (22), (20) и (31) в том отношении, что R зависит не от x , а от x^2 , в разложении (13) $R_1=0$, т. е. полученный выше критерий (18) появления максимума у кривой $\tau_{ph}(p)$ здесь неприменим. Подробнее этот вопрос рассматривается ниже (п. 9). Заме-

тим, что модель (32) хорошо согласуется с экспериментальными значениями τ_{ph} для водорода (см. [5, рис. 5, 4]).

Подставив (32) в (12), получим уравнение

$$y/\gamma + \lambda (\sqrt{1+y^2}-1) = m, \quad \lambda = (v_0/\beta\rho)^2, \quad y = \beta\rho\tau_{ph},$$

которое приводится к квадратному:

$$(\lambda^2\gamma^2 - 1)u^2 + 2(\lambda + m)u - m(2\lambda + m) = 0 \quad (u = y/\gamma = \alpha\rho\tau_{ph}).$$

т. е.

$$\begin{aligned} \tau_{ph} &= \\ &= \frac{1}{\alpha\rho} \left[\sqrt{\left(\frac{\lambda+m}{\lambda^2\gamma^2-1}\right)^2 + \frac{m(2\lambda+m)}{\lambda^2\gamma^2-1}} - \frac{\lambda+m}{\lambda^2\gamma^2-1} \right] \left(\lambda\gamma > 1, \rho < \frac{v_0}{\sqrt{\alpha\beta}} \right), \\ &= \frac{m\sqrt{\gamma}}{2v_0} \frac{2+m\gamma}{1+m\gamma} \left(\lambda\gamma = 1, \rho = \frac{v_0}{\sqrt{\alpha\beta}} \right), \\ &= \frac{1}{\alpha\rho} \left[\frac{\lambda+m}{1-\lambda^2\gamma^2} - \sqrt{\left(\frac{\lambda+m}{\lambda^2\gamma^2-1}\right)^2 - \frac{m(2\lambda+m)}{1-\lambda^2\gamma^2}} \right] \left(\lambda\gamma < 1, \rho > \frac{v_0}{\sqrt{\alpha\beta}} \right). \end{aligned}$$

6. Рассмотрим некоторые варианты построения кривой $\tau_{ph}(\rho)$, используя приведенные в п. 4 формулы, определяющие функцию $\tau_{ph}(\rho)$ лишь в *неявном* виде.

1) Функция $R(x)$ и параметры α, β, v_0, m заданы. Сначала находим функцию $F(y)$, определенную интегралом (6). Затем для произвольного значения y_i из интервала (14) по формуле (13) находим, что $\tau_{ph, i} = \tau_{ph}(y_i)$, $\rho_i = y_i/\beta\tau_{ph, i}$. По найденным точкам $\tau_{ph, i}$ и ρ_i строим кривую $\tau_{ph}(\rho)$.

2) Исходные условия те же. Задаваясь опять значениями y_i , находим из формулы (13) величину ρ_i , а затем $\tau_i = y_i/\beta\rho_i$.

3) Параметры α, β, v_0 неизвестны, кривая $\tau_{ph}(\rho)$, соответствующая известному значению m , построена по экспериментальным точкам и имеет максимум $\tau_{ph, \max}$ при ρ_1 .

Итак, по τ_0 и m находим первую оценку: $v_0 = \sqrt{2m}/\tau_0$. Затем, выбрав ту или иную модель коэффициента корреляции $R(x)$ и определив соответствующую функцию $F(y)$, строим кривые (13)

$$\tau_{ph}(y) = \frac{y}{v_0} \sqrt{\frac{m-y/\gamma}{F(y)}} \quad (33)$$

при различных значениях γ , добиваясь совпадения $\tau_{ph, \max}$ с известным из эксперимента значением. Здесь существенно используется то обстоятельство, что функция $\tau_{ph}(\rho)$ имеет максимум, причем на величину этого пика не влияет, рассматривать ли τ_{ph} как функцию ρ или y . Пусть совпадение достигнуто при некоторых γ и y . Отсюда находим оценки для параметров α и β : $\beta = y/(\rho\tau_{ph, \max})$, $\alpha = \beta/\gamma$. Далее, используя найденные оценки, строим по точкам кривую $\tau_{ph}(\rho)$ согласно рассмотренным выше вариантам 1 или 2. Если полученная таким образом кривая τ_{ph} будет отличаться от экспериментальной, то расчет можно повторить, выбрав другую модель для $R(x)$.

Заметим, что при построении кривых (33) можно использовать как ориентирующую оценку для γ , вытекающую из модели (22).

А именно, оценив по экспериментальной кривой «контраст» $\kappa = \tau_{ph, \max} / \tau_0$, найдем

$$M = (\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1})^2, \quad \gamma = \frac{2M}{m}$$

(см. (17) и (30)).

7. Введем *декремент дефазировки* m_{ph} , определив его как коэффициент затухания поляризации за некоторое фиксированное время t . Согласно (1)

$$m_{ph} = L(\tau) = \frac{\tau}{T_c} + k_0^2 \int_0^{\tau} (\tau - \tau') B_c(\tau') d\tau'. \quad (34)$$

Зависимость m_{ph} от p находится по точкам пересечения кривых $L(\tau)$ с вертикальной прямой CD ; напомним, что зависимость τ_{ph} от p определялась по точкам пересечения тех же кривых с горизонтальной прямой AB (рис. 4). Обе функции τ_{ph} и m_{ph} зависят от одних и тех же параметров (α, β, v_0), т. е. в спектроскопическом плане они одинаково

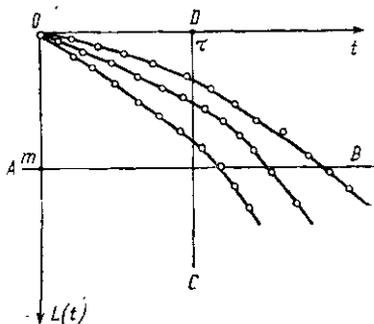


Рис. 4

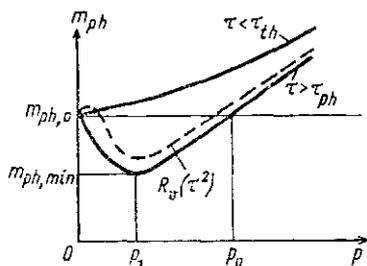


Рис. 5

информативны. Однако для оценки этих параметров функция m_{ph} удобнее, так как ее вид известен: согласно (34) и (7)

$$m_{ph}(p) = u/\gamma + 2m_{ph,0} F(u) u^{-2} = u/\gamma + 2m_{ph,0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n u^n}{(u+1)(n+2)}, \quad (35)$$

$$\left(u = \beta p \tau, \quad m_{ph,0} = m_{ph}(p=0) = \frac{1}{2} v_0^2 \tau^2 \right). \quad (36)$$

Иногда выражение (35) удобно писать в виде

$$n_{ph}(p) = u + 2n_0 F(u) u^{-2} = u + 2n_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n u^n}{(n+1)(n+2)} \quad (37)$$

$$(n_0 = \gamma m_{ph,0}), \quad (38)$$

введя нормированный декремент дефазировки $n_{ph}(p) = \gamma m_{ph}(p)$. В частности, при больших и малых давлениях

$$m_{ph}(p) = m_{ph,0} - (N^2 - 1) u/\gamma (p \rightarrow 0); \quad u/\gamma = \tau/T_c (p \rightarrow \infty), \quad (39)$$

где

$$N = \frac{\tau}{\tau_{th}} = \tau v_0 \sqrt{\frac{1}{6} |R_1| \gamma}, \quad \tau_{th} = \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{6}{|R_1| \gamma}}. \quad (40)$$

График функции $m_{ph}(p)$ напоминает график $\Delta\omega(p)$: величина m_{ph} либо возрастает с ростом p , либо сначала уменьшается, проходит через минимум (аналогичный провалу Дикке), а затем возрастает (рис. 5). Важно, однако, что в отличие от $\Delta\omega$ функцию $m_{ph}(p)$ с провалом можно получить для любого вещества, выбрав достаточно большой задержку τ :

$$\tau > \tau_{th} \text{ или } \gamma > \frac{6}{|R_1| (v_0 \tau)^2}. \quad (41)$$

Пример. В случае модели (22)

$$n_{ph}(p) = u + \frac{4N^2}{2+u} \left(u = \beta p \tau, \quad N = \frac{1}{2} \tau v_0 \sqrt{\gamma} \right). \quad (42)$$

Минимум функции (42) приходится на $u_1 = 2(N-1)$, т. е. на давление p_1 ,

$$p_1 = \frac{2(N-1)}{\beta \tau}, \quad n_{ph, \min} = 2(2N-1). \quad (43)$$

Ширина «провала» на уровне $n_{ph, 0}$ равна $p_0 = 2(N^2-1)/\beta \tau = (N+1)p_1$. Заметим, что согласно (42) и (43) при достаточно больших τ , т. е. при $N \gg 1$, или $(1/2)\tau v_0 \sqrt{\gamma} \gg 1$, или $\gamma \gg (2/\tau v_0)^2$, соответствующее $n_{ph, \min}$ давление p_1 перестает зависеть от τ :

$$p_1 = \frac{2}{\beta \tau} \left(\frac{1}{2} \tau v_0 \sqrt{\gamma} - 1 \right) \rightarrow \frac{v_0}{\sqrt{\alpha \beta}}.$$

Нетрудно убедиться, что на то же давление $v_0/\sqrt{\alpha \beta}$ при $m \gg m_0$ приходится и максимум времени дефазировки τ_{ph} .

Можно ввести также угол дефазировки φ , определяющий наклон прямой $-t/T_2 + v_0^2 \tau v^2 y_1$ к оси $v_0 t$ (рис. 6, а):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{v_0 T_2} = \frac{1}{v_0} \left(\frac{1}{T_c} + v_0^2 \tau v \right) = \frac{v_0}{\beta p} (1 + p^2/p_m^2).$$

С ростом p угол φ сначала уменьшается, а затем возрастает (рис. 6, б), принимая при давлении $p_m \approx p_1$ (см. рис. 1, а; 3; 5) минимальное значение:

$$\operatorname{tg} \varphi(p_m) = \operatorname{tg} \varphi_{\min} = \frac{2v_0}{\beta p_m} = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \left(p_m = \frac{v_0}{\sqrt{\alpha \beta}} \right).$$

Время $T_2 = (\alpha p + v_0^2/\beta p)^{-1} = \alpha^{-1} (p + p_m^2/p)^{-1}$, наоборот, при $p = p_m$ максимально: $T_2(p_m) = T_{2, \max} = \sqrt{\gamma/2} v_0$ (рис. 6, б). При $p \rightarrow 0$ и $p \rightarrow \infty$ величина T_2 стремится к нулю. Однако чем меньше p , тем на большем интервале времени затухание поляризации будет происходить по нелинейному экспоненциальному закону, т. е. при малых p время T_2 теряет смысл эффективного времени релаксации.

Заметим, что φ и φ_{\min} могут быть определены лишь при достаточно больших $t > \tau_v(\rho)$ (когда $L(t) \approx t/T_2 - v_0^2 \tau_v^2 y_1$). Характерные значения

$$t' = \tau_v(\rho_m) = \frac{1}{v_0 \sqrt{\gamma}}, \quad m' = \tau_v(\rho_m) v_0 \operatorname{tg} \varphi_{\min} = 2/\gamma$$

ограничивают, таким образом, «мертвую зону» (заштрихована на рис. 6, а), внутри которой экстремумы в зависимости $\Delta\omega$, τ_{ph} , m_{ph} и φ от ρ не возникают. Отсюда следует, например, что поскольку для формирования спектра необходимы затухания $m \sim 1$, то для появления провала Дикке должно быть выполнено условие $m' < 1$ или $\gamma > 2$. Аналогично, для максимума τ_{ph} необходимо, чтобы $m > m'$ или $\gamma > 2/m$, а для минимума m_{ph} $\tau > \tau'$ или $\gamma > (\tau v_0)^{-2}$. Эти оценки хорошо согласуются с точными выражениями для порогов появления экстремумов у параметров дефазировки (см. ниже).

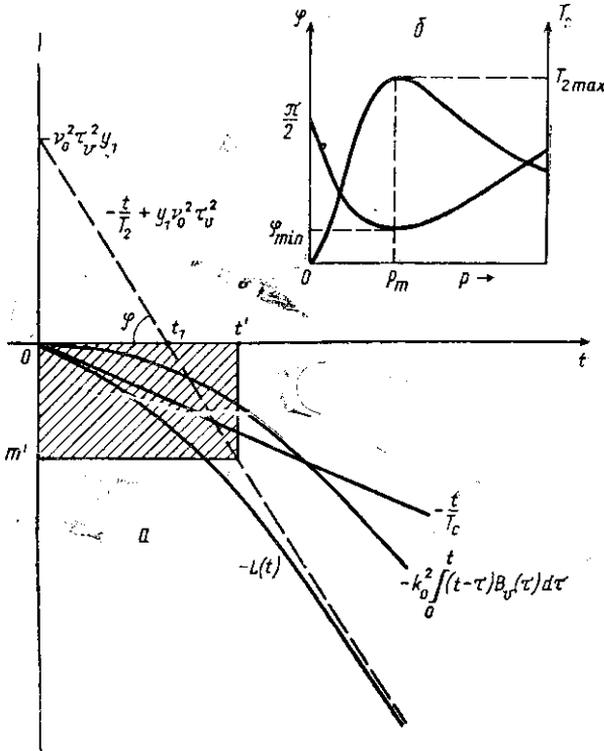


Рис. 6

8. Определим пороги возникновения провалов или пиков у следующих параметров:

$\Delta\omega_s'$ — интегральной ширины шумового спектра спонтанной поляризации;

$\Delta\omega_a'$ — интегральной ширины спектра активной поляризации, возбуждаемой монохроматическим полем или широкополосным шумовым полем;

$\Delta\omega_v$ — ширины верхушки спектра на уровне $1 - \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$ — см. (9);

τ_{ph} — времени дефазировки;

m_{ph} — декремента дефазировки.

Ширины спектров определяются выражениями (см. [5, с. 167] и (9))

$$\Delta\omega_s' = \pi/\tau_1, \quad \Delta\omega_a' = 2\pi\tau_2/\tau_1^2, \quad \Delta\omega_\varepsilon = \sqrt{2\varepsilon \langle \tau^2 \rangle^{-1}}, \quad (44)$$

где

$$\tau_1 = \int_0^\infty h(t) dt, \quad \tau_2 = \int_0^\infty h^2(t) dt, \quad \langle \tau^2 \rangle = \frac{1}{\tau_1} \int_0^\infty h(t) t^2 dt. \quad (45)$$

Для $h(t)$ можно написать (см. (1) и (8))

$$h(t) = \exp \left\{ -\alpha pt - v_0^2 t^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta pt)^n R_n}{(n+1)(n+2)} \right\}.$$

Рассмотрим область малых давлений. С точностью до членов первого порядка по p имеем

$$h(t) \approx \exp \left\{ -\frac{1}{2} v_0^2 t^2 \right\} \cdot \left(1 - \alpha pt - \frac{1}{6} v_0^3 \beta R_1 t^3 p + \dots \right). \quad (46)$$

Подставив (46) в (45) и (44), получим для области малых давлений (в скобках справа указаны условия появления характерных экстремумов)

$$\begin{aligned} \Delta\omega_s' &= \sqrt{2\pi} \left[v_0 + \frac{\alpha p}{\sqrt{\pi/2}} \left(1 + \frac{1}{3} R_1 \gamma \right) \right] && \left(\gamma > \frac{3}{|R_1|} \right), \\ \Delta\omega_a' &= 2\sqrt{\pi} \left[v_0 + \alpha p \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3} R_1 \gamma \frac{2\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{2}-1)} \right) \right] \\ &&& \left(\gamma > \frac{3}{|R_1|} \frac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}-1} \approx \frac{3}{|R_1|} \cdot 0,45 \right), \\ \Delta\omega_\varepsilon &= \sqrt{2\varepsilon} \left[v_0 + \frac{\alpha p}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{1}{6} R_1 \gamma \right) \right] && \left(\gamma > \frac{3}{|R_1|} \cdot 2 \right), \\ \tau_{ph} &= \tau_0 - \frac{\alpha p}{v_0^2} \left(1 + \frac{1}{3} m \gamma R_1 \right) && \left(\gamma > \frac{3}{|R_1|} \frac{1}{m} \right), \\ m_{ph} &= m_{ph,0} + \left(1 + \frac{1}{6} \gamma R_1 v_0^2 \tau^2 \right) \alpha p \tau && \left(\gamma > \frac{3}{|R_1|} \frac{2}{v_0^2 \tau^2} \right), \end{aligned} \quad (47)$$

(48)

где $\alpha p = T_c^{-1}$, $\gamma = \beta/\alpha = T_c/\tau_0$.

Эти результаты показывают, что для $\Delta\omega_s$ порог появления провала Дикке оказывается даже более высоким, чем для интегральных полос $\Delta\omega_s'$ и $\Delta\omega_a'$, соответствующих примерно $\varepsilon \approx 0,5$. Из формул (47) и (48) видно также, что в нестационарной спектроскопии пороговое значение γ может быть произвольно уменьшено подбором достаточно больших m или τ . Таким образом, пик функции $\tau_{ph}(p)$ и провал функции $m_{ph}(p)$ могут наблюдаться, в принципе, в любом веществе.

9. Как уже отмечалось в п. 5 (см. формулу (32) и ее обсуждение), случай $R(x) = R(x^2)$ требует специального рассмотрения. Оказывается, что при этом у кривых $\Delta\omega(p)$, $\tau_{ph}(p)$ и $m_{ph}(p)$ возникают дополнительные слабые экстремумы в области малых давлений (см. пунктирные кривые на рис. 1, 4, 5) [5].

Заметим, что зависимость коэффициента корреляции не от τ , а от τ^2 вполне допустима с точки зрения теории случайных процессов [8]. Более того, можно утверждать, что у всякого реального случайного процесса функция $R(\tau)$ должна иметь скругленную верхушку, т. е. должно быть $R_1=0$.

При $R(x)=R(x^2)$ имеем (см. (13) и (14))

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} R_{2n} x^{2n},$$

$$F(x) = \int_0^x (x-y) R(y) dy = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} R_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n+1)(2n+2)}.$$

В качестве примера рассмотрим вопрос о появлении добавочного экстремума (максимума) у декремента дефазировки. Выражение (35) примет теперь вид

$$n_{ph}(u) = u + 2n_0 F(u) u^{-2} = u + 2n_0 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{R_{2s} u^{4s}}{(2s+1)(2s+2)}. \quad (49)$$

Мы предположим (в дальнейшем это подтвердится), что искомый максимум лежит в области малых p . Удерживая в (49) члены не выше второго порядка по $u = \beta r \tau$, получим

$$n_{ph}(u) = n_0 + u - \frac{1}{6} n_0 |R_2| u^2, \quad (50)$$

откуда следует, что

$$n_{ph, \max} = n(u_2) = n_0 + \frac{1}{2} u_2, \quad u_2 = \frac{3}{n_0 |R_2|}, \quad (51)$$

или, переходя к m_{ph} и p ,

$$m_{ph, \max} = m_{ph,0} + \frac{3\beta}{|R_2| (\gamma v_0 \tau)^2}, \quad p_2 = \frac{6\alpha}{|R_2| (\gamma v_0 \tau)^2} \quad \left(m_{ph,0} = \frac{1}{2} v_0^2 \tau^2 \right).$$

Давление p_2 естественно сравнить с давлением p_1 , при котором функции $m_{ph}(p)$ и $n_{ph}(u)$ имеют минимум, аналогичный провалу Дикке. Однако ни условия появления провала, ни величина p_1 в общем случае неизвестны. В связи с этим обратимся к модели дефазировки (32). В этом случае (49) принимает замкнутый вид

$$n_{ph}(u) = u + 2n_0 \frac{\sqrt{1+u^2} - 1}{u^2}. \quad (52)$$

Если кривая (52) имеет минимум при $u=u_1$ и положительную производную при $u=0$ (см. (50)), то она должна пересекать начальный уровень n_0 по крайней мере в трех точках:

$$u=0, \quad u=u'_0 < u_1, \quad u=u_0 > u_1 \quad (u_1 = \rho_1 \beta \tau). \quad (53)$$

Оценим положение этих точек. Полагая в (52) $n_{ph}=n_0$, после некоторых преобразований приходим к кубическому уравнению $v(1-v)^2 = \varepsilon$, $v = u/n_0$, $\varepsilon = 4/n_0^2$. Это уравнение эквивалентно уравнению $\omega^3 + p\omega + q = 0$ ($\omega = v - 2/3$, $p = -1/3$, $q = 2/27 - \varepsilon$) с дискриминантом $D = (p/3)^3 + (q/2)^2 = -4\varepsilon(\varepsilon - 1/(4 \cdot 27))$.

Как известно, действительным корням кубического уравнения соответствует $D < 0$. Следовательно, в рассматриваемом случае должно быть

$$\varepsilon < 1/(4 \cdot 27), \quad (54)$$

или $n_0 > 12\sqrt{3}$.

Так как согласно (54) параметр ε можно считать малым ($\varepsilon \ll 1$), то из приведенного выше уравнения для v находим $v'_c \approx \varepsilon$, $v_0 \approx 1 - \sqrt{\varepsilon} \gg v'_0$ и

$$u'_0 \approx 4/n_0, \quad u \approx n_0 - 2 \gg u'_0. \quad (55)$$

Мы показали, таким образом, что максимум функции $n_{ph}(u)$ приходится на малые u («ширина» максимума равна $u'_0 = 4/n_0 \ll 1$). Это оправдывает полученные ранее оценки (51), которые в случае (52) принимают вид

$$n_{ph, \max} = n_0 + 1/n_0, \quad u_2 = 2/n_0.$$

Максимум, однако, является слабым:

$$n_{ph, \max}/n_0 - 1 = 1/n_0^2 \leq 2,6 \cdot 10^{-3},$$

и его, по-видимому, трудно зафиксировать экспериментально.

10. Основные результаты изложенной выше теории — описание сигнала, наблюдаемого в нестационарной активной спектроскопии (КАРС), зависимость времени дефазировки от давления — были экспериментально подтверждены в [4]. В установке (рис. 7) использовались при этом короткие (пикосекундные) оптические импульсы на частотах ω_1 , $\omega_2 = \omega_1 + \omega_0$ (ω_0 — частота молекулярных колебаний) и с запаздыванием на τ — на пробной частоте ω_{p1} . Выходной сигнал, пропорциональный $h(t)$, наблюдался на антистоксовой частоте $\omega_{a1} = \omega_{p1} + \omega_0$. Будем называть это первым каналом системы.

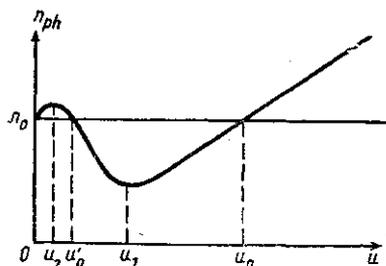


Рис. 7

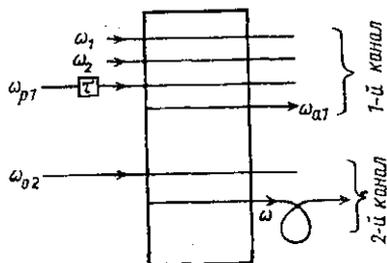


Рис. 8

Представляется интересным, никак не нарушая действие первого канала, дополнить установку вторым каналом, пропуская через вещество еще одну пробную волну — непрерывное излучение на некоторой второй пробной частоте ω_{p2} (рис. 8). На выходе кюветы, например на второй антистоксовой или стоксовой частоте $\omega = \omega_{p2} \pm \omega_0$, будет при этом формироваться длинный импульс с огибающей, пропорциональной $h(t)$, повторяющий по форме импульс затухающих молекулярных колебаний. Если затем этот импульс пропустить через световод, заполненный диспергирующей средой (например, через оптическое волокно), то, пройдя

достаточно большое расстояние, импульс испытывает преобразование Фурье и трансформируется в «спектрон» — импульс, огибающая которого повторяет частотный спектр первичного импульса [3, 5].

В результате возникает возможность в одной установке наблюдать функцию $h(t)$ как в стробированном виде (по первому каналу $h(t)$, $\tau = \tau_1, \tau_2, \dots$), так и в «натуральном» виде (начало второго канала), вместе с временной разверткой ее спектра (конец второго канала). В такой системе, следовательно, можно одновременно измерять время τ_{ph} и декремент m_{ph} дефазировки, ширину спектра $\Delta\omega$ и наблюдать сам спектр при различных давлениях в кювете — все на основе *нестационарной* спектроскопии [6]. С последним обстоятельством связана и еще одна особенность предлагаемого второго канала: для измерения спектра достаточно в принципе одного лазерного выстрела.

В заключение отметим, что второй канал может работать и при частично отключенном первом, а именно при выключенных генерации импульсов на первой пробной частоте ω_{p1} и линии задержки τ .

Импульсу длительности τ соответствуют дисперсионные длины $l_n = \tau^n / k_n$ ($k_n = \partial^n k / \partial \omega^n \sim 2 \cdot 10^3$ (фс)ⁿ/см в диапазоне $\lambda \sim 1$ мкм), и условие формирования неискаженного спектра на длине l можно написать в виде $l_2 \ll l \ll l_3$. Оценивая τ как $T_{2, \max} = T_2(\rho_m) = \sqrt{\gamma} / 2v_0$ или как $\tau_{ph, \max} = \frac{M+1}{v_0 \sqrt{\gamma}} \approx \frac{M}{v_0 \sqrt{\gamma}} = \frac{\sqrt{\gamma}}{2v_0} \frac{2m|R_1|}{3}$, получим в случае газообразного водорода ($\gamma = 64$, $v_0 = 3 \cdot 10^9$ с⁻¹) $\tau \approx 1$ нс, $l_2 \approx 5 \cdot 10^8$ см, $l_3 \approx 5 \cdot 10^{14}$ см. Таким образом, эффективная длина оптического волокна должна быть порядка $l > 5 \cdot 10^8$ км.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ахманов С. А., Коротеев Н. И. Методы нелинейной оптики в спектроскопии рассеяния света. М., 1981. [2] Демтрёдер В. Лазерная спектроскопия. М., 1985. [3] Дьяков Ю. Е. // Письма в ЖЭТФ. 1983. 37, № 1. С. 14. [4] Дьяков Ю. Е., Крикунов С. А., Магницкий С. А. и др. // ЖЭТФ. 1983. 84, № 6. С. 2013. [5] Дьяков Ю. Е., Никитин С. Ю. Задачи по статистической радиофизике и оптике. М., 1985. [6] Дьяков Ю. Е. // Лазеры в народном хозяйстве (Материалы семинара. Общество «Знание» РСФСР). М., 1991. С. 99. [7] Раутиан С. Г., Собельман И. И. // УФН, 1966. 90, № 2. С. 209. [8] Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М., 1981.

Поступила в редакцию
20.09.91