Согласно [16] r_{uv} есть функция относительной величины L/H, где L — линейные размеры вихрей, соответствующие величине полного гидравлического радиуса. Следовательно, соотношение (12) справедливо в плоских потоках.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ротта Ю. Х.//Турбулентные сдвиговые течения. М., 1982. Т. 1. С. 279. [2] Петров В. П., Петрова М. А.//Тр. III Всесоюз. гидрологич. съезда. Л., 1969. Т. 5. С. 18. [3] Щевьев Ю. Л. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М. (МГУ), 1980. [4] Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow: NASA Rep. N 1174. 1954. [5] Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М., 1968. [6] Klebanoff P. S.//Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes. 1954. N 3178. P. 1124. [7] Шаубер Р.//Механика жидкости и газа. 1954. 25, № 2. С. 102. [8] Никитин И. К. Турбулентный русловой поток и процессы в придонной области. Киев, 1982. [9] Щевьев Ю. Л., Петров В. П. Деп. ВИНИТИ № 4270-81. М., 1981. [10] Гочаров В. Н. Основы динамики русловых потоков. Л., 1962. [11] Платонов В. А., Щевьев Ю. Л.//Сб. научн. трудов НПО «ВНИИФТРИ». М., 1990. С. 62. [12] Щевьев Ю. Л. Деп. ВИНИТИ № 1691-В86. М., 1986. [13] Сугрей В. И. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М. (МГУ), 1986. [14] Фидман Б. А.//Изв. АН СССР, сер. геофиз. 1950. 14, № 3. С. 26. [15] Минский Е. М.//Тр. ЦАГИ. 1947. № 625. С. 27. [16] Рейнольдс А. Дж. Турбулентные течения в инженерных приложениях. М., 1979. [17] Клавен А. Б., Копалиани З. Д.//Тр. Гос. гидрологич. ин-та. 1973. № 212. С. 79.

Поступила в редакцию
03.06.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1992. Т. 33, № 2

АСТРОНОМИЯ

УДК 521.1

ПОСТНЬЮТОНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В РТГ С УЧЕТОМ ГАЛАКТИЧЕСКОГО ВРАЩЕНИЯ

А. А. Власов

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Показано, как учет неинерциальности системы координат, испытывающей галактическое вращение, отражается на постньютоновской физике тел Солнечной системы.

В стандартном постньютоновском рассмотрении гравитационных эффектов в Солнечной системе предполагается, что используемая система координат, связанная с центром Солнца (гелиоцентрическая), является инерциальной. Другими словами, неинерциальными эффектами, вызванными движением Солнечной системы вместе с другими близлежащими звездами Местной системы вокруг центра Галактики, пренебрегают (см., напр., [1, 2]). Мы рассмотрим проблему неинерциальности, предполагая, что Солнечная система движется как целое по круговой орбите вокруг центра Галактики по закону Ньютона. Исходя из этого, мы рассчитаем поправки к постньютоновским траекториям планет (считая их в постньютоновском приближении точками) вокруг Солнца и вычислим соответствующие им наблюдательные проявления. Отметим, что замечания о необходимости учета неинерциальных эффектов при рассмотрении постньютоновского формализма в Солнечной системе высказывались давно (см., напр., работу [3] и цитируемую в ней литературу), однако конкретный расчет соответствующих эффектов с учетом неинерциональной в литературе до сих пор отсутствовал. Во избежание недоразумений сразу подчеркнем, что оси используемой нами неинерциальной системы не фиксированы относительно инерциальной системы координат, а испытывают некоторое вращение (см. ниже).

Введем инерциальную декартову систему координат (X, Y, Z) с началом в центре Галактики и осью Z, сонаправленной с вектором вращения Солнечной системы по круговой орбите.

Введем систему координат (x, y, z) с началом в центре масс Солнечной системы (т. е. практически в центре Солнца) так, что ось z совпадает по направлению с осью Z, ось x направлена по радиусу круговой орбиты Солнечной системы, ось y — по касательной к круговой орбите.

Пусть R_0 — радиус орбиты, M — эффективная масса Галактики, сосредоточенная в нашем рассмотрении в начале инерциальной системы координат, тогда угловая скорость вращения по круговой орбите w равна

$$w^2 = M/R_0^3.$$

Связь между координатами (X, Y, Z) и (x, y, z) определяется из геометрических соображений:

$$\begin{aligned} X &= (R_0 + x)\cos(wt) - y\sin(wt), \\ Y &= (R_0 + x)\sin(wt) + y\cos(wt), \\ Z &= z. \end{aligned} \tag{1}$$

Будем считать, что планеты Солнечной системы движутся как пробные тела по геодезическим суммарного искривленного пространства-времени, т. е. описываются уравнениями

$$G^i = \frac{d^2X^i}{ds^2} = -\Gamma^i_{mn}\frac{dX^m}{ds}\frac{dX^n}{ds}. \tag{2}$$

Метрика g_{ij} в (2) определяется как гравитационным полем движущегося по круговой орбите Солнца, так и гравитационным полем Галактики и подчиняется уравнениям РТГ:

$$\begin{aligned} R_{ij} - g_{ij}R/2 &= 8\pi T_{ij}, \\ D_j(\sqrt{-g}\,g^{ij}) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь D — ковариантная по метрике плоского пространства γ_{ij} производная, $\gamma_{ij}(t, X, Y, Z) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$.

В постньютоновском приближении решением уравнений (3) являются (здесь мы конкретизируем для нашей задачи общий вид постньютоновской метрики РТГ, полученный в [1]):

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 - 2m/r(1 - (2V^2 + (\mathbf{r}\mathbf{V}/r)^2)/2) - 2M/R + 2(m/r)^2 + 2(M/R)^2, \\ g_{0\alpha} &= 4m\mathbf{V}_\alpha/r, \\ g_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta}(1 + 2m/r + 2M/R), \end{aligned} \tag{4}$$

здесь m — сохраняющаяся масса; $\mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_0$; $\mathbf{R}_0 = (R_0\cos(wt),\ R_0\sin(wt),\ 0)$, $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$, $\mathbf{V} = (-R_0 w\sin(wt),\ R_0 w\cos(wt),\ 0)$, и входящие в (4) величины имеют следующий порядок малости [4]:

$$m/r \approx 10^{-6} \div 10^{-8},\quad M/R \approx w^2R^2 \approx 10^{-6},\quad r/R_0 \approx 10^{-9}. \tag{5}$$

Подставив (4) в уравнения геодезических (2), мы найдем ускорения G^i, затем, переходя от координат (X, Y, Z) к координатам (x, y, z) по формулам (1), найдем ускорения $g^i = d^2x^i/ds^2 \cdot (dt/ds)^{-2}$ и, используя условие $\omega t \ll 1$ ($\omega \approx 10^{-15}$ с$^{-1}$), оставим в g^i члены только ньютоновского (~ 1 см/с^2) и постньютоновского ($\sim 10^{-8}$ см/с^2) порядка. При этом так как при $z=0$ и $dz/dt=0$ оказывается справедливым $G^3=0$, то движение пробных тел не будет выходить из плоскости $z=0$. Поэтому в дальнейшем мы будем ограничиваться случаем движения в плоскости $z=0$.

Итак, получаем:

$$
\begin{aligned}
g_x &= \frac{xm}{r^3}\left[-1+\frac{4m}{r}+6V_c^2+2V_c v_x+3v_x^2-v_y^2+\frac{3}{2}V_c^2\frac{y^2}{r^2}\right]+\\
&+\frac{ym}{r^3}\left[V_c v_x+4v_x v_y\right]+\frac{2V_c v_y}{R_0},\\
g_y &= \frac{ym}{r^3}\left[-1+\frac{4m}{r}+6V_c^2+3V_c v_x+3v_y^2-v_x^2+\frac{3}{2}V_c^2\frac{y^2}{r^2}\right]+\\
&+\frac{xm}{r^3}\left[4v_x v_y\right]-\frac{2V_c v_x}{R_0},\\
V_c &= \omega R_0,\quad v_x = dx/dt,\quad v_y = dy/dt.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Рассмотрим некоторые следствия соотношений (6).

Аномальное смещение W перигелия планеты, движущейся в ньютоновском приближении по эллиптической орбите с эксцентриситетом e, сохраняющимся моментом вращения $h=(mp)^{1/2}$ и параметром орбиты p, определяется из уравнения [5]

$$
\frac{dW}{dt} = -\frac{p}{he}A_{\parallel}\cos f+\frac{p+r}{he}A_{\perp}\sin f,
\tag{7}
$$

где $A_{\parallel}$ и $A_{\perp}$ — соответственно параллельная и перпендикулярная к вектору касательной к траектории движения компоненты ускорения:

$$
\begin{aligned}
A_{\parallel} &= g_x\cos f+g_y\sin f,\\
A_{\perp} &= -g_x\sin f+g_y\cos f,\\
r &= p/(1+e\cos f),\\
x &= r\cos f,\\
y &= r\sin f,\\
r^2\frac{df}{dt} &= h.
\end{aligned}
$$

Явные выражения для величин $A_{\parallel}$ и $A_{\perp}$ следующие:

$$
\begin{aligned}
A_{\perp} &= \frac{h\sin f}{p^4}\left[4ehm(1+e\cos f)^3-\frac{2ep}{R_0}V_c+mpV_c(1+e\cos f)^3\right],\\
A_{\parallel} &= \cos^2 f\frac{m}{p^4}(1+e\cos f)^2\left[3e^2h^2+3ehpV_c+3p^2V_c^2/2\right]+\\
&+2\cos f\frac{hm}{p^3}V_c(1+e\cos f)^3+\frac{(1+e\cos f)}{p^4}\times
\end{aligned}
$$

$$\times\Big[-3e^2h^2m(1+e\cos f)-3ehmpV_c(1+e\cos f)+h^2m(1+e\cos f)^3-$$
$$-2\frac{hp^3V_c}{R_0}-4m^*p^2(1+e\cos f)^2-6mp^2V_c^2(1+e\cos f)+$$
$$+m^*p^2(1+e\cos f)\Big]. \qquad (8)$$

Подставляя в (7) результат (6), получаем:

$$\frac{dW}{dt}=\cos^3 f\left(\frac{3e}{p}+\frac{3pV_c^2}{2eh^2}+\frac{3V_c}{h}\right)+\cos^2 f\Big(-\frac{3mV_c(1+3\cos f)}{eh}-\frac{mV_c}{eh}+$$
$$+\frac{2p^2V_c}{hR_0(1+e\cos f)^2}+\frac{2p^2V_c}{hR_0(1+e\cos f)^3}-\frac{4m^*(1+e\cos f)}{p}-\frac{4m^*}{p}\Big)+$$
$$+\cos f\Big(-\frac{3em}{p}-\frac{2p^2V_c}{ehR_0(1+e\cos f)}-\frac{4m^2(1+e\cos f)}{eh^2}-\frac{6pV_c^2}{eh^2}+\frac{mp}{eh^2}+$$
$$+\frac{m(1+e\cos c)^2}{ep}-\frac{3mV_c}{h}\Big)+\frac{mV_c(1+3\cos f)}{eh}+\frac{mV_c}{eh}-$$
$$-\frac{2p^2V_c}{hR_0(1+e\cos f)^2}-\frac{2p^2V_c}{hR_0(1+e\cos f)^3}+\frac{4m^*(1+e\cos f)}{p}+\frac{4m^*}{p} \qquad (9)$$

(здесь введена масса $m^*=m(1-3/2V_c^2)$).

Интегрируя (9) по орбите движения, получаем следующее значение для аномального смещения перигелия с учетом галактического вращения Солнечной системы:

$$dW=\frac{m\pi}{p}\left[6+\frac{whp^2}{m^2}k\right], \qquad (10)$$

$$k=-\frac{2}{(1-e^2)^{3/2}}.$$

Аномальное смещение (10) при $w=0$ совпадает со стандартным постньютоновским значением для аномального смещения в РТГ [1], но при учете вращения отличается от него. Интересно отметить, что ненулевой интегральный вклад в дополнительное к аномальному смещение (второе слагаемое в (10)) дают только кориолисовы члены (последние слагаемые в (6)), остальные же члены (6) дают в интегральное выражение (10) нулевой вклад.

Величина дополнительного к аномальному смещения для планеты Меркурий составляет величину порядка $-43''\cdot 0{,}01=-0{,}43''$ за столетие (напомним, что для Меркурия принятое значение аномального смещения составляет величину $42{,}95\pm0{,}215''$ за столетие [1]).

Для объяснения данного результата можно предложить следующие пути.

Как следует из нашего результата, стандартная формула для аномального смещения получена в системе координат, оси которой жестко фиксированы по отношению к «неподвижным» звездам, не принадлежащим нашей Галактике (т. е. в «квазиинерциальной» системе координат x', y', z', где эффекты, связанные с кориолисовой силой, отсутствуют и силы в уравнениях движения совпадают при $wt\ll 1$ с силами (6) за вычетом кориолисовых). Наш результат (10) означает наличие нового дополнительного эффекта в явлении аномального смещения, вызванного использованием неинерциальной системы координат

(x, y, z), оси x, y которой по определению вращаются относительно осей X, Y. Этот эффект существует и в ньютоновской теории (поворот плоскости колебаний некоторого вектора с угловой скоростью вращения осей существенно неинерциальной системы координат): действительно, так как величина ньютоновского периода эллиптического движения равна

$$T=2\pi p^{3/2}m^{-1/2}(1-e^2)^{-3/2},$$

то отношение дополнительного к аномальному (10) смещения

$$d\,dW=\pi kwp^{3/2}m^{-1/2}$$

к периоду T равно

$$d\,dW/T=-w.$$

Удивительным является то, что учет постньютоновских членов не изменил данного результата.

Отметим также, что учет поправок к прямолинейному распространению луча света в плоскости $z=0$ сводится в (6) в силу v_x, $v_y \gg V_c$ к учету членов, пропорциональных только m, что дает

$$g_x=-\frac{mx}{r^3}+\frac{mx}{r^3}(3v_x^2-v_y^2)+4v_xv_y\frac{my}{r^3}, \qquad (11)$$

$$g_y=-\frac{my}{r^3}+\frac{my}{r^3}(3v_y^2-v_x^2)+4v_xv_y\frac{mx}{r^3},$$

где $v_x=\cos\beta$, $v_y=\sin\beta$, β характеризует направление распространения луча света.

Уравнения (11) совпадают со стандартными уравнениями распространения луча света в РТГ, и поэтому вращение Солнечной системы не скажется как на величине отклонения света при прохождении рядом с Солнцем, так и на величине запаздывания радиосигналов.

Отметим, что изменения эксцентриситета e и большой полуоси a $(p=a(1-e^2))$ орбиты с течением времени определяются из уравнений

$$\frac{de}{dt}=\frac{1-e^2}{h}\left(a\sin fA_{\parallel}+\frac{A_{\perp}}{e}\left(\frac{ap}{r}-r\right)\right),$$

$$\frac{da}{dt}=\frac{2a^2}{h}\left(e\sin fA_{\parallel}+\frac{A_{\perp}p}{r}\right). \qquad (12)$$

Подставляя в (12) соотношения (8) и интегрируя по полной орбите, получаем, что ни галактическое вращение, ни другие члены уравнений движения (6) не дают вклада в интегральное изменение величин эксцентриситета и полуоси:

$$\Delta e=0, \qquad \Delta p=0. \qquad (13)$$

Подчеркнем, что в квазиинерциальной системе координат уравнения движения пробного тела отличаются от уравнений его движения в инерциальных координатах, поэтому отсутствие дополнительных к аномальным поправок в рассмотренных выше интегральных эффектах в квазиинерциальной системе координат не означает еще полной идентичности физики в этих различных системах координат.

Так, в координатах $\mathbf{r}=(x', y', z')$ квазиинерциальной системы координат уравнение плоскостного ($z'=0$) движения пробного тела имеет следующий вид (6) ($\mathbf{V}_c=(0, V_c, 0)$):

$$\ddot{\mathbf{r}}=-\mathbf{r}m/r^3+\mathbf{r}m/r^3[6\mathbf{V}_c^2+2(\mathbf{V}_c\dot{\mathbf{r}})-\dot{\mathbf{r}}^2+(3/2)(\mathbf{V}_c\mathbf{r})^2/r^2+4m/r]+$$

$$+\dot{\mathbf{r}}m/r^3[(\mathbf{V}_c\mathbf{r})+4(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}})],$$

здесь $\mathbf{V}_c$ — линейная скорость галактического вращения.

Данное уравнение в полярных координатах ($x'=r\cos\varphi$, $y'=r\sin\varphi$) записывается так:

$$\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2=-m/r^2+m/r^2[4m/r+3\dot{r}^2+6V_c^2-r^2\dot{\varphi}^2]+$$

$$+\cos(\varphi)\,2mV_c\dot{\varphi}/r+\sin(\varphi)\,3m\dot{r}V_c/r^2+\sin^2\varphi\cdot 3mV_c^2/(2r^2),$$

$$(r^2\dot{\varphi})^{\cdot}=4m\dot{r}\dot{\varphi}+\sin\varphi\cdot mV_c\dot{\varphi}.$$

Круговая орбита ($r=\mathrm{const}$) не является решением приведенных уравнений при $V_c\neq 0$. Найдем решение данных уравнений в постньютоновском приближении как возмущающее ньютоновскую круговую орбиту, характеризуемую $r_n=a$, $\varphi_n=\omega t$, $\omega_n=m^{1/2}/a^{3/2}$. Получаем

$$r=a+\cos(2z)\,aV_c^2/4,$$

$$\varphi=z-\sin z\cdot(m/a)^{1/2}V_c-\sin(2z)\,V_c^2/4,$$

$$z=\omega t;\quad \omega=\omega_n(1-3m/(2a)-27V_c^2/8),$$

здесь ω — постньютоновская кеплерова частота.

Эта траектория в постньютоновском приближении является эллипсом с эксцентриситетом $e=V_c$, причем тело движется с непостоянной во времени угловой скоростью, а уравнения движения содержат наряду с ω еще и гармонику 2ω. Перечисленные эффекты по порядку величины вполне доступны наблюдению.

В заключение отметим, что вычисления, проведенные в данной работе, были проведены с помощью программы аналитических вычислений «*Reduce*-3».

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. М., 1977; Уилл К. Теория и эксперимент в гравитационной физике. М., 1985; Брумберг В. А. Релятивистская небесная механика. М., 1972; Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Релятивистская теория гравитации. М., 1989. [2] Копейкин С. М.//Астрон. журн. 1989. **66**. С. 1069; 1289; 1990. **67**. С. 10. [3] Nelson R. A.//Gen. Relat. and Grav. 1990. **22**. P. 431. [4] Аллен К. Астрофизические величины. М., 1977. [5] Дубошин Г. Н. Небесная механика. М., 1975.

Поступила в редакцию
31.05.91