

ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

УДК 621.3.09:621.373.1

О СОЛИТОНАХ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ПЕРИОДОВ ВО ВРЕМЕНИ
ИЛИ В ПРОСТРАНСТВЕ

А. В. Ведерко, О. Б. Дубровская, В. Ф. Марченко, А. П. Сухоруков *)

Представлена теория солитонов в среде, дисперсия и нелинейность которой описываются уравнением Дуффинга. Для сигналов, содержащих малое число осцилляций под огибающей, выведено модифицированное уравнение Кортевега—де Фриза. Исследовано распространение солитона и бризера. Показано, что при увеличении числа периодов бризер переходит в солитон огибающей.

На примере двух реальных физических систем (волновод, периодическая структура) рассмотрен процесс формирования и распространения медленных солитонов в кубично-нелинейной среде с ограниченной полосой пропускания. Получены точные аналитические выражения для формы солитона и указана область их существования. Обсуждаются условия возбуждения нераспространяющегося солитона.

1. Введение

Формирование и распространение солитонов — импульсов, сохраняющих свою форму благодаря балансу дисперсионных и нелинейных эффектов, — наблюдается в средах различной физической природы и используется, в частности, в системах передачи информации. Так, в оптических волокнах с помощью солитонов огибающей можно достичь скорости передачи порядка 10^{12} бит/с. В них же формируются импульсы фемтосекундной длительности, включающие лишь несколько периодов оптических колебаний [1]. Солитоны исследуются также в физике твердого тела, акустике и гидродинамике, микроволновой радиофизике, магнетизме и т. п. [2].

Для описания солитонов огибающей вдали от резонансных и критических частот используется метод медленно меняющихся амплитуд, приводящий к нелинейному уравнению типа Шрёдингера (НУШ) [3]. В зависимости от знака произведения коэффициента нелинейности среды на коэффициент дисперсии второго порядка могут возбуждаться светлые или темные солитоны, распространяющиеся с той же скоростью, что и слабые сигналы в линейной среде. Такие солитоны представляют собой пространственно-временные волновые пакеты, под огибающими которых содержится большое число осцилляций поля.

В настоящей статье мы обсудим классы солитонов, обладающих рядом принципиальных отличий от обычных солитонов огибающей. Речь пойдет прежде всего о солитонах при малом числе осцилляций поля, когда представление о волновом пакете неприменимо и необходимо использовать, подобно нелинейной акустике, метод медленно изменяющегося профиля, приводящий к модифицированному уравнению Кортевега—де Фриза (МКДФ). Здесь большой интерес помимо солитонов представляют бризеры.

Далее будут рассмотрены основные свойства солитонов вблизи критических частот, на которых групповая скорость равна нулю. Такие ситуации, как известно, имеют место в волноводах, твердом теле, фильтрах, где выше (ниже) критической частоты существует область

*) Московский университет.

прозрачности для распространяющегося сигнала, а ниже (выше) — область частотной непрозрачности, в которой сигнал отражается от линии передач. Изменение критической частоты вследствие нелинейности диэлектрической проницаемости приводит к смещению границы между прозрачной и непрозрачной областями, что позволяет осуществить своеобразное «туннелирование» медленных солитонов, скорость которых в десятки или сотни раз меньше скорости распространения вдали от критических частот. Вблизи критических частот можно также возбуждать нераспространяющиеся солитоны.

Помимо этого в диспергирующих средах можно возбуждать цветные или трехчастотные солитоны в средах с квадратичной нелинейностью [4], солитоны в двух волноводах, имеющих ту или иную связь между собой [5].

Ниже мы остановимся на теории и численном моделировании мало-периодных солитонов в среде с дисперсией и нелинейностью, описываемой уравнением Дуффинга, а также медленных и нераспространяющихся солитонов вблизи критических частот волноводов, фильтров, акустических и оптических ветвей в твердом теле. Перед этим для удобства дадим краткую справку о солитонах огибающей.

2. Солитоны огибающей и нелинейное уравнение Шрёдингера

Пусть среда обладает нелинейной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 |A|^2, \quad (1)$$

где A — амплитуда волнового пакета:

$$E = (1/2) A(t, x) \exp \{i(\omega_0 t - kx)\} + \text{к. с.} \quad (2)$$

Здесь ω_0 — центральная частота пакета, $k = \omega \varepsilon_0^{1/2} / c$ — волновое число в линейной среде, t — время, x — координата вдоль направления распространения. Влияние дисперсии и нелинейности на распространение пространственно-временного пакета (2) описывается амплитудой A . Во втором приближении теории дисперсии зависимость волнового числа от частоты можно представить в виде трех первых членов разложения:

$$k(\omega) = k(\omega_0) + u^{-1}(\omega - \omega_0) + (1/2) k_2 (\omega - \omega_0)^2 + \dots, \quad (3)$$

где $u = \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega_0}^{-1}$ — групповая скорость, $k_2 = \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_0}$ — коэффициент дисперсии второго порядка, ω — частота спектральной компоненты, причем для волнового пакета ширина его частотного спектра $\Delta\omega \ll \omega_0$. С учетом малой нелинейности (1) и слабой дисперсии (3) для комплексной амплитуды пакета можно получить в переменных x и $\tau = t - x/u$ нелинейное уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{i}{2} k_2 \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + i \frac{k \varepsilon_2}{2 \varepsilon_0} |A|^2 A = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4), содержащее мнимую единицу в коэффициенте диффузии перед второй производной $\partial^2 A / \partial \tau^2$, близко по своим свойствам к уравнению Шрёдингера для волновой функции [6] и описывает искажение как амплитудного, так и фазового профилей сигнала.

В многочисленных работах показано, что если произведение $\epsilon_2 k_2 < 0$, то в среде распространяется светлый солитон:

$$A = \exp\{i\Gamma x\} A_0 \operatorname{ch}^{-1}(\tau/T_0), \quad (5)$$

параметры которого связаны соотношением

$$\Gamma = -k_2 \frac{1}{2T_0^2} = \frac{k\epsilon_2 A_0^2}{4\epsilon_0}. \quad (6)$$

В среде с $k_2 \epsilon_2 > 0$ возможно образование темного солитона:

$$A = \exp\{i\Gamma' x\} A_0 \operatorname{th}(\tau/T_0), \quad (7)$$

где параметры A_0 , T_0 и Γ' удовлетворяют несколько другому соотношению, чем (6):

$$\Gamma' = k_2 \frac{1}{T_0^2} = \frac{k\epsilon_2 A_0^2}{2\epsilon_0}. \quad (8)$$

Заметим, что скорость солитонов огибающей (5), (7) не зависит от их амплитуды. Помимо простых солитонов (5), уравнение (4) имеет решение из N солитонов со специфической фазовой модуляцией, перемещающихся вследствие этого со скоростью, отличающейся от групповой скорости u в линейной среде.

Существуют некоторые модификации представленной теории солитонов огибающей. Так, в волноводах из-за интерференции дисперсии мод и среды, заполняющей волновод, могут существовать частоты, на которых $k_2 = 0$. Тогда в (3) берут следующий член разложения:

$\frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 k}{\partial \omega^3} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^3$, и в уравнение (4) вместо второй производной входит третья [7]. Для коротких импульсов в (4) иногда вводят член, описывающий дисперсию нелинейности: $\frac{\epsilon_2}{2c\epsilon_0^{1/2}} \frac{\partial(|A|^2 A)}{\partial \tau}$ [8].

С уменьшением длительности импульса его спектр уширяется, и необходимо брать все большее число членов в разложении (3), вследствие чего уравнение (4) будет содержать производные все более высокого порядка. Это сильно затрудняет нахождение решения. Здесь надо искать другие подходы. Об этом пойдет речь в следующем разделе.

3. Распространение импульсов, содержащих малое число осцилляций поля

1. Волновое уравнение и материальное уравнение типа Дуффинга. Картину распространения оптического импульса в нелинейной диспергирующей среде можно получить, решая совместно волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (9)$$

где P — поляризация среды, и материальное уравнение, описывающее нелинейный отклик среды. Мы будем рассматривать кубично-нелиней-

ную среду, отклик которой на электромагнитное поле будем описывать уравнением Дуффинга [9]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial P}{\partial t} + \omega_r^2 P + \alpha P^3 = \gamma E, \quad (10)$$

где ω_r — резонансная частота среды, δ характеризует затухание, α — нелинейность и γ — связь между электрическим полем и поляризацией. Система уравнений (9), (10) с граничным условием, задающим форму сигнала на входе в среду, решалась численно на ЭВМ. Это позволило исследовать распространение импульсов произвольной длительности.

В случае линейной среды ($\alpha=0$), подставляя в (10) $P = P_0 \exp\{i(\omega t - kx)\}$, $E = A \exp\{i(\omega t - kx)\}$, получим закон дисперсии (рис. 1)

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)} = \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{4\pi\gamma}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\delta\omega} \right)^{1/2}$$

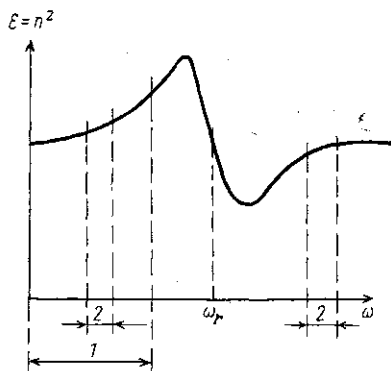


Рис. 1. Зависимость диэлектрической проницаемости от частоты. Область 1 соответствует области применимости мКдФ, область 2 — области применимости НУШ

Вдали от резонанса при выполнении условия

$$|4\pi\gamma/(\omega_r^2 - \omega^2)| \ll 1 \quad (11)$$

и при малом затухании закон дисперсии выглядит следующим образом:

$$k = \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{2\pi\gamma}{\omega_r^2 - \omega^2} \right). \quad (12)$$

В среде с кубичной нелинейностью диэлектрическая проницаемость зависит также от интенсивности волны (1). Полагая среду слабо нелинейной, можно оценить коэффициент нелинейности в (1):

$$\varepsilon_2 = -4\pi\alpha\gamma^3/(\omega_r^2 - \omega^2)^4. \quad (13)$$

2. Распространение волнового пакета с небольшим числом осцилляций под огибающей. Рассмотрим распространение волнового пакета с центральной частотой ω_0 , содержащего пять-шесть периодов колебаний поля под огибающей, решая численными методами исходную систему уравнений (9) и (10). Поведение волнового пакета, согласно п. 2, зависит от знака произведения $\varepsilon_2 k_2$. Из (3) находим коэффициент дисперсии второго порядка k_2 . Учитывая (13), получаем

$$\varepsilon_2 k_2 \sim -\alpha/(\omega_r^2 - \omega_0^2)^7. \quad (14)$$

Из (14) следует, что, если α и $\omega_r^2 - \omega_0^2$ имеют различные знаки, происходит декомпрессия волнового пакета (он расплывается быстрее, чем

в линейной среде). Этот случай представлен на рис. 2, а для пакета с амплитудой E_0 и начальной длительностью T .

При выполнении условия $\epsilon_2 k_2 < 0$ импульс может испытывать компрессию или сохранить амплитудный профиль. На рис. 2, б представлен последний случай, когда дисперсия почти полностью компенсируется нелинейностью и происходит солитонное распространение волнового пакета с небольшим числом осцилляций.

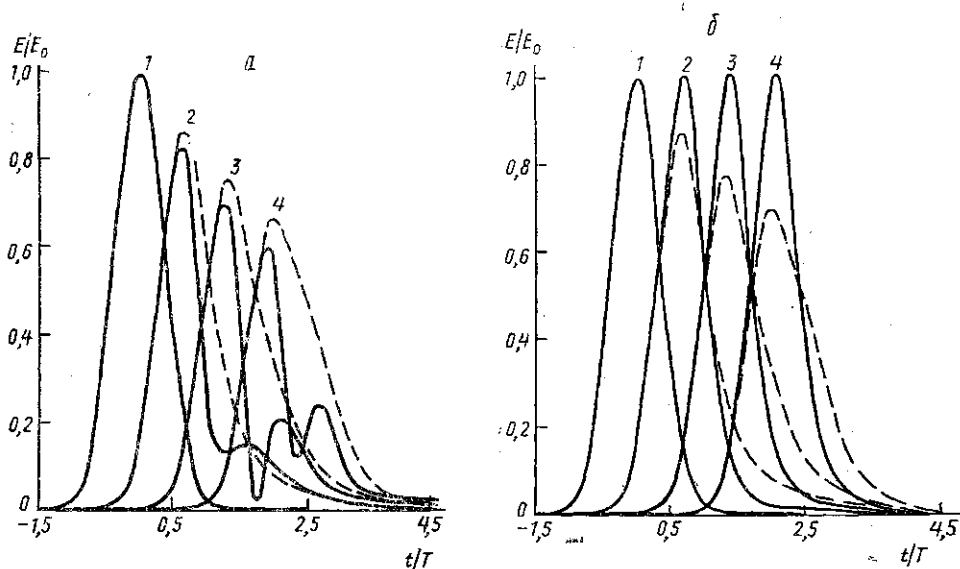


Рис. 2. Декомпрессия (а) и солитонное распространение (б) волнового пакета. Сплошной линией изображены огибающие пакета в нелинейной, пунктиром — в линейной диспергирующей среде на расстояниях $x=0$ (1); $L_D/3$ (2); $2L_D/3$ (3); L_D (4), где $L_D=T^2/2k_2$; $|\epsilon_2 E_0^2|=0,04$ (а), 0,6 (б)

Таким образом, из рис. 2 видно, что импульс, содержащий пять-шесть периодов колебаний под огибающей, может испытывать компрессию и декомпрессию, как и обычный волновой пакет. Следовательно, для такого импульса понятие волнового пакета еще применимо.

3. Распространение стационарного импульса произвольной длительности. Рассмотрим теперь распространение стационарного единичного импульса. Будем искать решение исходной системы (9), (10) в виде $E=E(\tau)$, $P=P(\tau)$, где $\tau=t-x/v$.

Подставляя E и P в систему (9), (10), после преобразований получаем следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} + \omega_r^2 P + \alpha P^3 = \frac{4\pi\gamma v^2}{c^2 - v^2} P, \quad (15)$$

$$E = \frac{4\pi v^2}{c^2 - v^2} P.$$

Решение уравнения (15) ищем в виде

$$P = P_0 \operatorname{ch}^{-1}(\tau/\tau_0). \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15) и приравнивая коэффициенты при степенях $\text{sh}^{-1}(\tau/\tau_0)$, находим соотношения между P_0 , v и τ_0 :

$$P_0^2 \tau_0^2 = 2/\alpha, \quad (17)$$

$$\frac{1}{\tau_0^2} + \omega_r^2 = \frac{4\pi\gamma v^2}{c^2 - v^2}.$$

Таким образом, система (9), (10) имеет решение (16) в виде солитона с амплитудой P_0 , длительностью τ_0 и скоростью v (рис. 3):

$$v = c \left(1 + \frac{4\pi\gamma}{\omega_r^2 + 1/\tau_0^2} \right)^{-1/2}. \quad (18)$$

Из формулы (17) видно, что стационарное распространение импульса, который на входе в среду имеет форму (16), возможно лишь при положительных значениях коэффициента нелинейности α .

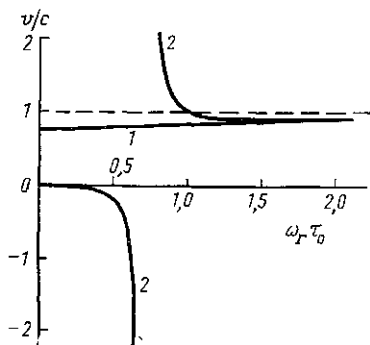


Рис. 3. Зависимость скорости солитона исходной системы (1) и солитона МКдФ (2) от параметра $\omega_r \tau_0$

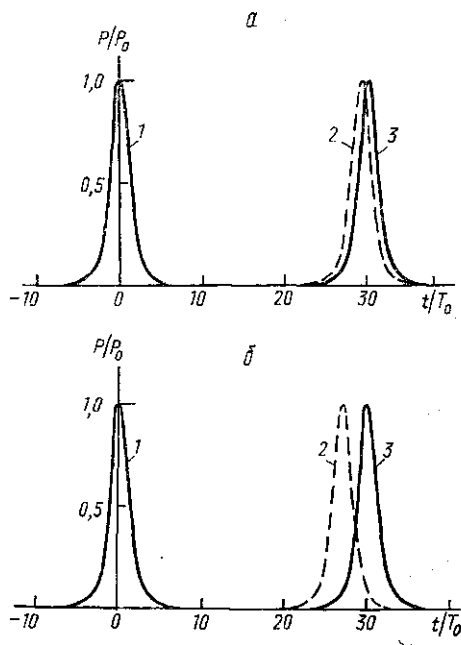


Рис. 4. Распространение солитона исходной системы (сплошная линия) и солитона МКдФ (пунктир): $x/cT=0$ (1); 30 (2), (3); $\omega_r \tau_0=0,6$ (а) и 0,45 (б)

4. Модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза для электромагнитных импульсов. Теперь мы будем рассматривать сигналы произвольной длительности при условии, что частоты, вносящие основной вклад в спектр сигнала, много меньше резонансной частоты среды, что соответствует области 1 на рис. 1. Разлагая $k(\omega)$ в ряд по степеням ω , находим

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{2\pi\gamma}{\omega_r^2} \right) + \frac{2\pi\gamma}{c\omega_r^4} \omega^3. \quad (19)$$

Из (14) видно, что знак параметра $\epsilon_2 k_2$ определяется в области 1 знаком коэффициента нелинейности α , так как $k_2 > 0$. Если использовать аналогию с волновым пакетом, то в случае, когда $\alpha < 0$, должно происходить более интенсивное расплывание импульса, чем в линейной среде. В противоположном случае, когда $\alpha > 0$, нелинейность должна оказывать стабилизирующее влияние на импульс.

Закон дисперсии (19) соответствует линеаризованному уравнению Кортевега—де Фриза (КдФ) [9]. Следовательно, систему (9), (10) можно свести к уравнению, аналогичному КдФ.

Будем искать решение системы (9), (10) для напряженности электрического поля E и поляризации P , используя метод медленно меняющегося профиля, в виде [10] $E=E(\xi, \eta)$; $P=P(\xi, \eta)$, где $\eta = t - x/c$; $\xi = \mu x$; μ — малый параметр. Подставляем E и P в уравнения (9) и (10) и учитываем члены нулевого и первого порядка по степеням μ . После некоторых преобразований получаем следующее уравнение:

$$-\frac{\partial^3 P}{\partial x \partial \eta^2} + \omega_r^2 \frac{\partial P}{\partial x} + 3\alpha P^2 \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{2\pi\gamma}{c} \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0. \quad (20)$$

Член с третьей производной в этом уравнении обуславливает наличие члена с ω^3 в выражении для волнового числа (19). Если считать нелинейность достаточно малой ($\alpha P^2 \ll \omega_r^2$), то в первом приближении можно написать

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{2\pi\gamma}{c\omega_r^2} \frac{\partial P}{\partial \eta}. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (20), получаем модифицированное уравнение Кортевега—де Фриза (мКдФ) [11] для описания распространения электромагнитного импульса в нелинейной среде в области I :

$$\frac{\partial^3 P}{\partial y^3} + 3\alpha P^2 \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{c\omega_r^4}{2\pi\gamma} \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (22)$$

где

$$y = \eta - \frac{2\pi\gamma}{c\omega_r^2} x.$$

мКдФ имеет односолитонное решение вида [12]

$$P = P_0 \operatorname{ch}^{-1} [(\alpha/2)^{1/2} P_0 (t - x/v)],$$

где

$$v = c \left(1 + 2\pi\gamma/\omega_r^2 - \pi\gamma\alpha P_0^2/\omega_r^4 \right)^{-1}. \quad (23)$$

Такое решение, как и решение (16), возможно только при $\alpha > 0$. Солитон мКдФ имеет такую же форму, как и солитон исходной системы. Если сравнить формулы для скорости солитона, рассчитанной точно (18) и приближенно (23), то можно убедиться, что в области I , где $4\pi\gamma/\omega_r^2 \ll 1$, $\omega_r^2 \tau_0^2 \gg 1$, точная формула переходит в (23) (рис. 3). Это говорит о возможности применения мКдФ (22) для описания распространения сигнала длительностью $\tau_0 \gg \omega_r^{-1}$. На рис. 4, а, б проведено сравнение результатов численного моделирования распространения солитонов на основе решения исходной системы (сплошная линия) и аналитического решения мКдФ (пунктир). Исследовались солитоны разной длительности: $\omega_r \tau_0 = 0,6$ (рис. 4, а) и $\omega_r \tau_0 = 0,45$ (рис. 4, б). Видно, что чем меньше длительность солитона, тем хуже мКдФ (22) описывает реальную ситуацию.

5. Бризеры. Рассмотрим еще одно решение мКдФ, которое называется бризерным и выражается следующей формулой [13]:

$$P(y, x) = P_b \left(\frac{\cos \Phi - (1/\omega_b T_b) \sin \Phi \operatorname{th} \theta}{1 + (1/\omega_b T_b)^2 \sin^2 \Phi \operatorname{th}^2 \theta} \right) \operatorname{ch}^{-1} \theta, \quad (24)$$

где

$$\theta = \frac{1}{T_b} \left[\eta - \frac{2\pi\gamma}{c\omega_r^2} x \left(1 - \frac{1}{\omega_r^2 T_b^2} + \frac{3\omega_b^2}{\omega_r^2} \right) \right] + \varphi, \quad (25)$$

$$\Phi = \omega_b \left[\eta - \frac{2\pi\gamma}{c\omega_r^2} x \left(1 - \frac{3}{\omega_r^2 T_b^2} + \frac{\omega_b^2}{\omega_r^2} \right) \right] + \psi. \quad (26)$$

Параметры решения P_b , T_b и ω_b имеют смысл амплитуды сигнала, его длительности и центральной частоты; φ и ψ — произвольные начальные фазы, причем амплитуда и длительность подчиняются соотношению $P_b^2 T_b^2 = 8/a$. Бризер имеет вид волнового пакета, у которого фазовая скорость v_b больше скорости огибающей u_b :

$$v_b = c \left[1 + \frac{2\pi\gamma}{c\omega_r^2} \left(1 - \frac{3}{\omega_r^2 T_b^2} + \frac{\omega_b^2}{\omega_r^2} \right) \right]^{-1},$$

$$u_b = c \left[1 + \frac{2\pi\gamma}{c\omega_r^2} \left(1 - \frac{1}{\omega_r^2 T_b^2} + \frac{3\omega_b^2}{\omega_r^2} \right) \right]^{-1}.$$

Таким образом, огибающая смещается назад по отношению к осцилляциям поля, определяемым величиной Φ .

Бризерное решение хорошо описывает распространение сигнала в среде при выполнении условий $\omega_b/\omega_r \ll 1$, $\omega_r T_b \gg 1$, характерных для области I (рис. 1).

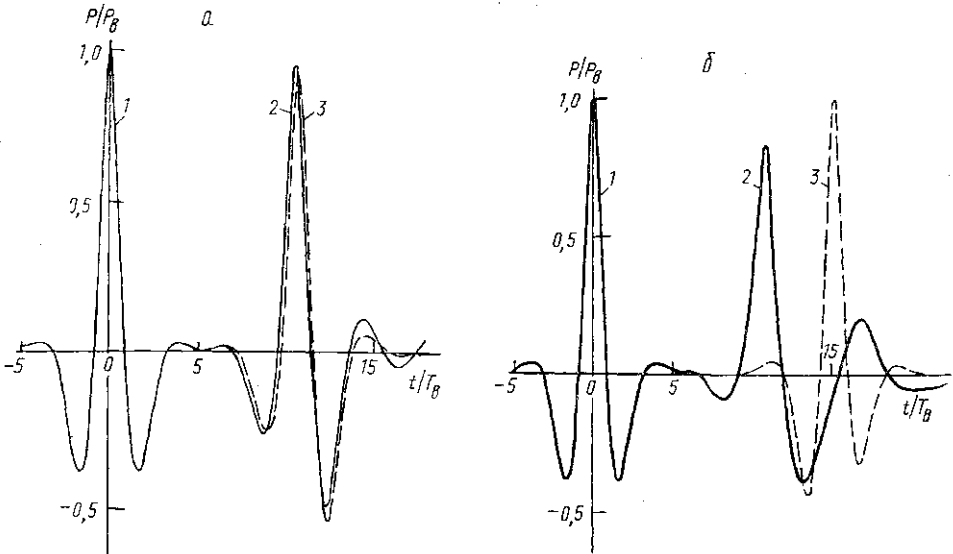


Рис. 5. Распространение бризера. Сплошной линией изображено численное решение исходной системы, пунктиром — аналитическое бризерное решение: $\omega_b T_b = 1,25$; $x/cT_b = 0$ (1); 10 (2), (3); $1/\omega_r T_b = 0,46$ (а); 0,65 (б); $\omega_b/\omega_r = 0,58$ (а); 0,81 (б)

На рис. 5 представлено распространение импульса, который на входе в среду имеет вид бризера. Параметр $\omega_b T_b$ равен 1,25, т. е. под огибающей уместается практически только один период колебаний. Значения параметров $1/\omega_r T_b$ и ω_b/ω_r равны соответственно 0,46 и 0,58

(рис. 5, а); 0,65 и 0,81 (рис. 5, б). В последнем случае видно значительное расхождение между численным решением исходной системы и аналитическим бризерным решением.

б. Переход от бризера к волновому пакету. Рассмотрим случай, когда параметр $\omega_b T_b$ достаточно велик, чтобы можно было считать амплитуду сигнала медленно меняющейся на протяжении периода колебаний. Подставляя в уравнение (22) P в виде

$$P = (1/2) P_0 \exp \{i k_0 x - i \omega_0 t\} + \text{к. с.} \quad (27)$$

и считая, что в первом приближении зависимость волнового числа от частоты имеет вид (19), для P_0 можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial P_0}{\partial x} = 6i \frac{\pi \gamma \omega_0}{\omega_r^4 c} \frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2} + 6i \alpha \frac{\pi \gamma \omega_0}{\omega_r^4 c} \frac{|P_0|^2 P_0}{4}, \quad (28)$$

где

$$\xi = t - \frac{x}{c} - \frac{2\pi\gamma}{c\omega_r^2} \left(1 + \frac{3\omega_0^2}{\omega_r^2} \right) x.$$

Это нелинейное уравнение Шрёдингера, стационарное решение которого выглядит следующим образом:

$$P_0 = \exp \{i \Gamma x\} P_s \operatorname{ch}^{-1} (\xi / T_s), \quad (29)$$

где для Γ , P_s и T_s выполняются соотношения

$$\Gamma = -\frac{6\pi\gamma\omega_0}{\omega_r^4 c T_s^2} = -\frac{6\pi\gamma\alpha\omega_0 P_s}{8\omega_r^4 c}; \quad P_s^2 T_s^2 = 8/\alpha.$$

Подставляя (29) в (27), получаем

$$P = P_s \operatorname{ch}^{-1} \theta' \cos \Phi', \quad (30)$$

где

$$\theta' = \frac{1}{T_s} \left[t - \frac{x}{c} - \frac{2\pi\gamma}{c\omega_r^2} x \left(1 + \frac{3\omega_0^2}{\omega_r^2} \right) \right]. \quad (31)$$

$$\Phi' = \omega_0 \left[t - \frac{x}{c} - \frac{2\pi\gamma}{c\omega_r^2} x \left(1 - \frac{3}{\omega_r^2 T_s^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} \right) \right]. \quad (32)$$

Сравним формулы (30)–(32) и (24)–(26). Можно показать, что при $\omega_b T_b \gg 1$ бризерное решение переходит в солитон огибающей, который удовлетворяет нелинейному уравнению Шрёдингера (28). Это подтверждается прямым сравнением профилей бризерного решения (24) (рис. 6) и волнового пакета (30) по мере их распространения.

Следует отметить, что НУШ (28), полученное из мКдФ (22), действительно только в области, где центральная частота ω_0 меньше резонансной частоты ω_r . Однако из полных уравнений (9), (10) можно вывести НУШ, которое применимо как при $\omega_0 < \omega_r$, так и при $\omega_0 < \omega_r$ (область 2 на рис. 1):

$$\frac{\partial P_0}{\partial x} = i \frac{2\pi\gamma\omega_0 (3\omega_r^2 + \omega_0^2)}{c (\omega_r^2 - \omega_0^2)^3} \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + 6i\alpha \frac{\pi\gamma\omega_0}{c (\omega_r^2 - \omega_0^2)^2} \frac{|P_0|^2 P_0}{4}, \quad (33)$$

где

$$\kappa = t - \frac{x}{c} - \frac{2\pi\gamma}{c\omega_r^2} \frac{(\omega_r^2 + \omega_0^2)}{(\omega_r^2 - \omega_0^2)^2} x.$$

Если положить $\omega_0 \ll \omega_r$, то (33) переходит в (28).

4. Медленные и нераспространяющиеся солитоны

Теоретически существование локализованных возмущений солитонного типа, скорость распространения которых равна или близка к нулю, было показано в случае распространения электромагнитной волны вдоль нелинейного диэлектрика с периодически промодулированной диэлектрической проницаемостью [14, 15] и при волноводном возбуждении волн на поверхности жидкости [16]. Подобный эффект наблюдался также экспериментально при параметрическом возбуждении поверхностных волн гравитационного диапазона в узком канале [17, 18].

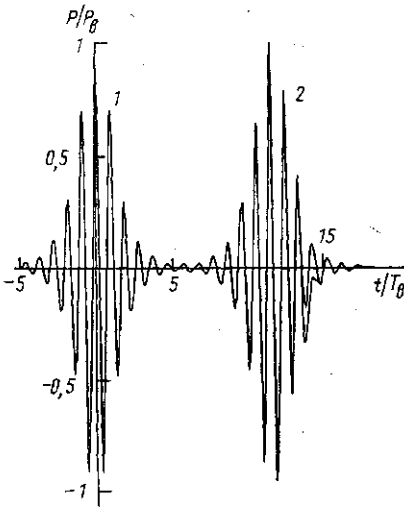


Рис. 6. Распространение бризера с большим числом осцилляций под обгоняющей: $x/cT=0$ (1); 10 (2) при $\omega_b T_b=8$; $1/\omega_r T_b=0,2$; $\omega_b/\omega_r=0,5$

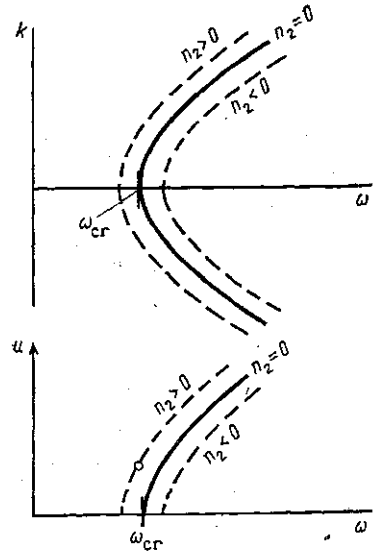


Рис. 7. Зависимость волнового числа (а) и групповой скорости (б) от частоты для волновода, заполненного линейной (сплошные кривые) и нелинейной (пунктирные кривые) средой

Очевидно, что любая кубично-нелинейная среда, дисперсионная характеристика которой имеет критические точки, отделяющие частотные полосы прозрачности от полос непрозрачности (например, искусственная среда с периодически меняющимися свойствами), может служить физической моделью для изучения медленных солитонов. Это может быть многослойная диэлектрическая структура, состоящая из чередующихся линейных и нелинейных слоев различной толщины [19], молекулярные цепочки [20], цепочки типа цепочки Тоды [2] и т. п. Далее остановимся подробнее на двух моделях — волноводе, запол-

ненном нелинейной средой, и цепочке связанных нелинейных резонаторов.

1. Нелинейные волноводы. Рассмотрим особенности формирования солитонов вблизи критической частоты нелинейного волновода. В линейном приближении дисперсия волнового числа k в волноводе (без учета дисперсии среды) описывается известным выражением (рис. 7, а)

$$k^2 c^2 = (\omega^2 - \omega_{cr}^2) \epsilon_0, \quad (34)$$

а фазовая и групповая скорости соответственно равны (рис. 7, б)

$$v = c \epsilon_0^{-1/2} (1 - \omega_{cr}^2 / \omega^2)^{-1/2}; \quad u = c \epsilon_0^{-1/2} (1 - \omega_{cr}^2 / \omega^2)^{1/2}. \quad (35)$$

При приближении к критической частоте $\omega \rightarrow \omega_{cr}$ фазовая скорость устремляется к бесконечности, а волновое число и групповая скорость — к нулю. Таким образом, вблизи ω_{cr} длина волны в волноводе неограниченно возрастает ($\lambda \rightarrow \infty$) и сигнал нельзя представить в виде пространственного пакета. Если же частотный спектр достаточно узок ($\Delta\omega \ll \omega_0$), то можно сохранить описание сигнала в виде временного пакета:

$$E = (1/2) A(t, x) \exp \{i\omega_0 t\} + \text{к. с.} \quad (36)$$

По сравнению с (2) в (36) отсутствует член $\exp \{-ikx\}$, так как $k=0$.

Учитывая нелинейность в волновом уравнении, легко получить параболическое уравнение для амплитуды сигнала (36), распространяющегося в волноводе:

$$\frac{2i\omega_0 \epsilon_0}{c^2} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\omega_0^2}{c^2} \epsilon_2 |A|^2 A + \frac{\epsilon_0}{c^2} (\omega_0^2 - \omega_{cr}^2) A. \quad (37)$$

Это уравнение также имеет вид НУШ, однако теперь в него входит вторая производная по координате x (обычно в НУШ входит лишь первая производная по x (4)), т. е. оно описывает одновременное распространение сигнала как вдоль оси X , так и в противоположном направлении. Уравнение (37) дает дисперсионное соотношение

$$\frac{\omega_0^2}{c^2} (\omega - \omega_0) = k^2 - \frac{\omega_0^2}{c^2} \epsilon_2 |E_0|^2 - \frac{\epsilon_0}{c^2} (\omega_0^2 - \omega_{cr}^2). \quad (38)$$

Из (38) видно, что благодаря нелинейности дисперсия волновода меняется и, что самое важное, меняется критическая частота, при которой $k=0$:

$$\omega_{cr}^{nl} = \omega_{cr} (1 + \epsilon_2 E_0^2 / \epsilon_0)^{-1}. \quad (39)$$

При $\epsilon_2 > 0$ дисперсионная кривая смещается влево и критическая частота понижается, а при $\epsilon_2 < 0$ — вправо с повышением критической частоты (рис. 7, а, б). Уравнение (37) имеет стационарное решение в виде солитона:

$$A_s = E_0 \operatorname{ch}^{-1} \{(x - u_s t) / l_s\} \exp \{-ik_s x\}, \quad (40)$$

параметры которого связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} l_s &= \lambda_0 (2\pi^2 \epsilon_2 E_0^2); \quad k_s = \epsilon_0 \omega_0 u_s / c^2; \\ u_s &= \pm c \epsilon_0^{-1/2} [(\epsilon_2 E_0^2 / 2\epsilon_0) + (\omega_0^2 - \omega_{cr}^2) / \omega_0^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (41)$$

Из (41) следует, что солитон (40) может быть возбужден в среде с положительным коэффициентом нелинейности $\epsilon_2 > 0$.

На частоте $\omega_0 = \omega_{cr}^{nl}$ групповая скорость и волновое число солитона обращаются в нуль — это соответствует возбуждению нераспространяющегося солитона. Генерация такого солитона изучалась экспериментально на поверхности жидкости в узком канале при его возбуждении акустическими колебаниями с частотой около 10 Гц [17].

Пояснить процесс формирования нераспространяющихся солитонов можно следующим образом. Зададим однородную в поперечном направлении внешнюю силу $F(x) = F_0 \operatorname{ch}^{-1}(x/l_s)$. В этом случае амплитуда стоячего солитона определяется из кубического уравнения

$$E_0 \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega_{cr}^2) / \omega_0^2 - \epsilon_2 F_0^3 / 2 = (c/\omega_0)^2 F_0. \quad (42)$$

В отсутствие внешней силы ($F_0 = 0$) существует два стационарных значения амплитуды E_0 : $E_{01} = 0$ (состояние покоя) и

$$E_{02} = \pm [2\epsilon_0 (\omega_{cr}^2 - \omega_0^2) / (\epsilon_0 \omega_0^2)]^{1/2}.$$

Чтобы достичь состояния E_{02} , необходимо под действием F_0 перейти на однозначную ветвь (42), т. е. возбудить стоячий солитон с амплитудой, превышающей критическую:

$$E_0^{cr} = E_{02} / \sqrt{3}. \quad (43)$$

Затем в случае прекращения действия внешней силы, $F_0 = 0$, можно ожидать, что солитон с амплитудой, меньшей E_0^{cr} , расплывается, а с большей — сохраняется. Эффект жесткого возбуждения нераспространяющегося солитона зарегистрирован нами в нелинейном фильтре.

На критической частоте $\omega_0 = \omega_{cr}$ групповая скорость медленного солитона определяется только его амплитудой (см. (41)):

$$u_s = c (\epsilon_2 E_0^2 / 2\epsilon_0^2)^{1/2}.$$

Таким образом, если показатель преломления меняется на величину $\epsilon_2 E_0^2 = 10^{-4}$, то скорость медленного солитона на два порядка меньше скорости света в свободном пространстве: $u_s = 10^{-2} c$, а его пространственный масштаб $l_s = 100 \lambda_0$.

При заполнении волновода средой с коэффициентом нелинейности $\epsilon_2 < 0$ возможно формирование темного солитона, имеющего вид

$$A_s = E_0 \operatorname{th} \{(x - u_s t) / l_s\} \exp \{-ik_s x\}, \quad (44)$$

параметры которого E_0 , u_s , l_s , k_s связаны соотношением типа (41).

2. Цепочка слабо связанных нелинейных резонаторов. Рассмотрим систему из слабо связанных резонансных элементов с реактивно-нелинейными свойствами — цепочку одинаковых индуктивно связанных резонансных контуров без потерь с нелинейной зависимостью напряжения V на конденсаторе C от его заряда q : $V = = q(1 + \gamma q^2) / C$. Связь между соседними контурами характеризуется коэффициентом связи $\kappa = M/L$ (L — индуктивность контура, M — взаимная индукция). Будем полагать связь малой: $\kappa \ll 1$. Дисперсионное уравнение дискретной системы (рис. 8)

$$\cos \beta = (\omega_r^2 - \omega^2) / 2\kappa \omega^2,$$

где β — набег фазы на ячейку, ω_r — резонансная частота контура, имеет вид характеристики полосового фильтра, верхняя и нижняя гра-

нические частоты которого соответственно равны $\omega_l = \omega_r(1-2\kappa)^{-1/2}$ и $\omega_b = \omega_r(1+2\kappa)^{-1/2}$. Рассмотрим подробнее возбуждение системы вблизи низкочастотной границы $\omega \approx \omega_b$. Для огибающей $A_n(t)$ гармонической волны $q_n = (1/2)A_n(t) \exp\{i(\omega t - \beta n)\} + \text{к. с.}$ с учетом ее медленного изменения во времени можно составить баланс напряжений в n -м контуре:

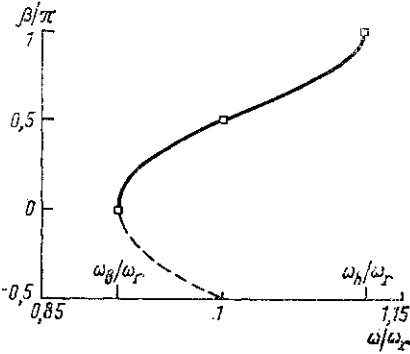
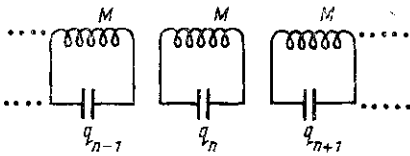


Рис. 8. Дисперсионная кривая цепочки нелинейных резонаторов (вверху). Коэффициент связи $\kappa=0,1$

$$i \frac{d}{d\theta} [A_n + \kappa (A_{n-1} + A_{n+1})] + \frac{\kappa}{2} [A_{n-1} + A_{n+1}] + \frac{\omega_r^2 - \omega^2}{2\omega^2} A_n + \frac{3}{8} \gamma |A_n|^2 A = 0, \quad (45)$$

где $\theta = \omega t$.

Поскольку $\omega \approx \omega_b$ и $\beta \approx 0$, в уравнении (45) перейдем к непрерывному пределу, воспользовавшись известным разложением $A_{n\pm 1} = A_n \pm \frac{\partial A_n}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_n}{\partial n^2} + \dots$, и, ограничиваясь членами второго порядка по n ($\delta n = 1 \ll N$), получаем НУШ в форме (37) или (4):

$$i \frac{\partial A}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \Delta_b A + \chi_b |A|^2 A = 0, \quad (46)$$

где $A_n(t) \rightarrow A(\xi, \tau)$, $\xi = [(1 + 2\kappa)/\kappa]^{1/2} n$, $\Delta_b = (\omega_r^2 - \omega^2)/(2\omega^2)$, $\chi_b = \frac{3}{8} \gamma \omega_r^2/\omega^2$.

Из двухпараметрического семейства решений уравнения (46) в виде волн стационарного профиля (см., напр., [21])

$$A = a(\xi - u_s \theta) \exp\{i(\Omega \theta - ik(\xi - u_s \theta))\}, \quad (47)$$

где u_s — малая групповая скорость, включающего в себя как неподвижные, так и распространяющиеся солитоны, мы выберем те, частота которых равна частоте начального возбуждения, т. е. их параметры удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\Omega = \Delta_b + \chi_b a_0^2 + u_s^2/2 = 0, \quad (48)$$

что соответствует минимуму интеграла движения ($I_3=0$) уравнения (46) [22]; физический смысл параметра a_0 будет пояснен ниже.

Для случая $\chi_b < 0$ таким свойством обладают решения в виде медленно перемещающегося солитона (ср. с (40)):

$$A_s(\xi, \theta) = \sqrt{2} a_0 \text{ch}^{-1}\{(\Delta_b + u_s^2/2)^{1/2}(\xi - u_s \theta)\} \exp\{ik_s \xi\}, \quad k_s = u_s, \quad (49)$$

или неподвижного солитона ($\Delta_b + \chi_b a^2 = 0$):

$$A_s(\xi) = \sqrt{2} a_0 \text{ch}^{-1}\{(2\Delta_b)^{1/2}(\xi - \xi_0)\}. \quad (50)$$

При $\chi_b > 0$ существует стационарное решение НУШ (46) из семейства (47) — темный медленный солитон, также удовлетворяющий условию $I_3 = 0$ [22] ($\Delta_b + \chi_b a_0^2 = 0$):

$$\begin{aligned} A_s^2(\xi, \theta) &= a_0^2 - (a_0^2 - a_{\min}^2) \operatorname{ch}^{-2} \{ \Delta_b^{1/2} (\xi - u_s \theta) \}, \\ u_s^2 &= \chi_b a_{\min}^2, \quad \varphi = 2 \operatorname{arctg} \{ (a_0^2 - a_{\min}^2) / a_{\min}^2 \}^{1/2} \end{aligned} \quad (51)$$

(φ — сдвиг фазы между «хвостами» импульса). При $a_{\min} = 0$ медленный «серый» солитон (51) становится неподвижным «черным» солитоном:

$$A_d(\xi) = a_0 \operatorname{th} \{ \Delta_b^{1/2} (\xi - \xi_0) \}, \quad u_s = 0, \quad \varphi = 0. \quad (52)$$

Параметр a_0 , очевидно, имеет смысл амплитуды светлого солитона (с точностью до $\sqrt{2}$) или амплитуды синфазных колебаний всей системы для темного солитона.

С физической точки зрения медленные солитоны (49) — (52) являются результатом взаимодействия прямой и обратной волн, возбуждаемых в нелинейной среде (см. п. 1). Действительно, любое решение линейного волнового уравнения — волна стационарного профиля, скорость которой v совпадает со значением фазовой скорости, допустимым для фундаментальных решений. При неоднозначной зависимости $k = k(\omega)$ стационарное возмущение можно рассматривать как суперпозицию фундаментальных решений с одинаковым v , но разными k и ω . Сказанное относится и к линейному уравнению Шрёдингера (см. (46) с $\chi_b = 0$), которое, в отличие от общего волнового уравнения, описывает движение амплитуды волны. Дисперсионное соотношение для вариаций волнового числа k и частоты ω имеет вид

$$\Omega = k^2/2 + \Delta_b.$$

В этом случае вариация фазовой скорости равна $v = k/2 + \Delta_b/k$ и, следовательно, одному и тому же значению v соответствуют два разных k :

$$k_{1,2} = v \pm \Delta k, \quad \Delta k = \sqrt{v^2 - v_0^2}, \quad |v| \simeq |v_0|,$$

где v_0 — минимальное значение фазовой скорости. Таким образом, огибающая стационарной волны содержит два слагаемых:

$$A = \exp \{ i v (\xi - v \theta) \} [A_1 \exp \{ i \Delta k (\xi - v \theta) \} + B_1 \exp \{ - i \Delta k (\xi - v \theta) \}].$$

При граничных условиях $A_1 = 0$ или $B_1 = 0$ получаем бегущую гармоническую волну постоянной амплитуды:

$$A = A_1 \exp \{ i k_1 (\xi - v \theta) \},$$

а при $A_1 = B_1$ решение имеет вид волны, у которой изменяются как амплитуда, так и фаза:

$$A = 2A_1 \cos [\Delta k (\xi - v \theta)] \exp \{ i v (\xi - v \theta) \}. \quad (53)$$

Общность структуры (47) и (53) очевидна. Отличие заключается в том, что для существенно нелинейной задачи при ненулевых условиях на бесконечности косинус в (53) переходит в эллиптическую функцию, а при нулевых — в гиперболический секанс, т. е. форма импульса становится солитонной.

Таким образом, условия возбуждения медленных солитонов в нелинейной среде должны соответствовать условиям возбуждения прямой и обратной волн. Для периодической структуры такой режим реализуется вблизи частоты брэгговского отражения [14], а для волновода, заполненного нелинейной средой, — вблизи его критической частоты. В последнем случае обычно используется синфазное параметрическое возбуждение системы на удвоенной частоте [17].

Несмотря на существование точных аналитических решений НУШ (46), реальную динамику формирования солитонных и солитоноподобных возмущений можно получить на основе решения полной системы дискретных нелинейных уравнений Шрёдингера вида (45).

3. Численное моделирование медленных солитонов. Исследование процессов возбуждения и распространения медленных солитонов проводилось в системе, содержащей 200 одинаковых нелинейных элементов без потерь и замкнутой в кольцо ($A_n = A_{n+200}$). Рассматривалась эволюция начального ($\theta=0$) возмущения с пространственным распределением A_n^0 , определяемая системой уравнений (45), для которой была составлена консервативная симметричная разностная схема в равномерной сетке по θ в сочетании с циклической прогонкой по n , что позволило получить относительную точность счета порядка 10^{-3} (по сохранению интегралов движения I_1 и I_3 [22]).

При задании начального возмущения A_n^0 близким по форме к стоячему солитону (50) с параметрами, удовлетворяющими условию $\Delta_b - |\chi_b| a_0^2 = 0$ (или (49) при $\Delta_b - |\chi_b| a_0^2 + u_s^2/2 = 0$), формировался солитон, форма которого сохранялась неизменной вплоть до $\theta \approx 2000$ (рис. 9). Начальное возмущение вида (50) с параметрами

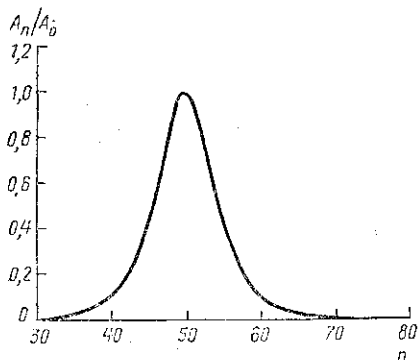


Рис. 9. Устойчивый светлый нераспространяющийся солитон (50), параметры которого удовлетворяют условию $\Delta_b - |\chi_b| a_0^2 = 0$

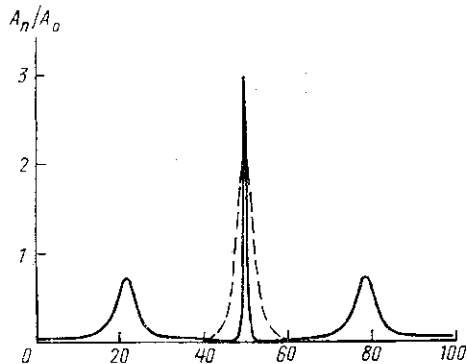


Рис. 10. Распад начального возмущения (штриховая линия) — неподвижного солитона (50) с $\Delta_b - |\chi_b| a_0^2 < 0$ на неподвижный стационарный импульс и два медленно перемещающихся спутника (49) с $\Delta_b - |\chi_b| a_1^2 + u_s^2/2 = 0$

$\Delta_b - |\chi_b| a_0^2 > 0$ расплывается, и при $\theta \approx 200 \div 300$ движение становится стохастическим. Хотя система является консервативной, явления возврата (т. е. восстановления первоначальной формы возбуждения) до $\tau \approx 3000$ обнаружено не было. В случае $\delta = \Delta_b - |\chi_b| a_0^2 < 0$ в ходе эволюции начального возмущения наряду с центральным неподвижным импульсом возникают два медленно перемещающихся спутника, параметры которых удовлетворяют соотношению $\Delta_b - |\chi_b| a_1^2 + u_s^2/2 = 0$, а

пространственное распределение близко к аналитическому решению (49) (рис. 10). Амплитуда спутников a_1 определяется по сохранению интеграла I_1 для совокупности импульсов и пропорциональна δ , а их скорость $u_s \approx 0,05 \ll u_{\max} = 2\pi k$, где u_{\max} — групповая скорость в центре полосы пропускания системы.

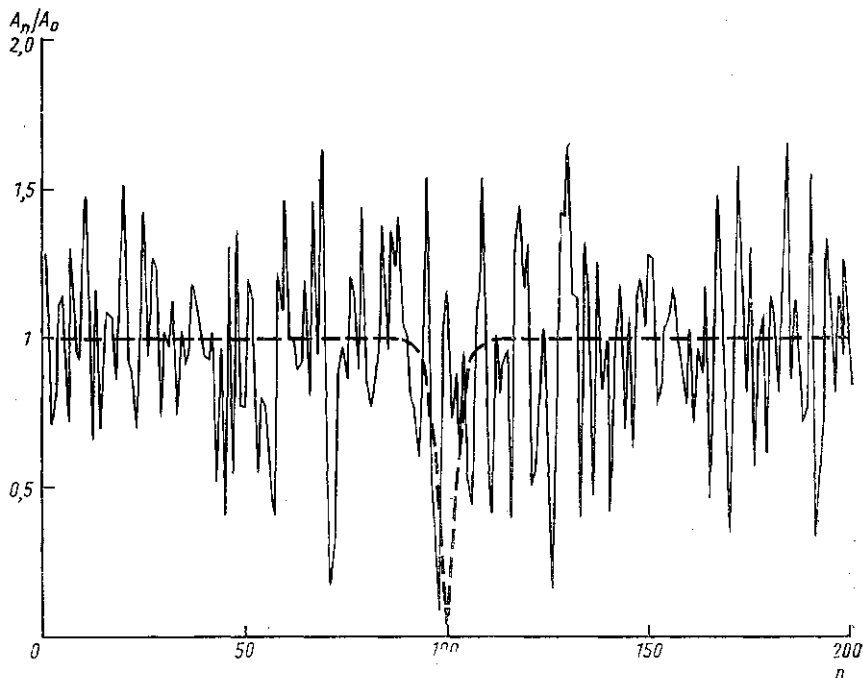


Рис. 11. Переход системы в стохастический режим (сплошная линия) в случае задания при $\theta=0$ возмущения в виде темного солитона (52) (штриховая линия)

Принципиально неустойчивым оказывается темный солитон. Заданное в начальный момент пространственное распределение вида (52) (рис. 11, штриховая линия) при $\theta \approx 20$ сильно деформируется, а при $\theta \approx 50$ движение становится стохастическим (рис. 11, сплошная линия); это связано с ухудшением энергообмена между прямой и обратной волнами при образовании темного солитона (см. п. 2).

Формирование медленных стационарных импульсов, имеющих солитонную форму и характерные свойства, обусловлено эффектом своеобразного нелинейного туннелирования вблизи критических точек дисперсионной кривой нелинейной периодической структуры. Возможность применения подобных структур с активной нелинейностью для формирования стационарных автосолитонов обсуждалась в работе [23]. Скорость распространения автосолитонов определяется характерным временем энергообмена со средой, однако близость частоты возмущения к критической частоте системы, возможно, позволит существенно увеличить это время.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Fork R. L., Brito-Cruz C. H., Becker P. C., Shank C. V. // Opt. Lett. 1987. 12. P. 483. [2] Солитоны./Ред. Р. Буллаф и Ф. Кодри. М., 1983. [3] Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн.

М., 1990. [4] Сухоруков А. П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М., 1988. [5] Сухоруков А. П., Першеев Д. В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. 32, № 6. С. 37. [6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1974. [7] Kuehl H. H., Zhang C. Y. // Phys. Fluids. 1990. B2, N 5. P. 889. [8] Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М., 1988. [9] Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., 1973. [10] Хохлов Р. В. // Радиотехн. и электроника, 1961. 6. С. 1116. [11] Нелинейные волны / Ред. С. Лейбович и А. Сибасс. М., 1977. [12] Hirota R. // J. Phys. Soc. Japan. 1972. 33, N 5. P. 1456. [13] Лэм Дж. Введение в теорию солитонов. М., 1983. [14] Christodoulides D. N., Joseph R. I. // Phys. Rev. Lett. 1989. 62, N 15. P. 1746. [15] Mills D. N., Trullinger S. E. // Phys. Rev. 1987. B36, N 2. P. 947. [16] Lagriza A., Putterman S. // J. Fluid. Mech. 1984. 148, P. 723. [17] Ведерко А. В., Марченко В. Ф., Сухоруков А. П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. 32, № 3. С. 67. [18] Hongpong C., Xuequn Y. et al. // Adv. in Hydrodyn. 1988. 3, N 1 P. 46. [19] Сотин В. Е., Волощенко Ю. Н., Рыжов Ю. Н. // ЖТФ. 1984. 51, № 15. С. 902. [20] Burlakov V. M., Kiselev S. A., Rupasov V. I. // Phys. Lett. 1990. 147A, N 2—3. P. 130. [21] Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М., 1989. [22] Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Математическое моделирование в нелинейной оптике. М., 1989. [23] Кернер В. С., Осипов В. В. // УФН. 1989. 157, № 2. С. 201.

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1992. Т. 33. № 3

УДК 621.372.8

ТРЕХМЕРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВОЛНОВЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

А. Д. Григорьев, С. А. Силаев *)

Описываются математические модели волновых электромагнитных полей в трехмерной постановке. Рассматриваются особенности решения трехмерных задач, включая проблемы повышения точности и исключения ложных решений. Приводятся сведения о зарубежных программах для трехмерных спектральных задач, даются их сравнительные характеристики. Описываются алгоритмы и результаты численного моделирования для отечественной программы ISFEL3D.

Введение

Переменные во времени электромагнитные поля широко применяются в современной науке и технике. Математический аппарат, используемый для анализа этих полей (предполагается использование аппарата классической электродинамики), существенно зависит от характерного времени изменения поля t_{ch} и максимального размера рассматриваемой области пространства L .

В радиодиапазоне ($ct_{ch} \gg L$, где c — скорость света в вакууме) для анализа электромагнитных явлений используется теория цепей с сосредоточенными параметрами. В оптическом диапазоне ($ct_{ch} \ll L$) электромагнитные процессы адекватно описываются методами физической или геометрической оптики. Однако в микроволновом диапазоне, где, как правило, $ct_{ch} \approx L$ и необходимо учитывать волновые эффекты, указанные выше приближенные методы неприменимы. Для описания таких полей, которые далее будем называть волновыми, необходимо использовать полную систему уравнений электродинамики, что существенно усложняет анализ. Так как в этом диапазоне экспериментальное исследование электромагнитных полей сопряжено со значи-

*) Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина).