

М., 1990. [4] Сухоруков А. П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М., 1988. [5] Сухоруков А. П., Першеев Д. В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. 32, № 6. С. 37. [6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1974. [7] Kuehl H. H., Zhang C. Y. // Phys. Fluids. 1990. B2, N 5. P. 889. [8] Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М., 1988. [9] Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., 1973. [10] Хохлов Р. В. // Радиотехн. и электроника, 1961. 6. С. 1116. [11] Нелинейные волны / Ред. С. Лейбович и А. Сибасс. М., 1977. [12] Hirota R. // J. Phys. Soc. Japan. 1972. 33, N 5. P. 1456. [13] Лэм Дж. Введение в теорию солитонов. М., 1983. [14] Christodoulides D. N., Joseph R. I. // Phys. Rev. Lett. 1989. 62, N 15. P. 1746. [15] Mills D. N., Trullinger S. E. // Phys. Rev. 1987. B36, N 2. P. 947. [16] Lagriza A., Putterman S. // J. Fluid. Mech. 1984. 148, P. 723. [17] Ведерко А. В., Марченко В. Ф., Сухоруков А. П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. 32, № 3. С. 67. [18] Hongpong C., Xuequn Y. et al. // Adv. in Hydrodyn. 1988. 3, N 1 P. 46. [19] Сотин В. Е., Волощенко Ю. Н., Рыжов Ю. Н. // ЖТФ. 1984. 51, № 15. С. 902. [20] Burlakov V. M., Kiselev S. A., Rupasov V. I. // Phys. Lett. 1990. 147A, N 2—3. P. 130. [21] Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М., 1989. [22] Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Математическое моделирование в нелинейной оптике. М., 1989. [23] Кернер В. С., Осипов В. В. // УФН. 1989. 157, № 2. С. 201.

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1992. Т. 33. № 3

УДК 621.372.8

ТРЕХМЕРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВОЛНОВЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

А. Д. Григорьев, С. А. Силаев *)

Описываются математические модели волновых электромагнитных полей в трехмерной постановке. Рассматриваются особенности решения трехмерных задач, включая проблемы повышения точности и исключения ложных решений. Приводятся сведения о зарубежных программах для трехмерных спектральных задач, даются их сравнительные характеристики. Описываются алгоритмы и результаты численного моделирования для отечественной программы ISFEL3D.

Введение

Переменные во времени электромагнитные поля широко применяются в современной науке и технике. Математический аппарат, используемый для анализа этих полей (предполагается использование аппарата классической электродинамики), существенно зависит от характерного времени изменения поля t_{ch} и максимального размера рассматриваемой области пространства L .

В радиодиапазоне ($ct_{ch} \gg L$, где c — скорость света в вакууме) для анализа электромагнитных явлений используется теория цепей с сосредоточенными параметрами. В оптическом диапазоне ($ct_{ch} \ll L$) электромагнитные процессы адекватно описываются методами физической или геометрической оптики. Однако в микроволновом диапазоне, где, как правило, $ct_{ch} \approx L$ и необходимо учитывать волновые эффекты, указанные выше приближенные методы неприменимы. Для описания таких полей, которые далее будем называть волновыми, необходимо использовать полную систему уравнений электродинамики, что существенно усложняет анализ. Так как в этом диапазоне экспериментальное исследование электромагнитных полей сопряжено со значи-

*) Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина).

тельными трудностями, роль математического моделирования волновых электромагнитных полей существенно возрастает.

В настоящее время у нас в стране и за рубежом разработаны математические модели волновых электромагнитных полей различного уровня, отличающиеся степенью универсальности, точностью, объемом вычислений и другими параметрами. При этом наибольшую адекватность обеспечивают модели, использующие непосредственное решение уравнений электродинамики (полевые модели), развитие которых началось в середине 60-х годов, когда появились достаточно мощные ЭВМ.

1. Типы краевых задач электродинамики

В классическом приближении математическое моделирование волновых электромагнитных полей основано на решении краевой задачи электродинамики, т. е. решении уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{st}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (4)$$

в некоторой области V , ограниченной поверхностью S , на которой заданы определенные граничные условия. Если область V не ограничена, задачу называют внешней, в противном случае говорят о внутренней задаче. Так как многие внешние задачи моделирования микроволновых полей (например, задачу расчета поля в регулярных линиях передачи) можно свести к внутренним, в дальнейшем рассматриваются в основном внутренние краевые задачи.

Краевые задачи электродинамики имеют различные формулировки, вид которых зависит от особенностей рассматриваемых электромагнитных процессов. Так, моделирование переходных процессов, а также явлений в нелинейных средах требует решения уравнений Максвелла (1)–(4), содержащих время в качестве независимой переменной.

Анализ стационарных процессов в линейных средах обычно удобнее проводить на заданной частоте, используя уравнения Максвелла для комплексных амплитуд, так как при этом сокращается число независимых переменных. Эти задачи, в свою очередь, можно разделить на спектральные (задачи на собственные значения), если в области V и на ее границе отсутствуют источники поля, задачи возбуждения, если необходимо найти поле заданных в области V источников, и задачи рассеяния, возникающие в том случае, когда необходимо рассчитать поле, возникающее в области V при возбуждении его волной, проходящей через участок границы.

При решении внутренних краевых задач в частотной области функции, описывающие электромагнитное поле, должны быть комплексными (комплексные задачи). Однако, если заполняющая область V среда недиссипативна, при решении спектральных и некоторых задач рассеяния можно использовать действительные функции поля, что позволяет вдвое уменьшить число неизвестных задачи.

Сложность решения системы уравнений электродинамики, образующей ту или иную краевую задачу, существенно зависит от числа неизвестных функций и их размерности. Эти факторы определяются в свою очередь свойствами симметрии области V и характеристиками за-

полняющей ее среды. С этой точки зрения задачи электродинамики делят на классы. Если область обладает элементами симметрии, позволяющими разделить переменные в уравнениях Максвелла или эквивалентных им, задача сводится к двумерной скалярной (одна неизвестная функция) или векторной (две или три неизвестных функции). Моделирование поля в произвольной области требует решения трехмерной векторной задачи.

Таблица 1

Размерность задачи	Тип функций	Уравнение поверхности	Свойства поля	Свойства среды
2	Скалярные	$F(x_1, x_2) = 0$ $F(x_1, z) = 0$	$\partial/\partial z = ik_z$ $\partial/\partial x_2 = 0$	Однородная, изотропная Однородная, изотропная
	Векторные	$F(x_1, x_2) = 0$ $F(x_1, z) = 0$ $F(x_1, z) = 0$	$\partial/\partial z = ik_z$ $\partial/\partial x_2 = 0$ $\partial/\partial x_2 = im$	Неоднородная, анизотропная Неоднородная, анизотропная Однородная, изотропная
3	Векторные	$F(x_1, x_2, z) = 0$	—	Произвольные

Классы спектральных задач для различных микроволновых устройств приведены в табл. 1. Отметим, что алгоритмы решения векторных и комплексных задач значительно сложнее, чем алгоритмы скалярных задач той же размерности.

Как отмечено выше, интенсивная разработка алгоритмов и программ численного решения внутренних краевых задач электродинамики началась в 60-х гг. При этом основное внимание уделялось спектральным задачам. К концу 70-х — началу 80-х гг. были разработаны эффективные универсальные программы решения двумерных скалярных, а затем и векторных действительных задач (SUPERFISH [1], MULTIMODE [2], AZIMUTH [3] и др.). И хотя еще существуют проблемы в области разработки двумерных алгоритмов, с начала 80-х гг. основные усилия разработчиков сосредоточились на решении трехмерных задач электродинамики.

2. Особенности решения трехмерных задач

Рассмотрим, для определенности, внутреннюю краевую задачу электродинамики, сформулированную в частотной области. В этом случае используются уравнения Максвелла относительно комплексных амплитуд:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} - i\omega \epsilon_0 \epsilon_r \dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{J}}_{st}, \quad (5)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} + i\omega \mu_0 \mu_r \dot{\mathbf{H}} = 0, \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \epsilon_r \dot{\mathbf{E}} = \rho_{st}, \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \mu_r \dot{\mathbf{H}} = 0, \quad (8)$$

где ω — круговая частота, ϵ_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные, ϵ_r и μ_r — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

Эти уравнения можно решать непосредственно, но можно с целью уменьшения числа неизвестных функций перейти к уравнениям второго порядка:

$$\operatorname{rot} \epsilon_r^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} - k^2 \mu_r \dot{\mathbf{H}} = \operatorname{rot} (\epsilon_r^{-1} \mathbf{J}_{st}), \quad (9)$$

$$\operatorname{rot} \mu_r^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} - k^2 \epsilon_r \dot{\mathbf{E}} = -i\omega \mu_0 \mathbf{J}_{st}, \quad (10)$$

которым соответствуют функционалы

$$F_1 = \int_V [\epsilon_r^{-1} |\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}|^2 - k^2 \dot{\mathbf{H}}^* \mu_r \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^* \operatorname{rot} (\epsilon_r^{-1} \mathbf{J}_{st})] dV, \quad (11)$$

$$F_2 = \int_V [\mu_r^{-1} |\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}|^2 - k^2 \dot{\mathbf{E}}^* \epsilon_r \dot{\mathbf{E}} + i\omega \mu_0 \dot{\mathbf{E}}^* \mathbf{J}_{st}] dV, \quad (12)$$

стационарные при использовании решения уравнений (9) и (10), причем функционал (11) имеет естественные граничные условия типа электрической стенки (на идеальном проводнике):

$$\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{H}} = 0, \quad (13)$$

а функционал (12) — типа магнитной стенки (на идеальном магнетике):

$$\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{E}} = 0, \quad (14)$$

где \mathbf{n} — орт нормали к поверхности S . На границе раздела сред касательные составляющие векторов поля должны быть непрерывны:

$$\mathbf{n} \times (\dot{\mathbf{E}}_1 - \dot{\mathbf{E}}_2) = 0, \quad (15)$$

$$\mathbf{n} \times (\dot{\mathbf{H}}_1 - \dot{\mathbf{H}}_2) = 0. \quad (16)$$

Использование условия (13) и функционала (11) предпочтительнее в тех случаях, когда большую часть поверхности S можно считать идеально проводящей. В выражениях (9)–(12) $k = \omega/c$ — волновое число.

Важнейшим этапом численного решения уравнений электродинамики является их дискретизация, т. е. переход от функциональных уравнений к алгебраическим и от непрерывных функций к дискретным, приближенно описывающим поле в исследуемой области. Хотя существует много различных способов дискретизации [4], до настоящего времени для решения трехмерных задач используются только три из них — это методы конечных разностей (МКР), конечного интегрирования (МКИ) и конечных элементов (МКЭ). Не останавливаясь на подробном описании этих методов, отметим, что дискретизации с помощью МКР и МКЭ подвергают обычно уравнения второго порядка, тогда как МКИ применяется непосредственно к уравнениям (5)–(8).

В результате дискретизации получается матричное уравнение

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad (17)$$

где \mathbf{X} — вектор-столбец, элементами которого являются значения составляющих электромагнитного поля в выбранных N точках (узлах) области V , \mathbf{A} и \mathbf{B} — квадратные матрицы порядка $3N$ для действительной или $6N$ для комплексной задачи, \mathbf{F} — вектор-столбец заданных

токов и полей, $\Lambda = k^2$ — заданное число при решении задач возбуждения и рассеяния или искомое собственное число для спектральных задач ($\mathbf{F} = 0$). Как правило, решается частичная проблема собственных значений, т. е. требуется найти несколько собственных чисел, принадлежащих заданному интервалу.

Из уравнений (5)—(8) следует, что спектральная задача имеет две группы решений: при $\omega \neq 0$ получаем вихревые решения ($\text{div } \mu_2 \dot{\mathbf{H}} = \text{div } \epsilon_r \dot{\mathbf{E}} = 0$, $\text{rot } \dot{\mathbf{H}} \neq 0$, $\text{rot } \dot{\mathbf{E}} \neq 0$), а при $\omega = 0$ — потенциальные ($\text{div } \epsilon_r \dot{\mathbf{E}} \neq 0$, $\text{div } \mu_r \dot{\mathbf{H}} \neq 0$, $\text{rot } \dot{\mathbf{E}} = \text{rot } \dot{\mathbf{H}} = 0$). Собственное значение $\omega_0 = 0$ имеет, таким образом, бесконечно большую кратность вырождения.

За счет погрешностей, вносимых при дискретизации и последующем решении системы алгебраических уравнений, вырождение снимается и появляются ненулевые собственные значения, соответствующие потенциальным решениям, не имеющим физического смысла (ложные решения). Так как эти собственные значения могут располагаться внутри интервала поиска, возникает задача их идентификации и исключения. Эта проблема не возникает при решении двумерных задач, так как в качестве искомого функции в них обычно используются векторные потенциалы или векторы Герца, и описываемые ими поля автоматически оказываются вихревыми.

Для идентификации вихревых решений используется неравенство $\int_V |\text{rot } \dot{\mathbf{H}}|^2 dV \gg \int_V |\text{div } \mu_r \dot{\mathbf{H}}|^2 dV$ (или аналогичное для вектора $\dot{\mathbf{E}}$). Такая проверка требует больших вычислительных затрат, так как в процессе решения вычисляются электромагнитные поля всех видов колебаний и необходимо проверять каждое из них. Более эффективны алгоритмы, позволяющие вывести спектр ложных собственных значений за пределы интервала поиска. Один из таких алгоритмов состоит в переходе от уравнения (11) к уравнению

$$\text{rot } \epsilon_r^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{H}} + p \text{grad div } \mu_r \dot{\mathbf{H}} - k^2 \mu_r \dot{\mathbf{H}} = 0. \quad (18)$$

Для вихревых решений k^2 не зависит от параметра p , так как $\text{div } \mu_r \dot{\mathbf{H}} = 0$, в то время как для ложных решений такая зависимость имеется. Выбрав подходящее значение «штрафного» параметра p , можно сдвинуть спектр ложных собственных значений так, чтобы он не накладывался на интервал поиска. Заранее, однако, определить требуемое значение p для данной задачи затруднительно.

При решении задач возбуждения и рассеяния проблема исключения ложных решений не возникает, однако искомые функции становятся комплексными, что, при прочих равных условиях, в два раза увеличивает размерность векторов и матриц. Существуют приемы, позволяющие в ряде случаев исключить необходимость работы с комплексными числами за счет многократного решения действительной задачи с различными граничными условиями. Один из таких приемов рассматривается ниже.

Важное значение при решении трехмерных задач приобретает описание формы анализируемого объекта и наглядное представление результатов расчета. Требования удобства пользования моделью обуславливают широкое использование в этих целях графических средств.

В настоящее время за рубежом используется несколько программ решения трехмерных внутренних краевых задач электродинамики, разработанных в 1982—1985 гг. Краткие характеристики некоторых из них по данным работ [5—7] приведены в табл. 2.

Таблица 2

Программа	Год публикации	Разработчик	Метод дискретизации	Тип ЭВМ
CAV3D	1982	ФРГ	МКР	CYBER
ARGUS	1983	SAIC (США)	МКР	CRAY, VAX
MAFIA	1985	DESY (ФРГ)	МКИ	IBM, VAX

Результаты тестирования программ CAV3D и MAFIA на резонаторах простой формы приведены в табл. 3, 4. Расчетные собственные частоты цилиндрического резонатора сравниваются с аналитическими значениями, а тороидального (рис. 1) — с результатами вычисления

Таблица 3

Вид колебаний	f , МГц		
	Аналитический метод	MAFIA $N_s = 7136$	ISFEL3D $N_s = 175$
E_{010}	1147,4	1152,6	1147,6
E_{011}	1370,5	1374,7	1371,0
H_{111}	1154,7	1153,3	1155,2
H_{112}	1737,4	1734,2	1748,1
E_{110}	1828,2	1834,1	1829,5
E_{111}	1976,0	1981,2	1977,5
H_{211}	1638,6	1629,3	1639,3

Примечание. Время счета по программе MAFIA на ЭВМ VAX-11/750 составляет 90 мин на каждые 5 видов колебаний.

по двумерной программе SUPERFISH, обладающей высокой точностью. Как видно, погрешность расчета цилиндрического резонатора по трехмерным программам не превышает 0,5%. Эта погрешность обусловлена в основном сравнительно грубой аппроксимацией формы рас-

Таблица 4

ω , мм	f , МГц		
	SUPERFISH $N_s = 2704$	CAV3D $N_s = 7436$	MAFIA $N_s = 5292$
55	882,63	896,38 (+1,5%)	880,01 (-0,3%)
35	796,14	789,64 (-0,8%)	785,94 (-1,2%)
20	661,10	641,36 (-3,0%)	656,13 (-0,8%)
5	421,97	382,45 (-9,0%)	409,68 (-2,9%)

четной области. При расчете более сложных тороидальных резонаторов погрешность увеличивается, достигая 9% для CAV3D и 3% для MAFIA на основном виде колебаний. Отметим также сравнительное большое время счета по трехмерным программам. Эти недостатки внутренне присущи методам конечных разностей и конечного интегрирования. Более широкие возможности описания областей с криволинейными границами и увеличения точности аппроксимации поля предоставляет метод конечных элементов.

3. Алгоритм решения трехмерных задач методом конечных элементов

Описываемый алгоритм предназначен для решения спектральных задач и задач рассеяния в закрытых трехмерных областях произвольной формы, заполненных неоднородным изотропным диэлектриком без потерь. Алгоритм реализован в программе ISFEL3D, разрабатываемой в ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина) [8].

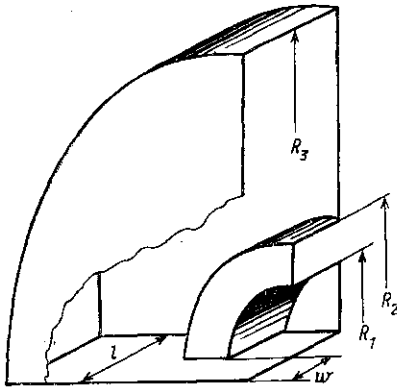


Рис. 1. Расчетная часть тороидального резонатора с трубкой дрейфа: $R_1=16,5$ мм; $R_2=33$ мм; $R_3=130$ мм; $l=55$ мм

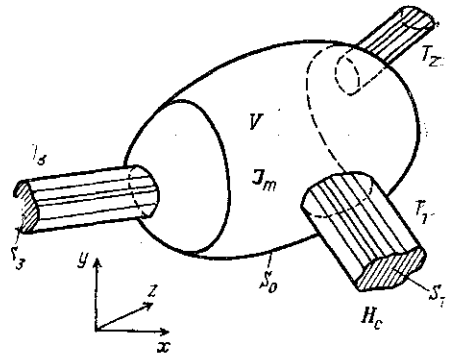


Рис. 2. Многополюсное СВЧ-устройство

Рассматривается задача о нахождении гармонически изменяющихся во времени электромагнитных полей в области V , ограниченной идеально проводящей поверхностью S_0 с отверстиями S_1, S_2, \dots, S_Q (рис. 2), на одном из которых может быть задана тангенциальная составляющая стороннего магнитного поля \mathbf{H} :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{H}_{st}, \quad (19)$$

возбуждающего область V , а на остальных отверстиях — $S_1, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_Q$ — в целях сохранения вещественной природы задачи должны выполняться граничные условия типа электрической (13) или магнитной (14) стенки. Внутри области V допускается также существование сторонних объемных источников поля в виде магнитного тока с плотностью \mathbf{J}_m . Введя вспомогательный вектор $\mathbf{J} = i\sqrt{\epsilon_0/\mu_0} \mathbf{J}_m$, сведем задачу о вынужденных колебаниях в области V к решению уравнения (18), в правой части которого стоит величина $k\mathbf{J}$ с граничными условиями (13) или (14) на плоскостях симметрии, условиями (15) на поверхностях раздела сред со скачкообразным изменением ϵ_r и условием (19) на возбуждающем отверстии. В уравнении (18) полагается $\epsilon_r = \epsilon_r(x, y, z), \mu_r = \text{const}$.

Уравнению (18) ставится в соответствие функционал

$$F(\mathbf{H}) = \frac{1}{2} \int_V [\epsilon^{-1} (\text{rot } \mathbf{H})^2 + \rho (\text{div } \mu_r \mathbf{H})^2 - k^2 \mu_r \mathbf{H}^2 - k\mathbf{H}\mathbf{J}] dV, \quad (20)$$

стационарный при использовании его решений и имеющий естествен-

ные граничные условия (13), (15). Условия (14) и (19) учитываются далее при построении дискретного аналога функционала (20).

Расчетная область разбивается на P конечных элементов и (20) представляется суммой интегралов. $F(\mathbf{H}) = \sum_{e=1}^P F_e(\mathbf{H})$, где

$$F_e(\mathbf{H}) = \int_{V_e} (\epsilon_r^{-1} \tilde{\mathbf{H}}_e^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \tilde{\mathbf{H}}_e + \rho \mu_r \tilde{\mathbf{H}}_e^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mu_r \tilde{\mathbf{H}}_e - k^2 \mu_r \tilde{\mathbf{H}}_e^T \tilde{\mathbf{H}}_e) dV - k \int_{V_e} \tilde{\mathbf{H}}_e^T \tilde{\mathbf{J}}_e dV_e \quad (21)$$

— элементный вклад;

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -\partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & -\partial/\partial x \\ -\partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

— матричные операторы, заменяющие соответственно операции rot и div;

$$\tilde{\mathbf{H}}_e = [\tilde{H}_{ex} \tilde{H}_{ey} \tilde{H}_{ez}]^T, \quad \tilde{\mathbf{J}}_e = [\tilde{J}_{ex} \tilde{J}_{ey} \tilde{J}_{ez}]^T$$

— пробные функции, аппроксимирующие магнитное поле и известное распределение плотности магнитного тока в данном элементе; V_e — объем элемента.

В качестве элементов разбиения используются криволинейные тетраэдры, призмы и гексаэдры, позволяющие плотно заполнить исследуемую трехмерную область. Геометрическое описание криволинейных элементов основывается на отображении регулярных (с плоскими гранями) элементов, заданных в подходящей локальной системе координат ξ, ζ, η , в глобальную систему x, y, z (рис. 3). Это преобразование осуществляется посредством соотношений

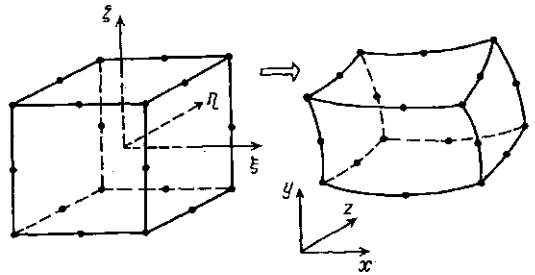


Рис. 3. Преобразование гексаэдра из локальной системы координат ξ, ζ, η в глобальную x, y, z

$$x = \sum_{j=1}^{M_e} N_j(\xi, \zeta, \eta) x_{ej}, \quad y = \sum_{j=1}^{M_e} N_j(\xi, \zeta, \eta) y_{ej}, \quad z = \sum_{j=1}^{M_e} N_j(\xi, \zeta, \eta) z_{ej}, \quad (22)$$

где M_e — число узлов в элементе ($M_e = 10, 15$ и 20 соответственно для тетраэдра, призмы и гексаэдра); x_{ej}, y_{ej}, z_{ej} — декартовы координаты узлов (узлы располагаются в углах и на ребрах элемента), $N_j(\xi, \zeta, \eta)$ — базисные интерполирующие функции, конструируемые из неполных квадратичных полиномов [9].

Преобразование координат позволяет упростить процедуру интегрирования и записать элементный вклад (21) в следующем виде:

$$F_e(\mathbf{H}) = \frac{1}{2} \int_{V_e} (\epsilon_r^{-1} \tilde{\mathbf{H}}_e^T \mathbf{G}^T \mathbf{G} \tilde{\mathbf{H}}_e + \rho \mu_r^2 \tilde{\mathbf{H}}_e^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \tilde{\mathbf{H}}_e - k^2 \mu_r \tilde{\mathbf{H}}_e^T \tilde{\mathbf{H}}_e - k \tilde{\mathbf{H}}_e^T \tilde{\mathbf{J}}_e) |I_e| d\xi d\zeta d\eta. \quad (23)$$

Здесь I_e — якобиан преобразования (22), G и T — матричные операторы, получаемые заменой в операторах R и D производных эквивалентными выражениями, найденными дифференцированием соотношений (22) по локальным координатам. Интегрирование в (23) осуществляется в пределах $-1 \leq \xi, \zeta, \eta \leq 1$ для гексаэдра, $0 \leq \xi, \eta \leq 1, 0 \leq \zeta \leq 1 - \xi$ для призмы и $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \zeta \leq 1 - \xi, 0 \leq \eta \leq 1 - \xi - \zeta$ для тетраэдра.

Пробные функции \tilde{H}_e и аппроксимирующие J_e в пределах элемента определяются с помощью тех же узлов и базисных функций, что и в соотношениях (22) (изопараметрические конечные элементы). При этом

$$\tilde{H}_e = L_e X_e, \quad \tilde{J}_e = L_e Z_e, \quad (24)$$

где

$$X_e = [\tilde{H}_x(x_{e1}, y_{e1}, z_{e1}) \tilde{H}_y(x_{e1}, y_{e1}, z_{e1}) \tilde{H}_z(x_{e1}, y_{e1}, z_{e1}) \dots \dots \tilde{H}_z(x_{eM_e}, y_{eM_e}, z_{eM_e})]^T,$$

$$Z_e = [\tilde{J}_x(x_{e1}, y_{e1}, z_{e1}) \tilde{J}_y(x_{e1}, y_{e1}, z_{e1}) \tilde{J}_z(x_{e1}, y_{e1}, z_{e1}) \dots \dots \tilde{J}_z(x_{eM_e}, y_{eM_e}, z_{eM_e})]^T$$

— векторы узловых значений пробных и аппроксимирующих функций;

$$L_e = [N_1 N_2 \dots N_{M_e}]$$

— прямоугольная $3 \times 3M_e$ матрица из M_e блоков

$$N_j = \begin{bmatrix} N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, M_e.$$

С учетом выражений (24) элементный вклад (23) может быть записан через значения составляющих магнитного поля в узлах элемента.

Применение формул численного интегрирования с учетом стационарности функционала ($\partial F_e(\mathbf{H}) / \partial X_{ej} = 0$) приводит к системе алгебраических уравнений

$$W'_e X_e = k Q'_e Z_e, \quad (25)$$

где $W'_e = D'_e - k^2 B'_e$; D'_e, B'_e, Q'_e — квадратные матрицы порядка $3M_e$, причем $Q'_e = \mu_r^{-1} B'_e$.

Объединив уравнения (25), записанные для всех P элементов, получим матричное уравнение задачи

$$W' X = k Q' Z, \quad (26)$$

где W' и Q' — квадратные матрицы порядка $3N$ (N — общее число узлов объединенного набора элементов); X, Z — вектор-столбцы узловых значений составляющих магнитного поля и плотности магнитного тока во всей совокупности узлов.

Уравнение (26) не учитывает всех граничных условий исходной дифференциальной задачи, так как матрица W' построена в предположении, что в процессе решения варьируются все компоненты вектора X .

Граничные условия (13) и (15) являются естественными и не требуют корректировки матрицы W' . Для учета условия (19) компоненты вектора X перегруппировываются таким образом, чтобы его можно было представить как следующую комбинацию вектор-столбцов варьируемых X_V и заданных X_C составляющих поля:

$$X = [X_V X_C]^T.$$

Матрица W' после вычеркивания в ней строк, принадлежащих вектор-столбцу X_C , также разделяется на две матрицы — W_V и W_C соответственно порядка $N_V \times N_V$ и $N_V \times N_C$, где N_V и N_C — размерности вектор-столбцов X_V и X_C . В результате матричная задача с учетом всех граничных условий имеет вид

$$W_V X_V = k Q Z - W_C X_C. \quad (27)$$

К полученному уравнению сводятся разнообразные задачи электродинамики, включая, например, расчет параметров рассеяния сложных устройств или исследование спектральных характеристик колебательных систем. Рассмотрим подробнее возможные частные формулировки.

1. Расчет n собственных видов колебаний замкнутой структуры, ближайших к заданной частоте f_0 . Пусть электродинамическая структура ограничена идеально-проводящей оболочкой S_0 и отсутствует связь с внешним пространством, т. е. $X_C = 0$. Положим $Z = k X_V^{(0)}$, где $X_V^{(0)}$ — некоторое начальное приближение к искомому вектору варьируемых компонент X_V . Сформировав n векторов начальных приближений, из (27) получаем систему матричных уравнений

$$W_V X_{Vi}^{(i)} = (k_{0i}^{(0)})^2 Q X_{Vi}^{(0)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

решив которую найдем следующее более точное приближение $X_{Vi}^{(1)}$ к вектору X_{Vi} для i -го вида колебаний. Начальные значения искомого волнового числа $k_{0i}^{(0)}$ можно взять равными $k_0 = 2\pi f_0 / c$. Матрица W_V строится для $k = k_0$ и в процессе расчета не изменяется. Отыскание следующих приближений $X_{Vi}^{(m)}$ и $k_{0i}^{(m)}$ осуществляется методом итераций в подпространстве [10], позволяющим успешно выделять даже кратные собственные значения.

2. Расчет отдельного вида колебаний замкнутой структуры вблизи частоты f_0 . В предыдущем случае для увеличения точности расчета наиболее далеко отстоящих от f_0 видов колебаний число итерируемых векторов должно быть больше n , что увеличивает объем вычислений. На практике часто представляют интерес характеристики отдельного вида колебаний, локализованного вблизи интересующей частоты f_0 . Отыскание собственной частоты этого вида осуществляется путем последовательного решения задач о вынужденных колебаниях на нескольких определенным образом выбранных частотах. Структура возбуждается в единственной точке на идеально-проводящей оболочке сторонним магнитным полем \vec{H}_C , имеющим единичное значение одной из проекций на координатные оси. В результате в уравнении (27) вектор $Z = 0$, а вектор X_C имеет единственную компоненту, равную единице ($N_C = 1$).

Уравнение (27) решается для заданного волнового числа k_0 , и найденный вектор X_V совместно с X_C используется для оценки следую-

щего приближения к искомому волновому числу k с помощью функционала:

$$k^2 = \frac{\int_V [\epsilon_r^{-1} (\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}})^2 + \rho (\operatorname{div} \mu_r \tilde{\mathbf{H}})^2] dV}{\int_V \mu_r \tilde{\mathbf{H}}^2 dV}. \quad (28)$$

Матрица \mathbf{W}_V строится для нового k и решение задачи (27) повторяется вновь с последующим уточнением k по формуле (28). Итерационный процесс сходится обычно за 5—6 итераций с относительной погрешностью по частоте 10^{-4} — 10^{-5} . В целях сокращения времени счета текущий вектор \mathbf{X}_V используется в качестве стартового вектора на следующей итерации.

Описанный алгоритм удобно использовать для исследования резонансных свойств структур, реально возбуждаемых через волновой канал T_i полем определенного типа волны. В этом случае неоднородное условие Дирихле (19) должно описывать касательное к поверхности резонатора магнитное поле на возбуждающем отверстии S_i .

3. Вычисление элементов матрицы рассеяния четырехполюсника. Задача решается в предположении, что в волновых каналах четырехполюсника T_1, T_2 реализуется одномодовый режим работы. Во входном сечении S_1 канала T_1 задается возбуждающее поле $\mathbf{H}_c = A\mathbf{h}$, где \mathbf{h} — поперечное магнитное поле распространяющегося типа волны, удовлетворяющее условию нормировки $\int_{S_1} (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) dS = 1$,

A — произвольный коэффициент. Вектор \mathbf{h} может быть описан аналитически или найден численно.

Для симметричного четырехполюсника область V ограничивается плоскостью возбуждения и плоскостью симметрии, на которой поочередно задаются граничные условия типа электрической или магнитной стенки. Неизвестное магнитное поле находится из решения матричного уравнения (27) при $\mathbf{Z} = 0$. Для вычисления элементов матрицы рассеяния используется не сам вектор $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_V \mathbf{X}_c]^T$, а найденное с его помощью из (26) стационарное значение функционала

$$F(\mathbf{H}) = 0,5 \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X}. \quad (29)$$

Данный подход подробно обоснован в работе [11] и позволяет значительно повысить точность расчетов. Нетрудно показать, что комплексные элементы матрицы рассеяния относительно входного сечения четырехполюсника можно рассчитать по выражениям

$$2S_{11} = (a + b) + i(g - d); \quad 2S_{12} = (a - b) + i(g + d),$$

$$a = (F_m^2 - \theta)/(F_m^2 + \theta), \quad b = (F_e^2 - \theta)/(F_e^2 + \theta),$$

$$g = \omega \epsilon_0 F_e A^2 / (F_e^2 + \theta); \quad d = \omega \epsilon_0 F_m A^2 / (F_m^2 + \theta), \quad \theta = 0,25 \omega^2 \epsilon_0^2 A^4,$$

где F_m и F_e — значения функционала (29), полученные соответственно для магнитной и электрической стенок в плоскости симметрии.

В случае несимметричного четырехполюсника задача решается для трех положений плоскости короткого замыкания (электрической стенки) в канале T_2 . Элементы матрицы рассеяния находятся затем из системы уравнений по трем значениям функционала (29).

4. Программа ISFEL3D и примеры расчетов

Описанный алгоритм реализован в программе ISFEL3D [12], написанной на языке FORTRAN-77. Программные средства включают ряд процессоров (модулей), учитывающих специфику отдельных этапов решения задачи. Процессор геометрического моделирования предназначен для описания формы исследуемой области, физических характеристик заполняющей ее среды и генерирования сети конечных элементов (дискретизации области). Моделируемый объект представляется как совокупность базовых геометрических областей (примитивов базы) и их комбинаций, построенных на операциях объединения, пересечения и исключения. Предусмотрен графический контроль корректности получаемого конечно-элементного разбиения.

Процессор дискретизации уравнений математической модели формирует элементные матрицы D_e' , B_e' . Переход от них к полным матрицам системы W_V , W_C с учетом граничных условий (19) осуществляется в процессе счета. Последовательное наложение граничных условий в двух модулях уменьшает время построения численной модели, если требуется многократное решение задачи на нескольких частотах или с разными типами граничных условий, поскольку корректировка однажды сформированной матрицы обходится намного дешевле, чем ее построение для конкретной задачи.

Постпроцессор позволяет рассчитать интересующие локальные и интегральные параметры анализируемого устройства. Его особенностью является наличие

блоков обработки аналитических формул. Пользователь описывает требуемую величину в виде арифметического выражения, а затем может получить ее распределение в табличной или графической форме вдоль линии, в заданной плоскости, на поверхности или в объеме, а также вычислить интеграл от этого выражения.

В табл. 3, 5 представлены результаты расчета собственной частоты f и собственной добротности Q нескольких видов колебаний в цилиндрическом резонаторе. Для геометрического описания четверти цилиндра использовалось 18 криволинейных гексаэдров и 9 призм (всего 175 узлов). Время решения t на ЭВМ типа ЕС-1061 составило 1—3 мин на каждый вид колебаний. Распределение напряженности магнитного поля в продольном сечении цилиндра для вида колебаний E_{011} , полученное постпроцессором, показано на рис. 4.

В целях сравнения программы ISFEL3D с другими известными программами проводился расчет частоты основного вида колебаний в цилиндрическом резонаторе с трубкой дрейфа (см. рис. 1). Результа-

Таблица 5

Вид колебания	$Q_{\text{анал}}$	Q_{ISFEL3D}	$\Delta, \%$
E_{010}	34 171	34 186	0,04
H_{111}	36 248	36 039	-0,55

Таблица 6

$\omega, \text{мм}$	$f, \text{МГц}$	Число узлов	$\Delta, \%$	$t, \text{мин}$
55	882,71	577	0,01	10
35	799,92	558	0,47	9
20	666,76	539	0,85	9
5	428,92	520	1,6	8

Таблица 7

$\omega, \text{мм}$	$s, \text{мм}$	$f, \text{МГц}$			$t, \text{мин}$
		Аналитический метод	[13]	ISFEL3D	
0	30	1232,4	1229,1	1235,1	5,5
12,5	17,5	—	2638,1	2642,8	4,0

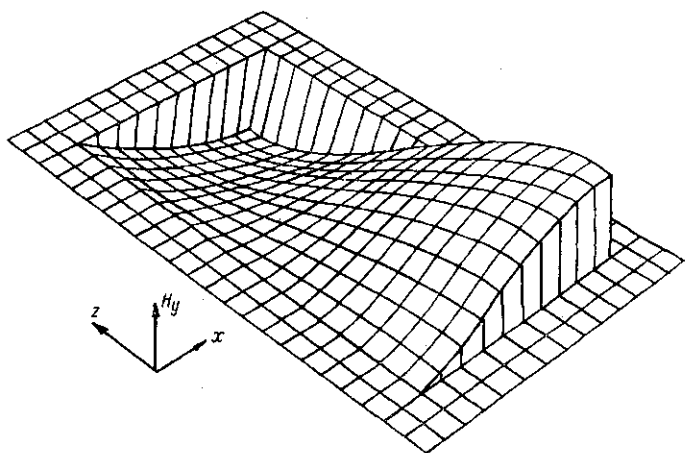


Рис. 4. Распределение составляющей H_y в меридианальной плоскости цилиндра для вида колебаний E_{011}

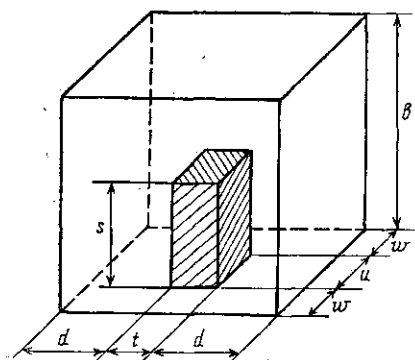


Рис. 5. Резонатор с неоднородным диэлектрическим заполнением: $\epsilon_r=16$; $d=37,5$ мм; $t=25$ мм; $b=30$ мм; $u=40-2w$

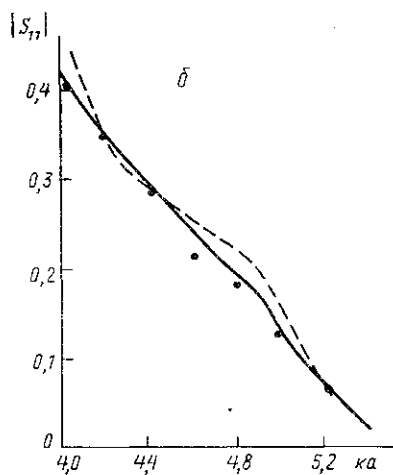
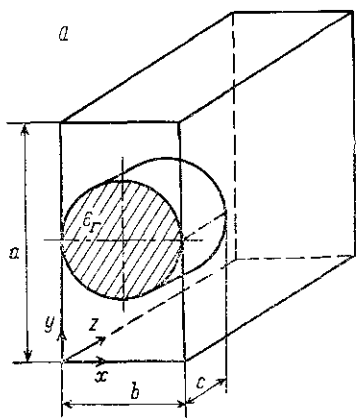


Рис. 6. Диэлектрический цилиндр в прямоугольном волноводе (а) и частотная зависимость модуля коэффициента отражения волны H_{01} (б) при $\epsilon_r=2$, $b=a/2$, $c=a/4$

ты сведены в табл. 6. Число элементов изменялось от 78 при $\omega=5$ мм до 96 при $\omega=55$ мм. Сравнение с табл. 4 показывает, что ISFEL3D обеспечивает лучшее совпадение результатов с программой SUPERFISH, чем CAV3D и MAFIA, при значительно меньшем числе узлов.

В качестве примера структур с неоднородным заполнением рассчитывался резонатор с диэлектрической вставкой (рис. 5). С учетом двух плоскостей симметрии моделировалась четвертая часть резонатора, которая разбивалась на 64 гексаэдра (425 узлов). Собственные частоты основного вида колебаний для двух вставок представлены в табл. 7.

Рис. 6 демонстрирует результаты решения задачи рассеяния волны H_{01} в прямоугольном волноводе на диэлектрическом цилиндре. Выбранный диапазон частот обеспечивает одномодовый режим. Структура имеет три плоскости симметрии, что позволяет моделировать 1/8 ее часть. Для описания задачи использовались 144 криволинейные призмы (541 узел). Расчетная зависимость модуля коэффициента отражения от волнового числа показана на рис. 6, б (сплошная кривая). Здесь же для сравнения приведены зависимости, взятые из работы [14], полученные вариационным методом (штриховая линия) и методом конечных элементов на регулярных тетраэдрах (точки). Время расчета по программе ISFEL3D на восьми частотах составило 45 мин.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Halbach K., Holsinger R. F. // Part. Accel. 1976. 7. P. 213. [2] Касчиева В. А., Касчиев М. С., Кочев В. Н., Федосеев А. И. Препринт ИФВЭ. № 82-92. Серпухов, 1982. [3] Григорьев А. Д., Силаев С. А. // Электронная техника. Сер. 1, Электроника СВЧ. 1984. 12. С. 60. [4] Григорьев А. Д., Янкевич В. Б. Резонаторы и резонаторные замедляющие системы СВЧ. М., 1984. [5] Wilhelm W. // Part. Accel. 1982. 12. P. 139. [6] Drobot A. T. et al. // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1985. 32. P. 2733. [7] Weiland T. // Part. Accel. 1985. 15. P. 227. [8] Силаев С. А. // Электронная техника. Сер. 1, Электроника СВЧ. 1989. 2. С. 25. [9] Сабоннадьер Ж.-К., Кулон Ж.-Л. Метод конечных элементов и САПР. М., 1989. [10] Писсанецки С. Технология разреженных матриц. М., 1988. [11] Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. М., 1986. [12] Силаев С. А. // Тез. докл. Всесоюз. семинара «Решение внутренних краевых задач электродинамики». Самара, 1990. С. 9. [13] Akhtarzad S., Johns P. B. // IEE Proc. 1975. 122. P. 1344. [14] Webb J. P., Maile G. L., Ferrari R. L. // IEE Proc. 1983. 130. 153.