

двухпоточковые ЛСЭ смогут в перспективе стать основными усилительными (и преобразовательными) системами в субмиллиметровом — инфракрасном диапазонах.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лопухин В. М. Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. М., 1953. [2] Пирс Дж. Лампа с бегущей волной. М., 1952. [3] Артюх И. Г., Камальдинова Г. Ш., Сандалов А. Н. Лазеры на свободных электронах. Ч. 2. //Обзоры по электронной технике. Сер. 1, Электроника СВЧ. Вып. 11. М., 1988. [4] Генераторы когерентного излучения на свободных электронах/Под ред. А. А. Рухадзе. М., 1983. [5] Маршалл Т. Лазеры на свободных электронах. М., 1987. [6] Кулиш В. В. Физика лазеров на свободных электронах. Общие положения. Деп. в Укр. НИИНТИ. № 1526 Ук-90 от 05.09.90. Киев, 1990. [7] Гапонов-Грехов А. В., Петелин М. И. //Вестн. АН СССР. 1979. № 4. С. 11. [8] Доклад американскому физическому обществу экспертной группы о научных и технических аспектах пучкового оружия //УФН. 1988. 155, № 4. С. 659. [9] Болонин О. И., Кулиш В. В., Пугачев В. П. //Укр. физ. журн. 1988. 33, № 10. С. 1465. [10] Болонин О. И., Кохманьски С. С., Кулиш В. В. //Acta Phys. Polon. 1989. A-76, № 3. P. 455. [11] Кулиш В. В. //Укр. физ. журн. 1991. 36, № 1. С. 28. [12] Кулиш В. В. //Укр. физ. журн. 1991. 36, № 5. С. 686. [13] Кулиш В. В., Пугачев В. П. //Физика плазмы. 1991. 17, № 6. С. 696. [14] Коцаренко Н. Я., Кулиш В. В. //ЖТФ. 1980. 50, № 2. С. 220. [15] Коцаренко Н. Я., Кулиш В. В. //Радиотехн. и электроника. 1980. 25, № 11. С. 2470. [16] Вильгельмсон Х., Вейланд Я. Когерентные нелинейные взаимодействия волн в плазме. М., 1981. [17] Ситенко А. Г. Флуктуация и нелинейные взаимодействия волн в плазме. Киев, 1977. [18] Захаров В. П., Кулиш В. В. //Радиотехн. и электроника. 1984. 29, № 6. С. 1162. [19] Давыдова Т. А., Захаров В. П., Кулиш В. В. //ЖТФ. 1987. 57, № 4. С. 687. [20] Elias L. R. //IEEE J. Quant. Electr. 1987. 23, № 9. P. 1470. [21] Ramian G., Elias L. R. //Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. 1988. A272. P. 81. [22] Артюх И. Г., Камальдинова Г. Ш., Сандалов А. Н. Лазеры на свободных электронах. Ч. 1. //Обзоры по электронной технике. Сер. 1, Электроника СВЧ. Вып. 19. М., 1987.

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1992. Т. 33, № 3

УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

А. С. Рошаль *)

Обсуждается современное состояние проблемы численного моделирования пучков заряженных частиц, распространяющихся в электродинамических системах и средах. Описываются особенности математических моделей заряженных пучков; характеризуются численные методы исследования, перспективы их совершенствования и развития.

Численное моделирование представляет собой в настоящее время основной метод теоретического исследования нелинейных процессов в заряженных пучках, имеющий общие черты как с «чисто» теоретическими методами, так и с экспериментом, но занимающий свое, самостоятельное место. Специалисты отмечают следующие достоинства численного моделирования по сравнению с аналитической теорией и экспериментом:

1) оно основано на фундаментальных, хорошо подтвержденных экспериментом физических уравнениях, таких, как уравнения движения заряженных частиц, уравнения Максвелла, уравнения Больцмана и Власова, уравнения гидродинамики;

*) Московский инженерно-физический институт.

2) позволяет исследовать процессы любой степени нелинейности, хотя пригодно и для проверки выводов линейной теории;

3) позволяет исследовать влияние различных физических явлений и факторов (пространственной анизотропии, неоднородностей, столкновений, диссипации, несинхронных взаимодействий и др.), учитывая или опуская их в алгоритмах моделирования.

4) открывает возможности сколь угодно детального анализа пространственно-временных характеристик процессов от микроскопических до космических масштабов путем соответствующего выбора шагов моделирования по пространству и времени;

5) позволяет изучать физические системы не только с идеализированными, но и с реальными краевыми условиями;

6) допускает «неразрушающую» диагностику заряженных пучков, в том числе на микроскопическом уровне, включая данные о распределении электромагнитного поля, плотности заряда, плотности тока и скорости заряженных частиц, корреляционных и спектральных характеристиках процессов.

Численному моделированию пучков заряженных частиц посвящена обширная литература, в том числе несколько монографий [1—6]. В данной работе обсуждается современное состояние этой проблемы с использованием результатов, полученных автором.

1. Математические модели заряженных пучков

В общей постановке кинетика заряженных пучков описывается самосогласованной системой уравнений типа Больцмана

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_a \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} = I_c + I_s \quad (1)$$

и уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{F}_a — действующая сила, $f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ — одночастичная функция распределения компоненты a , имеющая следующий смысл:

$$f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{p} = dN_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \quad (4)$$

где $dN_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ — число частиц компоненты a в элементе фазового объема $d\mathbf{r} d\mathbf{p}$ в момент t , и удовлетворяющая условию нормировки

$$\int f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{p} = N_a(t) \quad (5)$$

(интеграл берется по всему фазовому объему), $N_a(t)$ — число частиц компоненты a в момент t .

Члены I_c («интеграл столкновений») и I_s в (1) описывают изменение функции распределения $f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ под влиянием столкновений и источников:

$$I_c = \left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_c, \quad I_s = \left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_s, \quad (6)$$

причем источники заряженных частиц могут быть внутренними (вследствие ионизации, рекомбинации, обдирки) и краевыми (эмиссия, инжек-

ция, уход частиц через границы рассматриваемой области). Влияние внутренних источников часто включают в интеграл столкновений I_c как один из столкновительных эффектов.

Переменные в уравнениях (1)–(3) связаны обычными уравнениями

$$\mathbf{F}_a = q_a(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{F}_{ca}, \quad q_a = Z_a e, \quad (7)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}, \quad (9)$$

$$\mathbf{p} = m_a \mathbf{v}, \quad m_a = \gamma_a m_{0a}, \quad \gamma_a = \sqrt{1 + \left(\frac{p}{m_{0a} c}\right)^2}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_a = q_a \int \left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)_s dp, \quad (11)$$

$$\rho = \sum_a \rho_a, \quad \mathbf{j} = \sum_a \mathbf{j}_a, \quad \rho_a = q_a n_a, \quad \mathbf{j}_a = \rho_a \mathbf{v}_{0a}, \quad (12)$$

$$n_a = \int f_a dp, \quad \mathbf{v}_{0a} = \frac{1}{n_a} \int \frac{\mathbf{p}}{m_a} f_a dp. \quad (13)$$

Здесь q_a — заряд частицы компоненты a , Z_a — зарядовое число, сила \mathbf{F}_{ca} характеризует изменение импульса вследствие столкновений; (9) — уравнения характеристик, представляющие собой уравнения движения частиц; n_a — числовая плотность частиц, \mathbf{v}_{0a} — средняя скорость частиц компоненты a в точке \mathbf{r} в момент t ; точка означает дифференцирование по времени t . Заметим, что различными компонентами могут быть ансамбли частиц как разных сортов (электроны, различные ионы), так и одного сорта (несколько односортовых пучков, электроны пучка и плазмы и т. п.).

Таким образом, в общей постановке уравнения (1)–(3) составляют систему интегро-дифференциальных уравнений с семью аргументами и с трудом поддаются решению даже на самых мощных ЭВМ. Поэтому для облегчения решения в систему обычно вносятся различные упрощения. Так, очень часто правая часть уравнения (1) полагается нулевой; при этом получается более простое уравнение Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (14)$$

описывающее бесстолкновительные процессы в заряженных пучках. Действительно, как показывают аналитические оценки, при экспериментально достижимых плотностях заряда столкновениями в пучках почти всегда можно пренебречь, учитывая лишь столкновения заряженных частиц с частицами среды при распространении пучков в среде (газе, плазме, твердом теле). Исключение составляют лишь процессы в установках, специально создаваемых для осуществления столкновений, например в коллайдерах.

Большая экономия машинных ресурсов (времени счета, памяти) достигается в результате учета различных свойств симметрии заряженных пучков и соответствующего снижения размерности математической модели d_M , под которой принято понимать половину размерности фазового пространства (\mathbf{r}, \mathbf{p}) , т. е. $d_M = 0,5(d_r + d_p)$, где d_r , d_p — числа учитываемых в уравнениях координат и компонент импульса \mathbf{p} . Определенная таким образом размерность d_M изменяется от 0,5 (например,

в модели столкновительной релаксации однородного плоско-параллельного потока) до 3 (полная трехмерная модель заряженного пучка). Заметим, что увеличение расходов машинных ресурсов с ростом d_r вызывается не только степенным ростом числа узлов неподвижных (эйлеровых) сеток для компонент электромагнитного поля, но также соответствующим возрастанием числа изображающих поток модельных частиц (т. е. числа узлов подвижных $2d_m$ -мерных лагранжевых сеток в методах частиц) с целью поддержания в модели приемлемого для получения адекватных результатов дебаевского числа n_D (числа модельных частиц в дебаевской окрестности).

В нерелятивистских задачах можно пренебречь излучением заряженных частиц, опустить вихревые уравнения Максвелла (2) и учитывать лишь электростатическое поле, полагая [6]

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi \quad (15)$$

и вычисляя электростатический потенциал φ из уравнения Пуассона

$$\Delta \varphi = -\rho/\epsilon_0. \quad (16)$$

В некоторых задачах такого типа решение особенно упрощается, если исследуются лишь стационарные режимы, в которых электрическое поле не зависит от времени t . Более полное описание процессов дает так называемое приближение Дарвина, представляющее собой безызлучательный предел уравнений Максвелла. Это приближение сохраняет электростатические, магнитостатические и индуктивные эффекты, но устраняет волновые процессы и запаздывание (поля распространяются мгновенно), что значительно ускоряет и повышает устойчивость численного решения [7].

При изучении электрон-ионных систем серьезные проблемы возникают из-за большого различия масс частиц и связанного с этим различия их скоростей. Наиболее распространенными здесь являются предположение о бесконечно массивных ионах, образующих неподвижный ионный фон переменной плотности, при моделировании кинетики электронных пучков и предположение о среде безынерционных (бесконечно легких) электронов при моделировании кинетики ионных пучков. Во втором случае используются гибридные модели, в которых пучок описывается кинетическим уравнением типа Больцмана, а среда — газодинамическими уравнениями непрерывности (сохранения заряда), плотности импульса (движения) и плотности внутренней энергии (температуры), представляющих собой, по существу, уравнения 0, 1 и 2-го моментов импульса. Иногда даже ограничиваются лишь приближенным учетом электронной экранировки объемного заряда ионов и вязкости, моделирующей замедление пучка вследствие столкновений. Если же представляет интерес исследование динамики как ионной, так и электронный компонент, приемлемая длительность моделирования достигается обычно при отношениях масс m_i/m_e ионов и электронов в математической модели на 2—3 порядка меньше реальных; результаты моделирования при этом имеют, естественно, лишь качественный характер.

Интересно, что в некоторых задачах газодинамическое описание успешно используется не для среды, а для ламинарных или близких к ламинарным пучков в вакууме, например в электронно-оптических системах. Это тем более примечательно, что газодинамические уравнения получаются, как известно, в пределе бесконечно малого свободного пробега, тогда как для заряженных пучков реализуется прямо противоположная ситуация. Уравнение внутренней энергии для ламинарных

лучков обычно опускается. С другой стороны, теоретически возможно использование систем уравнений для большего числа моментов, например 13 или даже 27 уравнений (метод Грэда), однако примеров практического использования метода Грэда не имеется.

Развитием этой идеи является метод моментов, иногда используемый для системы уравнений Власова—Максвелла. В этом методе действующая сила \mathbf{F} в уравнении Власова, включающая поля \mathbf{E} , \mathbf{V} и импульс $\mathbf{p}/(\gamma m_0)$, приближенно представляется в виде ряда Тейлора невысокого порядка в фазовом пространстве $x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3$. После этого уравнение Власова домножается последовательно на $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots p_3^{i_3} (i_1, i_2, \dots, i_6 = 0, 1, 2, \dots)$ и интегрируется по фазовому объему; в результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений по времени для моментов распределения различных порядков $i = i_1 + i_2 + \dots + i_6$. Однако в эти уравнения входят и моменты более высоких порядков, которые появляются вследствие разложения силы в ряд Тейлора. Для замыкания системы уравнений все моменты, имеющие порядок выше некоторого максимального, полагаются нулевыми или в предположении статистической независимости представляются в виде произведения моментов более низких порядков.

Число уравнений в методе моментов получается очень большим: свыше 200 уравнений для моментов четвертого порядка и свыше 900 — для шестого. Поэтому для вывода этих уравнений, связанного с интегрированием по фазовому объему, требуется применение какой-либо системы аналитических вычислений на ЭВМ. Найденные в результате решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений моменты можно использовать непосредственно, как некоторые статистические характеристики исследуемого пучка, или для построения ряда Тейлора характеристической функции, производные которой выражаются через моменты. Многомерное преобразование Фурье характеристической функции позволяет затем получить функцию распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ в различные моменты t . Метод моментов наиболее пригоден лишь для нерелятивистских пучков в полях, хорошо описываемых полиномами невысокой степени.

Возможен также другой тип гибридных моделей, в которых одна и та же компонента среды представляется частицами или газом (жидкостью) на разных этапах моделирования. В этих моделях на каждом шаге моделирования по сохраняемым в памяти ЭВМ 0, 1 и 2-му локальным моментам распределения импульса компоненты среды воспроизводится по методу Монте-Карло некоторое достаточно большое число заряженных частиц, которые затем продвигаются в фазовом пространстве на один временной шаг с учетом столкновений и источников. По новым координатам и импульсам частиц снова вычисляются локальные моменты распределения импульса, которые и сохраняются в памяти ЭВМ до следующего шага. Такие гибридные модели позволяют хорошо воспроизводить столкновительные эффекты и неустойчивости, например в сильно нелинейных пучково-плазменных взаимодействиях.

2. Методы моделирования

Наиболее распространенными в рассматриваемой области вычислительной физики являются задачи решения самосогласованной системы уравнений Власова—Максвелла. Для электростатических задач этого класса первоначально был предложен ряд методов непосредственного численного решения системы уравнений Власова (14) и Пуас-

сона (16): сеточные методы, метод характеристик, метод прямых, вариационный метод Г. Льюиса, модель «водяной мешок» и методы преобразований (разделения переменных), среди которых особенный интерес представляют методы с точными (аналитическими) пространственными производными. Достоинством этих методов является возможность непосредственного вычисления одночастичной функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, дающей полную статистическую характеристику пучка. Однако эти методы имеют и ряд существенных недостатков, обусловленных, главным образом, нефизическим переходом от сплошного скоростного спектра заряженных частиц к дискретному, сеточному набору скоростей, к тому же ограниченному по амплитуде из-за конечности сетки. Поэтому хотя такими методами и выполнены некоторые исследования достаточно простых течений на моделях размерности d_M не выше 2, в настоящее время они оказались практически вытесненными более мощными методами частиц («крупных частиц»), которые сейчас уже считаются классическими.

В методах частиц одночастичная функция распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ в начальный момент t_0 аппроксимируется некоторым ограниченным числом N_p (от нескольких десятков до нескольких миллионов) модельных («крупных») частиц, и в дальнейшем прослеживается их самосогласованная динамика с временным шагом τ . Отношение заряда к массе покоя для модельных частиц сохраняется таким же, как для физических (за исключением некоторых электрон-ионных систем, указанных в п. 1), так что сохраняются и их уравнения движения. Вычисленное в момент t расположение N_p модельных частиц в фазовом пространстве (\mathbf{r}, \mathbf{p}) можно рассматривать как подвижную (лагранжеву) сетку, аппроксимирующую функцию $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$.

Каждый временной шаг моделирования методом частиц в момент времени t складывается из двух основных этапов: 1) вычисление электромагнитного поля на неподвижной (эйлеровой) сетке (эйлеров этап), 2) решение уравнений движения частиц в этом поле на текущем шаге τ (лагранжев этап). Помимо двух основных, имеются также два вспомогательных, стыковочных этапа, на первом из которых вычисляются входящие в уравнения Максвелла плотности заряда ρ и тока \mathbf{j} на эйлеровой сетке по лагранжевой сетке частиц, а на втором находится действующая на частицы сила \mathbf{F} по значениям поля на неподвижной эйлеровой сетке. Тип метода частиц в значительной степени определяется организацией этих вспомогательных этапов.

Индивидуальные заряды модельных частиц q_α ($\alpha=1, 2, \dots, N_p$) могут быть как одинаковыми, так и различными и даже зависящими от времени (например, если моделируются шумы токораспределения). Обозначим средний коэффициент укрупнения заряда $M=Q/(qN_p)$, где Q — полный заряд пучка, q — заряд физической частицы. Можно показать, что в модели частиц сохраняются такие важнейшие физические величины, как плазменная частота ω_p и дебаевское расстояние λ_D , тогда как температура пучка T , частота столкновений ν_c , длина свободного пробега λ_c , сечение столкновений σ_c , дебаевское число n_D и плазменный параметр $\mu_p=1/n_D$ изменяются:

$$T \sim M, \nu_c \sim M, \lambda_c \sim 1/M, \sigma_c \sim M^2, n_D \sim 1/M, \mu_p \sim M. \quad (17)$$

Сохранение динамики частиц, плазменной частоты и дебаевского расстояния означает, что в моделях частиц могут правильно воспроизводиться коллективные взаимодействия. Но для того, чтобы коллективные взаимодействия доминировали над парными и, следовательно, бы-

ло оправдано статистическое описание пучка с помощью функций распределения в виде уравнений типа Больцмана, в модели должно сохраняться условие $n_D \gg 1$. А поскольку объем, занимаемый пучком, значительно больше дебаевского объема λ_D^d , в методе частиц должно выполняться соотношение $N_p \gg n_D \gg 1$, весьма обременительное для ЭВМ. С целью устранения нефизических парных взаимодействий (столкновений), вызванных резким сокращением длины свободного пробега λ_e , используются специальные приемы сглаживания близких взаимодействий. Общепринято сейчас использование для этого «частиц-облаков», заряд которых распределен по некоторому относительно малому d_r -мерному объему.

Остановимся теперь на численных методах, используемых на отдельных этапах моделирования. В электростатических задачах для решения уравнения Пуассона (16) наиболее эффективны широко известные прямые методы разделения переменных с использованием рядов Фурье, двойной циклической редукции, прогонки и сплайнов, однако эти методы применимы лишь к простейшим прямоугольным областям. Формально можно и непрямоугольные области свести к прямоугольным с внутренними границами (электродами), но при этом значительно усложняется алгоритм решения, увеличиваются затраты машинного времени и памяти. Поэтому практически в сложных областях обычно используются итерационные методы, из которых наиболее эффективными можно, видимо, считать метод последовательной верхней релаксации, циклический итерационный процесс с чебышевским набором итерационных параметров и метод неполной факторизации. Неплохие результаты иногда дает также ускорение сходимости по Люстернику и δ^2 -процесс Эйткена. При моделировании с малым временным шагом τ в качестве начальной итерации можно принять достаточно близкое к искомому распределение потенциала φ в предыдущий момент времени, так что число итераций, требующееся для решения с приемлемой погрешностью, будет небольшим. При решении уравнения Пуассона трудной остается проблема открытых участков границы. Хотя формально ее решение возможно путем сведения области к открытой с внутренними границами, но длительность решения при этом возрастает в несколько раз; существенно увеличиваются и затраты памяти ЭВМ.

При вычислении электромагнитного поля можно воспользоваться как системой уравнений для напряженностей \mathbf{E} , \mathbf{H} , так и соответствующей системой для вектор-потенциала \mathbf{A} и скалярного потенциала φ . Как показывает анализ, ни одна из этих систем не имеет преимуществ перед другой. Действительно, для \mathbf{A} , φ требуется, казалось бы, меньшая память, однако из формул

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \partial \mathbf{A} / \partial t, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (18)$$

видно, что для вычисления напряженности поля необходимо сохранять значения \mathbf{A} хотя бы в два соседних момента времени; кроме того, для компенсации роста погрешности из-за дифференцирования по пространству требуются сетки с меньшим пространственным шагом. В итоге экономия памяти не достигается. Сейчас в преобладающем большинстве работ используются уравнения для \mathbf{E} , \mathbf{H} .

Можно показать, что если в модели выполняется закон сохранения заряда, то выполняются и дивергентные уравнения Максвелла (3), если они выполнены в начальный момент времени. В правильно построенных моделях частиц закон сохранения заряда выполняется с

приемлемой точностью, поэтому при вычислении электромагнитного поля обычно ограничиваются решением вихревых уравнений (2), используя дивергентные уравнения лишь как начальные условия. В областях прямоугольной формы для решения уравнений Максвелла также применим метод разделения переменных, с помощью которого задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по времени для коэффициентов обобщенного ряда Фурье. Однако в интересующих нас задачах электродинамики области чаще имеют более сложную форму, метод разделения переменных неприменим и для решения требуются различные сеточные методы. Обычно при этом используются явные разностные схемы, методы типа «предиктор-корректор» и метод последовательных приближений Пикара, представляющий собой одну из реализаций метода прямых.

Как показывает опыт моделирования, из-за накопления вычислительных погрешностей постепенно ухудшается выполнение скалярного уравнения Максвелла, т. е. возникает отклонение

$$\Phi \equiv \operatorname{div} \mathbf{D} - \rho \neq 0. \quad (19)$$

К недостаткам сеточных методов относится также нефизическая, схемная дисперсия, в результате которой на сетке могут значительно замедляться высшие гармоники поля. При моделировании релятивистских пучков это будет приводить к неустойчивости решения вследствие схемного эффекта Вавилова—Черенкова.

Для устранения указанных недостатков можно, например, модифицировать первое уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{j} + \sigma \mathbf{E} - b \Delta \mathbf{D} + d \operatorname{grad} \Phi. \quad (20)$$

Здесь $\sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E}$ — ток проводимости, аппроксимирующий резистивные потери в среде и электродах (стенках), а также потери излучения через открытые участки границы; член $b \Delta \mathbf{D}$ ($b = \text{const} > 0$) подавляет высшие гармоники поля, появляющиеся из-за машинного шума, а последний член [8] обеспечивает экспоненциальное затухание со временем Φ (19) при $d > 0$.

Более распространенной является периодическая коррекция \mathbf{E} по формуле

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \operatorname{grad} \psi, \quad (21)$$

где \mathbf{E}' — скорректированное поле, а $\nabla \psi$ — поправка. Из условия $\operatorname{div} \mathbf{E}' = \rho / \epsilon_0$ следует, что ψ определяется уравнением [2]

$$\Delta \psi = \operatorname{div} \mathbf{E} - \rho / \epsilon_0. \quad (22)$$

При решении системы Власова—Максвелла часто предпочитают центрально-разностные методы, сохраняющие физическое свойство обратимости, т. е. сохраняющие энтропию. Это означает, что при обратном моделировании с противоположным шагом — τ в системе точно (т. е. с точностью до округлений) восстанавливается начальное состояние. Обратимые методы, в том числе методы решения уравнений движения частиц, предохраняют от появления в модели нефизической диффузии, диссипации и других процессов, не описываемых уравнением Власова, но имеют высокую погрешность $O(\tau^2)$. Если же не требовать обратимости, можно проследить динамику частиц с погрешностью $O(\tau^3)$, $O(\tau^4)$. Обратимостью не обладают также и разрабатываемые в последние годы неявные методы частиц с повышенной устойчивостью.

Если решается не уравнение Власова (14), а более общее уравнение типа Больцмана (1), то его удобно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{n=0}^N L_n f, \quad L_0 f = -\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}, \quad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (23)$$

где интегро-дифференциальные операторы L_n описывают различные процессы в пучке (бесстолкновительное движение, рассеяние в среде, ионизацию и др.). Для решения этой задачи можно воспользоваться общим методом расщепления. В этом методе значение f функции f в момент $t + \tau$ представляется в виде

$$\hat{f} = f + \frac{\partial f}{\partial t} \tau + O(\tau^2) = f + \tau \left(\sum_n L_n \right) f + O(\tau^2) = \left(\prod_n S_n \right) f + O(\tau^2), \quad (24)$$

$$S_n = I + \tau L_n,$$

где I — единичный оператор, а операторы S_n коммутативны с погрешностью $O(\tau^2)$. Решение, таким образом, представляется в виде последовательности коммутативных шагов

$$f^{k + \frac{n+1}{N+1}} = S_n f^{k + \frac{n}{N+1}} + O(\tau^2) \quad (n=0, 1, \dots, N), \quad (25)$$

последовательно моделирующих бесстолкновительное движение и элементарные процессы в пучке; верхний индекс в (25) указывает номер временного шага: $t^k = k\tau$. На всем временном интервале моделирования метод расщепления имеет погрешность $O(\tau)$.

Заключение

Успехи в разработке и применении методов моделирования заряженных пучков тесно связаны с прогрессом вычислительной техники. Здесь важно заметить, что эти методы допускают параллельные вычисления, так как алгоритмы решения уравнений движения, быстрого преобразования Фурье, многих сеточных методов вычисления поля могут выполняться параллельно многими процессорами. Поэтому можно ожидать, что с развитием как самих численных методов, так и техники параллельных вычислений и многопроцессорных ЭВМ математическое моделирование позволит не только анализировать процессы в заряженных пучках, но и решать более трудоемкие задачи синтеза пучков с требуемыми характеристиками.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики. М., 1985.
 [2] Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. М., 1989.
 [3] Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. М., 1987.
 [4] Рошаль А. С. Моделирование заряженных пучков. М., 1979.
 [5] Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Математическое моделирование плазмы. М., 1982.
 [6] Вычислительные методы в физике плазмы./Ред. Б. Олдер, С. Фернбах, М. Ротенберг. М., 1974.
 [7] Управляемый термоядерный синтез./Ред. Дж. Киллин. М., 1980.
 [8] Marger В.//J. Comp. Phys. 1987. 68, N 1.P. 48.