ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.219.3:536.75

БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ В СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ, ИНДУЦИРОВАННОЕ ГАУССОВЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ВРЕМЕНЕМ КОРРЕЛЯЦИИ

Т. И. Лакоба

(кафедра физики твердого тела)

Предложен метод построения замкнутого приближенного уравнения для слабо нелинейных систем, находящихся под воздействием гауссова шума с корреляционной функцией произвольного вида.

Статистические свойства процессов, индуцированных шумом с ненулевым временем корреляции (так называемым цветным шумом), широко изучаются в последнее десятилетие [1—4]. В настоящей работе предложен метод построения приближенного замкнутого уравнения, описывающего эволюцию плотности вероятности (ПВ) слабо нелинейной системы, возбуждаемой гауссовым шумом с произвольным временем корреляции.

Исходное уравнение Ланжевена будем для простоты записывать для единственной переменной $x(t)$ (обобщение на случай нескольких переменных не вызывает принципиальных трудностей, хотя и намного увеличивает объем вычислений):

$$\dot{x}=-\lambda x+\Phi(x)+(1+g(x))\,y(t), \tag{1}$$

где $x\equiv dx/dt$, $\lambda>0$, $y(t)$ — случайная сила (цветной шум) с нулевым средним и корреляционной функцией $C_y(t-t')\equiv\langle y(t)y(t')\rangle$. Для дальнейшего существенно предположение о гауссовой статистике $y(t)$. Нелинейные функции $\Phi(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют сильным неравенствам $|\Phi(x)|\ll|\lambda x|$, $|g(x)|\ll 1$ для тех значений x, где стационарное значение ПВ $p(x)$ не слишком мало.

Случай, когда $y(t)$ — процесс Орнштейна—Уленбека

$$\dot{y}=-\gamma y+\gamma\xi(t), \tag{2}$$

$$\langle\xi(t)\rangle=0,\ \langle\xi(t)\xi(t')\rangle=2D\delta(t-t') \tag{3}$$

с корреляционной функцией

$$C_y(t-t')=D\gamma\exp\{-\gamma\,|t-t'|\}\equiv\frac{D}{\tau_c}\exp\left\{-\frac{|t-t'|}{\tau_c}\right\}, \tag{4}$$

был изучен в [2] для произвольных τ_c и при условии малой интенсивности шума ($D\ll 1$). Фактически мы делаем те же исходные допущения, что и авторы работы [2], однако излагаемый ниже метод в отличие от [2] позволяет, во-первых, в определенных случаях конструировать существенно нестационарное эволюционное уравнение для ПВ и, во-вторых, допускает естественное обобщение на случай произвольного вида $C_y(t-t')$.

Основная идея предлагаемого метода состоит в следующем. Имея в (1) малый параметр $\mu\equiv\max(|\Phi(x)|/|\lambda x|;\ |g(x)|)$, можно вычислить функцию отклика (вариационную производную) [1] $\delta x(t)/\delta y(t')$ путем

последовательных итераций в любом порядке по μ. Затем мы используем эту функцию отклика для построения замкнутого кинетического уравнения по методу Санчо—Сан Мигуэля [1].

Проиллюстрируем детали нашего подхода на простейшем примере. Рассмотрим уравнение Ланжевена

$$\dot{x} = -\lambda x - b_2 x^2 - b_3 x^3 + (1 - cx)\, y(t), \tag{5}$$

где $y(t)$ есть процесс Орнштейна—Уленбека (2). В соответствии с нашим допущением

$$|b_2 x^2|/|\lambda x|, \quad |b_3 x^3|/|\lambda x|, \quad |cx| \sim \mu \ll 1 \tag{6}$$

в окрестности положения равновесия $x_s=0$. Предположим также, что нелинейные слагаемые не приводят к появлению новых положений равновесия у детерминированной системы. Для упрощения дальнейших вычислений будем рассматривать только долговременную асимптотику $x(t)$:

$$t \gg \gamma^{-1}, \ \lambda^{-1}, \tag{7}$$

хотя это требование не является принципиальным. Чтобы определить $\delta x(t)/\delta y(t')$ с точностью до μ^1, положим $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$, $|x_1(t)| \sim \sim \mu |x_0(t)|$. Тогда, принимая во внимание условие (7), имеем

$$x_0(t) = \int_0^t \exp\{-\lambda(t-t''')\}\, y(t''')\, dt''' \equiv \int_0^t K(t-t''')\, y(t'''')\, dt'''', \tag{8}$$

$$x_1(t) = -\int_0^t K(t-t''') \Big\{ b_2 \Big[\int_0^{t'''} K(t''''-t'')\, y(t'')\, dt'' \Big]^2 + \\ + b_3 \Big[\int_0^{t'''} K(t''''-t'')\, y(t'')\, dt'' \Big]^3 + cy(t'''') \int_0^{t'''} K(t''''-t'')\, y(t'')\, dt'' \Big\}\, dt''''; \tag{9}$$

$t=0$ отвечает начальному моменту времени. Соответствующие функции отклика имеют вид

$$\frac{\delta x_0(t)}{\delta y(t')} = K(t-t')\, \Theta(t-t'), \tag{10}$$

$$\frac{\delta x_1(t)}{\delta y(t')} = \Big\{ -\int_{t'}^t K(t-t''') \Big[2b_2 K(t'''-t') \int_0^{t'''} K(t''''-t'')\, y(t'')\, dt'' + \\ + 3b_3 K(t'''-t') \Big(\int_0^{t'''} K(t''''-t'')\, y(t'')\, dt'' \Big)^2 + cy(t'''')\, K(t'''-t') \Big]\, dt''''- \\ - cK(t-t') \int_0^{t'} K(t'-t'')\, y(t'')\, dt'' \Big\}\, \Theta(t-t'), \tag{11}$$

где $\Theta(s) = 1$ при $s > 0$ и $\Theta(s) = 0$ при $s < 0$.

Следуя методу Санчо—Сан Мигуэля, мы получаем эволюционное уравнение для ПВ в первом порядке по μ:

$$\partial_t p(x, t) = \partial_x((\lambda x + b_2 x^2 + b_3 x^3) p) + \partial_{xx} \int_0^t dt' C_y(t-t') \times$$

$$\times \left\langle \delta(x(t)-x) \left(\frac{\delta x_0(t)}{\delta y(t')} + \frac{\delta x_1(t)}{\delta y(t')} \right) - c x(t) \delta(x(t)-x) \frac{\delta x_0(t)}{\delta y(t')} \right\rangle +$$

$$+ c \partial_x \int_0^t dt' C_y(t-t') \langle \delta(x(t)-x) \rangle \frac{\delta x_0(t)}{\delta y(t')}. \tag{12}$$

Здесь скобки $\langle ... \rangle$ означают усреднение одновременно по ансамблю реализаций $y(t)$ и по начальным условиям процесса $x(t)$. При выводе (12) была использована теорема Новикова [5], которая утверждает, что если $y(t)$ — гауссов случайный процесс с корреляционной функцией $C_y(t-t')$, а $Z[y]$ — произвольный функционал от него, то

$$\langle Z[y]\, y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} C_y(t-t') \left\langle \frac{\delta Z[y]}{\delta y(t')} \right\rangle dt', \tag{13}$$

где $(\delta Z[y]/\delta y(t'))$ — соответствующая функция отклика. Из (10)—(12) следует, что в эволюционное уравнение входят средние вида $\langle \delta(x(t)-x) y(t_1) \rangle$ и $\langle \delta(x(t)-x) y(t_1) y(t_2) \rangle$, причем они должны быть вычислены с точностью до μ^0. Используя (13), имеем

$$\langle \delta(x(t)-x) y(t_1) \rangle \approx - \int_0^t dt' C_y(t_1-t') \left\langle \frac{\delta x_0(t)}{\delta y(t')} \partial_x \delta(x(t)-x) \right\rangle. \tag{14}$$

Повторное применение теоремы Новикова дает

$$\langle Z[y]\, y(t_1) y(t_2) \rangle = C_y(t_1-t_2) \langle Z[y] \rangle +$$

$$+ \int_0^t \int_0^t ds_1 ds_2 C_y(t_1-s_1) C_y(t_2-s_2) \left\langle \frac{\delta^2 Z[y]}{\delta y(s_1)\, \delta y(s_2)} \right\rangle, \tag{15}$$

и с точностью до μ^0

$$\langle \delta(x(t)-x) y(t_1) y(t_2) \rangle \approx C_y(t_1-t_2) \langle \delta(x(t)-x) \rangle +$$

$$+ \int_0^t \int_0^t ds_1 ds_2 C_y(t_1-s_1) C_y(t_2-s_2) K(t_1-s_1) K(t_2-s_2) \langle \partial_{xx} \delta(x(t)-x) \rangle. \tag{16}$$

Воспользовавшись выражением (4) для корреляционной функции процесса Орнштейна—Уленбека и подставляя (7), (10), (11), (14), (16) в (12), получим замкнутое приближенное немарковское уравнение эволюции для $p(x, t)$:

$$\partial_t p(x, t) = \partial_x((\lambda x + b_2 x^2 + b_3 x^3) p) + D \frac{\gamma}{\gamma + \lambda} \partial_x((1 - c x) \partial_x p) -$$

$$- 3 b_3 \frac{D^2 \gamma^2}{(\gamma + \lambda)^3 \lambda} \partial_{xx} p + D_3 \partial_{xxx} p - D_4 \partial_{xxxx} p, \tag{17}$$

где

$$D_3 = \frac{4b_2(\lambda+\gamma)+c(4\lambda^2+7\lambda\gamma+2\gamma^2)}{\lambda(\gamma+\lambda)^2(2\gamma+\lambda)(2\lambda+\gamma)} D^2\gamma^2,$$
$$D_4 = 3b_3D^3\gamma^3 \frac{6\gamma^2+11\gamma\lambda+6\lambda^2}{(\gamma+\lambda)^4(3\gamma+\lambda)(3\lambda+\gamma)\lambda^2}. \tag{18}$$

Уравнение (17) не относится к типу диффузионных (в отличие от уравнения Фоккера—Планка, описывающего эволюцию ПВ системы, возбуждаемой белым шумом), поэтому необходимо сделать поясняющие замечания.

Во-первых, нефоккер-планковские члены в (17) выглядят, как сингулярное возмущение. Аналогичная ситуация имеет место при построении кинетического уравнения для слабо немарковских процессов ($\tau_c \ll \ll 1$) [6, гл. 8]. Однако в соответствии с (6) (далее будем сокращенно писать «$x \in (6)$») нелинейные члены приводят к малому отличию исходной системы (5) от линейной. Поэтому разумно предположить, что решение уравнения (17) должно мало отличаться от ПВ соответствующей линейной задачи (см. ниже выражение (21)). Если искать решение уравнения (17) в виде ряда по μ в области $x \in (6)$, то можно рассматривать нефоккер-планковские члены в (17) как малые не сингулярные возмущения.

Будем предполагать, что процесс (5) имеет естественные границы [6] при $x=\pm\infty$. Очевидно, (6) не выполняется при $x=\pm\infty$, однако можно провести следующие рассуждения. Ниже будет показано, что для процесса (5), определенного в интервале $x \in (-\infty, \infty)$, можно положить $\partial_t p \approx 0$ в (17). В этом случае естественные граничные условия означают, что поток ПВ

$$G(x) = (\lambda x + b_2x^2 + b_3x^3)p + D\frac{\gamma(1-cx)}{\gamma+\lambda}\partial_x p -$$
$$-3b_3\frac{D^2\gamma^2}{(\gamma+\lambda)^3\lambda}\partial_x p + D_3\partial_{xx}p - D_4\partial_{xxx}p \tag{19}$$

равен нулю при всех x. Условие $G(x)=0$ позволяет получить стационарное решение уравнения (17).

Эволюционный оператор в правой части (17) при $\mu=0$ имеет наименьшее собственное значение $q_1(\mu=0)=\lambda$, если x определен на интервале $(-\infty, \infty)$ [7]. Оно имеет смысл обратного времени установления стационарного распределения ПВ. Если нелинейные слагаемые в уравнении (5) малы, как указано выше, то наименьшее собственное значение оператора (17) будет $q_1=\lambda+O(\mu)$. Так как (17) выведено в предположении (7), то $q_1t \gg 1$, поэтому естественно интересоваться только его стационарным решением. Однако если границы процесса $x(t)$ установлены там, где выполнено (6), то в принципе возможна ситуация $q_1t<1$, и тогда (17) должно рассматриваться как эволюционное уравнение.

Будем искать стационарное решение (17) по теории возмущений с точностью до μ^1. Перепишем условие $G(x)=0$ в следующей форме:

$$(\lambda x + b_2x^2 + b_3x^3)p + D\frac{\gamma(1-cx)}{\gamma+\lambda}\partial_x p -$$
$$-3b_3D^2\frac{\gamma^2}{(\gamma+\lambda)^3\lambda}\partial_x p = -D_3\partial_{xx}p + D_4\partial_{xxx}p. \tag{20}$$

Так как правая часть (20) пропорциональна μ, подставим туда выражение для стационарной ПВ линейной системы:

$$p^{\text{lin}}(x)=\left(\frac{\lambda(\gamma+\lambda)}{2\pi D\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{\lambda(\gamma+\lambda)}{2D\gamma}x^2\right\} \tag{21}$$

вместо $p(x)$. В левую часть (20) подставим $p(x)$ в виде [8]:

$$p(x)=p_0(x)+\sum_{n=0}^{\infty}Q_nH_n(x)\,p^{\text{lin}}(x), \tag{22}$$

где коэффициенты Q_n подлежат определению, $Q_n\sim\mu$, эрмитовы полиномы

$$H_n(x)=\frac{1}{(n!)^{\frac{1}{2}}\,p^{\text{lin}}(x)}\left(\frac{D\gamma}{\lambda(\gamma+\lambda)}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{d^n}{dx^n}p^{\text{lin}}(x); \tag{23}$$

функция $p_0(x)$ при подстановке обращает левую часть (20) в нуль. Величина $p(x)$ положительна там, где $x\in(6)$. С точностью до μ^1 получим

$$Q_3=\left(\frac{2D\gamma}{3\lambda(\lambda+\gamma)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\lambda(\gamma+\lambda)^2}{D^2\gamma^2}D_3,$$

$$Q_4=-\frac{\lambda(\lambda+\gamma)^2}{\sqrt{6}\,D^2\gamma^2}D_4,$$

где D_3, D_4 определены в (18), остальные Q_n равны нулю. Использовав разложение Тейлора $e^{\alpha}\approx1+\alpha$ при $\alpha\ll1$, получим окончательный результат

$$p(x)=N\exp\left\{-\frac{\gamma+\lambda}{D\gamma}\left[-\frac{(\gamma+\lambda)\lambda}{D\gamma}D_3x+\right.\right.$$
$$+\lambda\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}b_3D\gamma\frac{3\lambda^2+\gamma\lambda+3\gamma^2}{(\lambda+\gamma)^2(3\lambda+\gamma)(3\gamma+\lambda)\lambda}\right)x^2+$$
$$\left.\left.+\left(\frac{1}{3}b_3+\frac{1}{3}c\lambda+\frac{\lambda^2(\gamma+\lambda)^2}{D^2\gamma^2}D_3\right)x^3+\left(\frac{1}{4}b_3+\frac{\lambda^3(\gamma+\lambda)^3}{12D^3\gamma^3}D_4\right)x^4\right]\right\} \tag{24}$$

в области $x\in(6)$. Постоянная N определяется из условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\,dx=1$.

Легко убедиться, что при $\gamma\to\infty$ ($\tau_c\to0$) выражение (24) переходит в стационарное решение соответствующего уравнения Фоккера—Планка. В последнем случае наиболее вероятное значение x_m совпадает со стационарным положением $x_s=0$ детерминированной системы. Если же слабо нелинейная система возбуждается цветным шумом, то x_s остается неизменным, а x_m сдвигается за счет асимметричности потенциальной ямы (член b_2x^2 в (5)) и мультипликативности шума (член cx). Величина этого сдвига

$$\Delta x=\frac{D\gamma\,[4b_2(\gamma+\lambda)+c(2\gamma^2+7\gamma\lambda+4\lambda^2)]}{\lambda(\gamma+\lambda)(\lambda+2\gamma)(\gamma+2\lambda)} \tag{25}$$

совпадает с полученной в [2] в частном случае $c=0$.

Предложенный метод может быть распространен на случай нескольких переменных. Кроме того, он может быть обобщен на случай одной переменной, когда рассматриваемая система близка к одной из систем, принадлежащих классу точно решаемых (в смысле возможности построения точного эволюционного уравнения при произвольном τ_c) [2]. Например, к этому классу относится система, определяемая уравнением

$$\dot{x} = -\lambda x + xy(t), \tag{26}$$

$y(t)$ — гауссов цветной шум. Соответствующая функция отклика может быть найдена точно: $\delta x(t)/\delta y(t') = x(t)$. Поэтому функция отклика для системы

$$\dot{x} = -\lambda x - b_2 x^2 - b_3 x^3 + xy(t) \tag{27}$$

может быть посчитана с помощью теории возмущений и, следовательно, может быть найдено эволюционное уравнение для $p(x, t)$.

Итак, в данной работе предложен простой алгоритм построения эволюционного уравнения для ПВ слабо нелинейных систем, находящихся под действием гауссова шума с произвольным временем корреляции.

Автор благодарит Ю. Л. Климонтовича, А. В. Толстопятенко и Л. Шиманского-Гайера за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Sancho J., San Miguel M.//Z. Phys. 1980. **B36**. N 4. P. 357. [2] Altares V., Nicolis G.//J. Stat. Phys. 1987. **46**, N 1/2. P. 191. [3] Schimansky-Geier L.//Phys. Lett. 1988. **126A**, N. 8/9. P. 455. [4] Colet P., Wio H. S., San Miguel M.//Phys. Rev. 1989. **A39**, N 11. P. 6094. [5] Новиков Е. А.//ЖЭТФ. 1964. **47**, № 5. С. 1919. [6] Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М., 1987. [7] Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. М., 1986. [8] Климонтович Ю. Л. Статистическая физика. М., 1982.

Поступила в редакцию
28.06.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА, АСТРОНОМИЯ. 1992. Т. 33, № 4

РАДИОФИЗИКА

УДК 538.573:621.371.3

ОБЛАСТЬ ПРИМЕНИМОСТИ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА БЕГУЩИХ ВОЛН В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Д. Гусев, С. М. Голынский

(кафедра физики атмосферы и математической геофизики)

Исследованы границы применимости модифицированного метода бегущих волн в свободном пространстве за фазовым хаотическим экраном. В приближении малоуглового рассеяния рассмотрена модель нормальных флуктуаций фазы рассеянного поля на экране. Получен критерий применимости анализируемого метода, который значительно расширяет возможности использования лучевой трактовки волнового поля в свободном пространстве по сравнению со стандартным определением зоны геометрической оптики.

В основе модифицированного метода бегущих волн (ММБВ) [1, 2] лежит представление волнового поля $W(\mathbf{r}, t)$ в виде бегущих волн