Предложенный метод может быть распространен на случай нескольких переменных. Кроме того, он может быть обобщен на случай одной переменной, когда рассматриваемая система близка к одной из систем, принадлежащих классу точно решаемых (в смысле возможности построения точного эволюционного уравнения при произвольном τ_c) [2]. Например, к этому классу относится система, определяемая уравнением

$$\dot{x}=-\lambda x+xy(t), \tag{26}$$

$y(t)$ — гауссов цветной шум. Соответствующая функция отклика может быть найдена точно: $\delta x(t)/\delta y(t')=x(t)$. Поэтому функция отклика для системы

$$\dot{x}=-\lambda x-b_2x^2-b_3x^3+xy(t) \tag{27}$$

может быть посчитана с помощью теории возмущений и, следовательно, может быть найдено эволюционное уравнение для $p(x, t)$.

Итак, в данной работе предложен простой алгоритм построения эволюционного уравнения для ПВ слабо нелинейных систем, находящихся под действием гауссова шума с произвольным временем корреляции.

Автор благодарит Ю. Л. Климонтовича, А. В. Толстопятенко и Л. Шиманского-Гайера за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Sancho J., San Miguel M.//Z. Phys. 1980. **B36**. N 4. P. 357. [2] Altares V., Nicolis G.//J. Stat. Phys. 1987. **46**, N 1/2. P. 191. [3] Schimansky-Geier L.//Phys. Lett. 1988. **126A**, N. 8/9. P. 455. [4] Colet P., Wio H. S., San Miguel M.//Phys. Rev. 1989. **A39**, N 11. P. 6094. [5] Новиков Е. А.//ЖЭТФ. 1964. **47**, № 5. С. 1919. [6] Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М., 1987. [7] Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. М., 1986. [8] Климонтович Ю. Л. Статистическая физика. М., 1982.

Поступила в редакцию
28.06.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1992. Т. 33, № 4

РАДИОФИЗИКА

УДК 538.573:621.371.3

ОБЛАСТЬ ПРИМЕНИМОСТИ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА БЕГУЩИХ ВОЛН В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Д. Гусев, С. М. Голынский

(кафедра физики атмосферы и математической геофизики)

Исследованы границы применимости модифицированного метода бегущих волн в свободном пространстве за фазовым хаотическим экраном. В приближении малоуглового рассеяния рассмотрена модель нормальных флуктуаций фазы рассеянного поля на экране. Получен критерий применимости анализируемого метода, который значительно расширяет возможности использования лучевой трактовки волнового поля в свободном пространстве по сравнению со стандартным определением зоны геометрической оптики.

В основе модифицированного метода бегущих волн (ММБВ) [1, 2] лежит представление волнового поля $W(\mathbf{r}, t)$ в виде бегущих волн

[3]. При выборе гармонической зависимости $W(\mathbf{r}, t)$ от времени пространственная составляющая волнового поля $U(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца и имеет вид

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp\{ikS(\mathbf{r})\}, \tag{1}$$

где $A(\mathbf{r})$ и $S(\mathbf{r})$ — амплитуда и эйконал бегущей волны соответственно, $i=\sqrt{-1}$, $k=2\pi/\lambda$, λ — длина волны излучения в вакууме. Представление (1) справедливо в среде без поглощения до тех пор, пока поверхность волнового фронта не имеет особых точек, т. е. детерминант метрического тензора g_{jl} ($j, l=1, 2$) этой поверхности, который определяет амплитуду волны $A(\mathbf{r})$ [4], удовлетворяет условию

$$J = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0. \tag{2}$$

Принципиальное отличие ММБВ от стандартного приближения геометрической оптики, которое является предельным случаем ММБВ [2], заключается в том, что уравнение эйконала

$$(\nabla S)^2 = m^2 \tag{3}$$

определяется эффективным $m=m(\mathbf{r})$, а не локальным $n=\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}$ показателем преломления среды [1], где $\varepsilon(\mathbf{r})$ — диэлектрическая проницаемость среды. В результате уравнение (3) есть точное следствие исходного уравнения Гельмгольца, и ММБВ не связан с априорными ограничениями на характерные масштабы неоднородностей среды.

Уравнение эйконала (3) позволяет перейти к лучевой трактовке рассматриваемого волнового поля (1), т. е. использовать геометрическую теорию построения волновых поверхностей, опирающуюся на принцип Гюйгенса. Согласно этой теории, если в какой-либо момент времени t известна поверхность фронта волны, то для построения волнового фронта в момент $t_1=t+\Delta t$ в каждой точке исходной поверхности возводится нормаль в направлении распространения, на которой откладывается отрезок, равный фазовому пути за время Δt. Геометрическое место полученных точек представляет собой новый фронт волны в момент времени t_1. Описанное построение отображает последовательность волновых фронтов до тех пор, пока существует взаимно однозначное соответствие между точками двух соседних поверхностей, принадлежащих одному и тому же лучу, т. е. вплоть до момента пересечения соседних лучей (нормалей).

Таким образом, возможность использования ММБВ ограничена условием непересекаемости лучей (нормалей), соответствующих бегущим волнам. С физической точки зрения пересечение лучей приводит либо к возникновению каустик (в частности, эффекту фокусировки) [4], либо к появлению дислокаций волнового фронта [5]. В обоих случаях поле лучей перестает быть регулярным, т. е. нарушается условие (2), эквивалентное критерию непересекаемости лучей.

Оценка области применимости ММБВ в случайно-неоднородной среде может быть проведена по аналогии с работой [6], где проанализированы границы применимости стандартного метода геометрической оптики. Однако для этого необходимо решить предварительную задачу определения эффективного показателя преломления среды $m=m(\mathbf{r})$, которая достаточно сложна и в общем случае до сих пор не имеет полного решения. Поэтому в настоящей работе ограничимся рассмотрением более простой, но весьма важной для практических приложений задачей нахождения области применимости ММБВ для описания волнового поля, распространяющегося в свободном пространстве после прохождения через случайно-неоднородную среду.

Полагаем, что рассеивающая среда (например, земная ионосфера) может быть заменена плоским шероховатым экраном, при прохождении через который амплитуда и фаза волны претерпевают такие же изменения, которые произошли бы при распространении в реальной среде. Пользуясь общепринятой терминологией, будем называть поле на выходе из случайно-неоднородной среды полем на экране, совпадающим с плоскостью $z=0$, и рассмотрим широко используемую в радиофизике и оптике модель фазового хаотического экрана

$$U(\boldsymbol{\rho}', z=0)=U_0(\boldsymbol{\rho}')=\exp\{ik\Phi(\boldsymbol{\rho}')\}, \quad \boldsymbol{\rho}'=(u, v). \tag{4}$$

Ограничимся исследованием случая, когда эйконал $\Phi(\boldsymbol{\rho}')$ — нормальный однородный процесс с нулевым средним и изотропной гауссовой функцией корреляции

$$\langle\Phi(\boldsymbol{\rho}')\,\Phi(\boldsymbol{\rho}'')\rangle=\sigma^2K(\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho}'')=\sigma^2\exp\left\{-\frac{1}{a^2}(\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho}'')^2\right\}, \tag{5}$$

где σ^2 — дисперсия флуктуаций эйконала на экране, a — характерный масштаб неоднородностей экрана (рассеивающей среды), а треугольные скобки означают усреднение по ансамблю реализаций.

Точное решение уравнения Гельмгольца, определяющее волновое поле в свободном пространстве за плоским хаотическим экраном $z>0$ при учете граничного условия (4), имеет вид

$$U(\boldsymbol{\rho}, z)=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}U_0(\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial}{\partial z}\left[\exp\{ikR\}/R\right]d^2\boldsymbol{\rho}, \tag{6}$$

$$R=\sqrt{(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')^2+z^2}, \quad \boldsymbol{\rho}=(x, y).$$

Отметим, что решение (6) включает в себя не только однородные бегущие волны, но и неоднородные волны, пространственный период которых меньше длины волны λ. Неоднородные волны ослабевают при удалении от экрана по экспоненциальному закону, и в волновой зоне, определяемой условием

$$kz\gg 1 \quad (kR\gg 1), \tag{7}$$

их влиянием можно пренебречь. Следовательно, область применимости обсуждаемого ММБВ в свободном пространстве находится в волновой зоне, определяемой (7).

При учете условия (7) выражение для волнового поля (6) упрощается:

$$U(\boldsymbol{\rho}, z)\approx\frac{k}{2\pi i}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{R}U_0(\boldsymbol{\rho}')\exp\{ikR\}\,d^2\rho'=\frac{k}{2\pi i}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{R}\exp\{ikS\}\,d^2\boldsymbol{\rho}', \tag{8}$$

где

$$S(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}, z)=R(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}, z)+\Phi(\boldsymbol{\rho}').$$

Основной вклад в волновое поле (8) дает окрестность точки стационарности $\boldsymbol{\rho}'=\boldsymbol{\rho}'_{st}$ этого интеграла на экране. Применяя метод стационарной фазы [7], приходим к выводу о возможности представления (8) в виде бегущей волны (1):

$$U(\boldsymbol{\rho}, z)\approx A(\boldsymbol{\rho}'_{st}, \boldsymbol{\rho}, z)\exp\{ikS(\boldsymbol{\rho}'_{st}, \boldsymbol{\rho}, z)\},$$

которая определяет в точке наблюдения (ρ, z) луч, выходящий из точки стационарности и имеющий направление

$$\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial u},\ \frac{\partial\Phi}{\partial v},\ \sqrt{1-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2}\right\}_{\rho'_{st}}.$$

Координаты точки стационарности могут быть найдены в результате решения системы уравнений [7]:

$$\frac{\partial S}{\partial u}=-\frac{x-u}{R}+\frac{\partial\Phi}{\partial u}=0,\ \frac{\partial S}{\partial v}=-\frac{y-v}{R}+\frac{\partial\Phi}{\partial v}=0. \tag{9}$$

Следовательно, координаты луча в точке наблюдения являются функциями координат точки выхода (в дальнейшем на экране рассматриваются только точки стационарности $u=u_{st}$, $v=v_{st}$ и нижний символ «st» для краткости опускается), т. е.

$$x=\alpha(u,\ v),\ y=\beta(u,\ v). \tag{9'}$$

В общем случае система уравнений (9) может иметь произвольное число решений, соответствующих различным точкам стационарности интеграла, определяющего волновое поле (8). Это означает приход в точку наблюдения нескольких лучей, их количество равно числу точек стационарности, т. е. числу пересечений лучей в этой точке. Таким образом, сформулированный выше с физической точки зрения критерий непересекаемости лучей сводится к математическому условию однозначности решения системы уравнений (9), когда через любую точку (ρ, z) в плоскости наблюдения z=const проходит только один луч. Условие однозначности решения системы (9) эквивалентно условию однозначности преобразования (9′), что, как известно, определяется отличием от нуля якобиана этого преобразования:

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\alpha}{\partial u} & \frac{\partial\alpha}{\partial v}\\ \frac{\partial\beta}{\partial u} & \frac{\partial\beta}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0. \tag{10}$$

Для дальнейшего продвижения ограничимся анализом случая малоуглового рассеяния на неоднородность экрана, когда

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2\ll 1,\ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2\ll 1,\ \text{т. е. } \langle\theta^2\rangle\approx\frac{\sigma^2}{a^2}\ll 1. \tag{11}$$

где θ — угол рассеяния лучей. Условия (11) выполняются во многих практических приложениях. При этом можно считать $R\approx z$, и система уравнений (9′) существенно упрощается, а именно:

$$x=u+z\frac{\partial\Phi}{\partial u},\ y=v+z\frac{\partial\Phi}{\partial v}. \tag{12}$$

Преобразование (12) соответствует отображению экрана z=0 на плоскость приема z=const, а условие однозначности (10) этого преобразования приобретает вид

$$\begin{vmatrix}1+z\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} & z\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}\\ z\frac{\partial^2\Phi}{\partial v\partial u} & 1+z\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\end{vmatrix}>0. \tag{10'}$$

Раскрывая определитель (10′) и учитывая, что согласно условию малоуглового приближения (11) членами порядка θ^2 и выше следует пренебречь, получим по аналогии с [6] условие непересекаемости лучей в форме неравенства

$$1+Q>0, \tag{13}$$

где

$$Q=z\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right).$$

Величина Q является случайной и зависит от распределения вторых производных эйконала на экране. Следовательно, следует провести вероятностную оценку выполнения неравенства (13). В силу исходного предположения о нормальности процесса $\Phi(\rho')$ величина Q, представляющая собой сумму двух нормально распределенных величин, также распределена по нормальному закону. При учете этого вероятность $\mathscr{P}$ выполнения неравенства $Q>-1+\delta$, где δ — произвольная бесконечно малая положительная величина, определяется соотношением [8]

$$\mathscr{P}\,(Q>-1+\delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Q}\int\limits_{-1+\delta}^{\infty}\exp\left\{-\frac{q^2}{2\sigma_Q^2}\right\}dq,$$

которое эквивалентно уравнению для дисперсии $\sigma_Q{}^2$

$$\operatorname{erf}\left(\frac{1-\delta}{\sqrt{2}\,\sigma_Q}\right)=2\mathscr{P}-1. \tag{14}$$

Здесь $\operatorname{erf}(p)$ — интеграл вероятности [9].

Учитывая определение случайной величины Q (13), а также рассматриваемую модель флуктуаций эйконала на экране (5), находим выражение дисперсии $\sigma_Q{}^2$ через характерные параметры задачи:

$$\sigma_Q^2=\langle Q^2\rangle=z^2\left[\ \left\langle\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\right)^2\right\rangle+2\left\langle\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right\rangle+\left\langle\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right)^2\right\rangle\right]=$$

$$=2\,\frac{16z^2}{(ka^2)^2}\,\sigma_\varphi^2,$$

т. е.

$$\sigma_Q=\sqrt{2}\,\mathscr{D}\sigma_\varphi, \tag{15}$$

где $\mathscr{D}=4z/ka^2$ — волновой параметр, а $\sigma_\varphi{}^2=k^2\sigma^2$ — дисперсия флуктуаций фазы волны на экране.

Подставляя выражение (15) в уравнение (14) и пренебрегая бесконечно малой величиной δ, приходим к условию однозначности преобразования (12), обеспечивающему выполнение неравенств (13) и (10′):

$$b\mathscr{D}\sigma_\varphi\leqslant 1. \tag{16}$$

Здесь $b=2\operatorname{erf}^{-1}(2\mathscr{P}-1)$ — числовой коэффициент, зависящий от задания вероятности $\mathscr{P}$ выполнения исследуемого неравенства, от выбора модели хаотического экрана и распределения его неоднородностей; $\operatorname{erf}^{-1}(P)$ — функция, обратная интегралу вероятности, а именно, если $\operatorname{erf}(p)=P$, то $\operatorname{erf}^{-1}(P)=p$. Например, для рассматриваемой в настоящей работе модели фазового хаотического экрана получим

$$\mathscr{P}_1=0{,}90,\quad b_1\approx 1{,}60,\ (\mathscr{D}\sigma_\varphi)_1\leqslant 0{,}56;$$

$$\mathscr{P}_2=0{,}95,\quad b_2\approx 2{,}32,\ (\mathscr{D}\sigma_\varphi)_2\leqslant 0{,}73;$$

$$\mathscr{P}_3=0{,}997,\ b_3\approx 3{,}88;\ (\mathscr{D}\sigma_\varphi)_3\leqslant 0{,}26.$$

Условие (16) является критерием единственности решения задачи Коши построения волновых фронтов (критерием непересекаемости лучей за экраном). В рамках приближения малоуглового рассеяния (11) это условие определяет дальнюю от экрана границу области применимости ММБВ в свободном пространстве.

Для нового параметра $\gamma=\mathscr{D}\sigma_\varphi$ целесообразно использовать наименование «фактор фокусировки», так как значения $\gamma\geqslant 1$ определяют область пересечения лучей. Более того, вычисляя число точек стационарности интеграла (8), можно показать, что число лучей $\mathscr{N}$, приходящих в точку наблюдения, есть функция фактора фокусировки γ, т. е. $\mathscr{N}=\mathscr{N}(\gamma)$, причем $\mathscr{N}\approx\gamma$ при $\gamma\gg 1$.

В заключение отметим, что основной результат работы — условие (16), определяющее область применимости ММБВ, — значительно расширяет возможности использования лучевой трактовки волнового поля в свободном пространстве за хаотическим экраном по сравнению со стандартным определением зоны геометрической оптики $\mathscr{D}\ll 1$. Действительно, в случае слабых флуктуаций фазы на экране ($\sigma_\varphi^2\ll 1$) область бегущих волн перекрывает не только область френелевской дифракции $\mathscr{D}\sim 1$, но и частично область дифракции Фраунгофера $\mathscr{D}\gg 1$. В результате для рассмотренного случая малоуглового рассеяния (11) в области свободного пространства, определяемой условиями (7) и (16), анализ соотношений между статистическими характеристиками рассеянного излучения в плоскости приема и характерными параметрами неоднородностей экрана может быть проведен на основе модифицированного метода бегущих волн. Таким образом, одно из возможных приложений результатов настоящей работы связано с решением обратных задач восстановления параметров неоднородонстей исследуемой среды по рассеянному излучению, принятому после прохождения через свободное пространство.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградова М. Б., Гусев В. Д.//Радиотехн. и электроника. 1974. **19**, № 3. С. 481. [2] Гусев В. Д., Голынский С. М.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. **32**, № 1. С. 35. [3] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М.; Л., 1951. [4] Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М., 1980. [5] Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В. Обращение волнового фронта. М., 1986. [6] Гусев В. Д., Петухова Е. В., Приходько Л. И.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1989. **30**, № 1. С. 16. [7] Федорюк М. В. Асимптотика: интегралы и ряды. М., 1987 [8] Феллер В. Введение в теорию вероятности и ее приложения. Т. 1. М., 1984. [9] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М., 1979.

Поступила в редакцию
23.07.91