УДК 537.8.029.6

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАТОР С ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ТОРЦЕВЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

Г. В. Белокопытов, Т. В. Красюк

(кафедра физики колебаний)

Задача определения собственных частот цилиндрического диэлектрического резонатора с высокой диэлектрической проницаемостью сведена к решению одного трансцендентного уравнения нулевого приближения и последующему вычислению поправок.

1. Диэлектрические резонаторы (ДР) цилиндрической формы широко применяются в исследованиях и радиофизических приложениях сегнетоэлектриков на СВЧ [1, 2]. Во многих случаях [3—7] на торцевые поверхности цилиндра наносятся электроды, что позволяет прикладывать к ДР постоянное поле смещения и, управляя диэлектрической проницаемостью, перестраивать резонатор. При этом диэлектрик в поле смещения приобретает анизотропию: компоненты проницаемости вдоль оси цилиндра ($\varepsilon_\parallel$) и в перпендикулярной плоскости ($\varepsilon_\perp$) различаются между собой.

Полагая, что плоскопараллельные электроды безграничны, можно найти аналитические выражения для компонент электромагнитного поля и уравнения для определения собственных частот анизотропного цилиндрического ДР. Соответствующая трансцендентная система [6] довольно громоздка, что не позволяет эффективно применять ее для идентификации мод ДР, наблюдаемых в эксперименте. Цель настоящей работы — получить упрощенные соотношения для определения собственных частот цилиндрического ДР с высокой диэлектрической проницаемостью.

Исходную систему уравнений для собственных частот [6] цилиндрического ДР радиусом a и высотой h запишем в виде:

$$[f_m(\beta_\perp)+F_m(\alpha)][f_m(\beta_\parallel)+\varepsilon_\parallel^{-1}F_m(\alpha)]=m^2\left(\frac{1}{\beta_\parallel^2}+\frac{1}{\varepsilon_\parallel\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{\beta_\perp^2}+\frac{1}{\alpha^2}\right), \tag{1}$$

$$\alpha^2\varepsilon_\perp=(\varepsilon_\perp-1)a^2\gamma^2-\beta_\perp^2, \tag{2}$$

$$\beta_\parallel^2\varepsilon_\perp=\beta_\perp^2\varepsilon_\parallel, \tag{3}$$

$$k^2\varepsilon_\perp=\gamma^2+\beta_\perp^2/a^2, \tag{4}$$

где $\beta_\parallel$, $\beta_\perp$ и α — поперечные волновые числа, нормированные таким образом, что внутри диэлектрика $E_z\sim J_m(\beta_\parallel r/a)$, $H_z\sim J_m(\beta_\perp r/a)$, а вне диэлектрика E_z, $H_z\sim K_m(\alpha r/a)$; $\gamma=\pi l/n$ — продольное волновое число; $k=\omega/c$; m и l — число вариаций поля по углу φ и число полуволн, укладывающихся по высоте ДР, и обозначено

$$f_m|x|=J_m'(x)/xJ_m(x),\ F_m(x)=K_m'(x)/xK_m(x). \tag{5}$$

Систему нулевого приближения получим, произведя в (1)—(3) предельный переход $\varepsilon_\parallel$, $\varepsilon_\perp\to\infty$, $\varepsilon_\parallel/\varepsilon_\perp=\mathrm{const}$. Отыскав ее решения ($\bar\alpha$, $\bar\beta_\parallel$, $\bar\beta_\perp$, $\bar k$), найдем далее поправки первого приближения ($\delta\alpha$, $\delta\beta_\parallel$,

$\delta\beta_\perp$, δk), для чего удержим в (1) и (2) при $\varepsilon_\parallel$, $\varepsilon_\perp \gg 1$ члены старшего порядка по малому параметру $\varepsilon_\parallel^{-1}$ или $\varepsilon_\perp^{-1}$. При этом, как следует из (3) и (4),

$$\xi = \frac{\delta k}{\bar{k}} = \frac{\delta\beta_\perp}{\bar{\beta}_\perp} = \frac{\delta\beta_\parallel}{\bar{\beta}_\parallel}. \tag{6}$$

Особенности предельного перехода различны для неизлучающих (п. 2) и излучающих мод (п. 3).

2. Пусть при $\varepsilon_\perp \to \infty$ величина $\beta_\perp$ остается ограниченной. Тогда поскольку

$$(\varepsilon_\perp - 1)\, a^2\gamma^2 \gg \beta_\perp^2, \tag{7}$$

то величина α — действительна и стремится к значению

$$\bar{\alpha} = \gamma a, \tag{8}$$

которое будем рассматривать в качестве нулевого приближения α для неизлучающих мод. Поля этих мод за пределами диэлектрика спадают по экспоненциальному закону, так как $K_m\left(\frac{\alpha}{a} r\right) \sim \exp\{-\pi l r/h\}$. Таким образом, на расстоянии $r = h/l$ от поверхности диэлектрика поле убывает в $e^\pi = 21{,}5$ раз. Поэтому если радиус проводящих пластин в 3—5 раз больше, чем радиус диэлектрического цилиндра, то электроды с хорошей точностью можно рассматривать как бесконечно протяженные (ср. [7]).

Зная $\bar{\alpha}$ и перейдя к пределу $\varepsilon_\parallel \to \infty$ в (1), получим

$$[f_m(\beta_\perp) + F_m(\bar{\alpha})]\, f_m(\beta_\parallel) = \frac{m^2}{\beta_\parallel^2}\left(\frac{1}{\beta_\perp^2} + \frac{1}{\bar{\alpha}^2}\right). \tag{9}$$

Уравнение (9) совместно с (3) позволяет найти $\bar{\beta}_\parallel$ и $\bar{\beta}_\perp$. Для изотропного случая $\beta_\perp = \beta_\parallel$ и (9) легко разрешается относительно $f_m(\beta_\parallel)$:

$$f_m(\beta_\parallel) = -\frac{F_m(\bar{\alpha})}{2} \pm \sqrt{\frac{F_m^2(\bar{\alpha})}{4} + \frac{m^2}{\beta^2}\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\bar{\alpha}^2}\right)}, \tag{10}$$

причем знак плюс соответствует моде HE_{lnm}, а знак минус — моде EH_{lnm}, где n — номер корня уравнения $f_m(\beta) = 0$, вблизи которого расположены решения (10).

Поправки первого приближения $\delta\alpha$, $\delta\beta_\perp$ и $\delta\beta_\parallel$ имеют порядок ε^{-1}. Так, $\delta\alpha = -\varepsilon_\perp^{-1}(\gamma^2 + \bar{\beta}_\perp^2/a^2)(a/2\gamma)$, или, с учетом (4),

$$\delta\alpha = -\bar{k}^2\, a/2\gamma, \tag{11}$$

а также

$$\Big\{[f_m'(\bar{\beta}_\perp)\,\bar{\beta}_\perp f_m(\bar{\beta}_\parallel) + f_m'(\bar{\beta}_\parallel)\,\bar{\beta}_\parallel\,(f_m(\bar{\beta}_\perp) + F_m(\bar{\alpha}))] +$$

$$+ 2\,\frac{m^2}{\bar{\beta}_\parallel^2}\left(\frac{2}{\bar{\beta}_\perp^2} + \frac{1}{\bar{\alpha}^2}\right)\Big\}\,\xi = \Big\{\frac{m^2}{\bar{\alpha}^2}\left[\frac{1}{\varepsilon_\perp}\left(\frac{1}{\bar{\beta}_\perp^2} + \frac{1}{\bar{\alpha}^2}\right) - \frac{1}{\bar{\beta}_\parallel^2}\,\frac{2\delta\alpha}{\bar{\alpha}}\right] -$$

$$-[F_m'(\bar{\alpha})\, f_m(\bar{\beta}_\parallel)\,\delta\alpha + \varepsilon_\parallel^{-1} F_m(\bar{\alpha})\,(f_m(\bar{\beta}_\perp) + F_m(\bar{\alpha}))]\Big\}. \tag{12}$$

Соотношения для нулевого и первого приближений наиболее просты для осесимметричных колебаний ($m=0$). Для мод E_{ln0} уравнение нулевого приближения сводится к виду

$$f_0(\bar{\beta}_{\parallel})=0, \text{ или } J_1(\bar{\beta}_{\parallel})=0, \tag{13}$$

а для поправки первого приближения находим

$$\xi=\frac{\delta k}{\bar{k}}=-\left(\frac{\bar{\beta}_{\parallel}}{\bar{k}a\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}}\right)^2\frac{F_0(\bar{\alpha})}{\varepsilon_{\parallel}}. \tag{14}$$

Для мод H_{ln0} уравнение нулевого приближения

$$f_0(\bar{\beta}_{\perp})+F_0(\bar{\alpha})=0, \tag{15}$$

а поправка первого приближения равна

$$\xi=\frac{\delta k}{\bar{k}}=\frac{\bar{\beta}_{\perp}^2}{\varepsilon_{\perp}(\gamma a)^2}\,\frac{1+\bar{\alpha}^2F_0(\bar{\alpha})}{1-F_0(\bar{\alpha})+\bar{\beta}_{\perp}^2F_0^2(\bar{\alpha})}, \tag{16}$$

причем $\bar{\alpha}$ в (14)—(16) известно (8).

3. В сегнетоэлектрических резонаторах ($\varepsilon_{\parallel}$, $\varepsilon_{\perp}\gg 1$) неравенство (7) может не выполняться либо в случае, когда один из размеров ДР сравним с длиной волны в окружающем пространстве, либо для E-мод, у которых распределение поля однородно по высоте цилиндра. Практический интерес представляет последний случай — возбуждение колебаний на типах E_{0nm} ($l=0$). Эти моды являются излучающими, для них величина α — мнимая, и, как следует из (2) и (3), равна

$$\alpha=i\beta_{\parallel}/\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}. \tag{17}$$

Соответственно

$$F_m(\alpha)=F_m(-i\tilde{\alpha})=-\frac{H_m^{(1)\prime}(\tilde{\alpha})}{\tilde{\alpha}H_m^{(1)}(\tilde{\alpha})}.$$

Если $\varepsilon_{\parallel}\to\infty$, а $\beta_{\parallel}$ остается конечным, то $\alpha\to 0$. Для этого случая, воспользовавшись разложением цилиндрических функций в ряды Лорана [8], найдем следующие асимптотические представления $F_m(\alpha)$:

$$F_m(\alpha)\cong\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha^2}\,\dfrac{[\ln(\alpha/2)-1]+i\pi/2}{\pi^2/4+[\ln(\alpha/2)-1]^2}, & m=0,\\[2ex] \dfrac{2}{\alpha^2}\left[1+2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\left(1+\ln\dfrac{\alpha}{2}\right)\right], & m=1,\\[2ex] \dfrac{m}{\alpha^2}\left[1-\dfrac{2}{m(m-1)}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\right], & m=2,\ 3,\ \ldots.\end{cases} \tag{18}$$

Для мод E_{0nm} уравнение (1) с учетом (17) сводится к виду

$$f_m(\beta_{\parallel})+\varepsilon_{\parallel}^{-1}F_m(\alpha)=0. \tag{19}$$

Предельным переходом $\varepsilon_{\parallel}\to\infty$ с учетом (17) и (18) получаем из (19) уравнение нулевого приближения

$$f_m(\bar{\beta}_{\parallel})+\frac{m}{\bar{\beta}_m^2}=0. \tag{20}$$

Удерживая, как и ранее, при $\varepsilon_{\parallel}\gg 1$ члены старшего порядка по $\varepsilon_{\parallel}^{-1}$ в (19), найдем поправки первого приближения. Особым случаем является $m=0$, для которого поправки не имеют порядок $\varepsilon_{\parallel}^{-1}$, а являются логарифмическими. Для мод E_{0n0} вместо (20) в первом приближении имеем уравнение

$$f_0(\beta_{\parallel})+\frac{1}{\beta_{\parallel}^2}\,\frac{(\ln(\beta_{\parallel}/\sqrt{\varepsilon_{\parallel}})-1)+i\,\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi^2}{2}+(\ln(\beta_{\parallel}/\sqrt{\varepsilon_{\parallel}})-1)^2}=0. \tag{21}$$

Корни (21) комплексны, что свидетельствует о значительных потерях на излучение. Физически это понятно, так как моды E_{0n0} представляют собой суперпозицию однородных цилиндрических волн, падающих нормально на боковую поверхность ДР. Для этих волн условие полного внутреннего отражения не достигается при любых, сколь угодно больших $\varepsilon_{\parallel}$, что и предопределяет высокий уровень потерь на излучение.

Для $m\geqslant 1$ поправки первого приближения порядка ε^{-1} и действительны:

$$\begin{aligned}\xi&=\frac{1}{2\varepsilon_{\parallel}}\left(1+2\ln\frac{\bar\beta_{\parallel}}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}}\right)\frac{1}{f_1'(\bar\beta_{\parallel})\,\bar\beta_{\parallel}},\quad m=1,\\ \xi&=\frac{1}{2\varepsilon_{\parallel}(m-1)}\,\frac{1}{f_m'(\bar\beta_{\parallel})\,\bar\beta_{\parallel}},\quad m\geqslant 2.\end{aligned} \tag{22}$$

Исходя из определения $f_m(x)$ (5) и функциональных уравнений для цилиндрических функций нетрудно установить, что

$$f_m'(\bar\beta_{\parallel})=\frac{1}{\bar\beta_{\parallel}}\left(1+\frac{4m}{\bar\beta_{\parallel}^2}\right), \tag{23}$$

а уравнения нулевого приближения (20) сводятся к виду

$$J_{m-1}(\beta_{\parallel})=0,\quad m\geqslant 1. \tag{24}$$

4. Полученные соотношения находятся в соответствии с общим подходом [9], согласно которому характеристики полей ДР следует искать в виде

$$ka\sqrt{\varepsilon}=A_0+A_1\varepsilon^{-1}+A_2\varepsilon^{-2}+\ldots. \tag{25}$$

При этом константы A_i, где i — номер приближения, практически во всех важных случаях (за исключением мод E_{0n0}) не зависят от абсолютной величины диэлектрической проницаемости. Для сегнетоэлектриков с $\varepsilon>10^3$ уже нулевое приближение обеспечивает точность лучше 1%. Это, в частности, позволяет использовать однородные по высоте моды для быстрого определения диэлектрической проницаемости таких материалов на СВЧ. При $h\leqslant a/2$ самой низкочастотной является мода E_{110} ($ka\sqrt{\varepsilon}=2{,}40$), а следующими по частоте — мода E_{210} ($ka\sqrt{\varepsilon}=3{,}82$) и аксиально симметричная E_{010}, причем их собственные частоты различаются менее чем на 1% (при $\varepsilon=4\cdot 10^3$ — менее чем на 0,4%).

Таким образом, задача о нахождении собственных частот цилиндрических ДР при $\varepsilon\gg 1$ сведена нами от громоздкой системы нелинейных уравнений (1)—(4) к решению одного трансцендентного уравнения нулевого приближения и последующему вычислению поправок. Это

позволяет повысить скорость численного счета, а представление (25) придает результатам универсальный характер.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Диэлектрические резонаторы/Ред. М. Е. Ильченко. М., 1989. [2] Цибиров К. Н., Борисов С. А., Безбородов Ю. М.//Зарубежная радиоэлектроника. 1981. № 11. С. 21. [3] Cohn S. B., Kelly K. C.//IEEE Trans. Microwave Theory Techn. 1966. **MTT-14**, N 9. P. 406. [4] Hakki B. W., Coleman P. D.//IRE Trans. 196. **MTT-8**, N 9. P. 402. [5] Иванов И. В. и др.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1969. № 6. С. 40. [6] Егоров В. Н., Мальцева И. Н.//Электронная техника. Сер. 1, Электроника СВЧ. 1984. № 361. С. 3. [7] Kobayashi Y., Masayuki K. //IEEE Trans. Microwave Theory Techn. 1985. **MTT-33**, N 7. P. 586. [8] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М., 1977. [9] Van Bladel J.//IEEE Trans. Microwave Theory Techn. 1975. **MTT-23**, N 2. P. 199.

Поступила в редакцию
17.09.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА, АСТРОНОМИЯ. 1992. Т. 33, № 4

УДК 517.958

НЕСТАЦИОНАРНАЯ САМОСОГЛАСОВАННАЯ МОДЕЛЬ АВТОЭЛЕКТРОННОЙ ЭМИССИИ ИЗ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО КАТОДА

Б. А. Марков, А. Д. Поезд

(кафедра математики)

Рассмотрена модель автоэлектронной эмиссии для самосогласованных нелинейных задач сильноточной СВЧ-электроники. На основе моделирования полной нестационарной системы уравнений Максвелла—Власова показано, что ток инжекции имеет ярко выраженный импульсный по времени характер.

Нелинейным нестационарным задачам электроники посвящено большое число работ (см., напр., [1—4]). В частности, в [2] исследовались плазменные и вакуумные СВЧ-генераторы цилиндрической геометрии в предположении постоянства силы тока инжектируемого пучка. При этом значение силы тока не определялось каким-либо способом из внутренних параметров модели, а задавалось, исходя из усредненных данных натурных экспериментов. Этот безусловный недостаток использованной в [2] модели мы попытаемся преодолеть в настоящей работе. Нас будут интересовать не простые стационарные модели инжекции типа закона «3/2» Ленгмюра, а нестационарные и самосогласованные модели, основанные на решении полной системы уравнений Максвелла и кинетического уравнения Власова.

Рассмотрим отрезок гладкого цилиндрического металлического волновода длины L и радиуса R, помещенного в сильное продольное магнитное поле. Торец $z=0$ устройства закрыт металлической фольгой. К последней вплотную примыкает кольцевой катод, предназначенный для инжекции электронов. Анод представляет собой металлическую сетку, расположенную в сечении $z=L_a$, на которую подается мощный импульс электромагнитного поля для вытягивания электронов из катода. Таким образом, модель, использованная в работе [2], усложняется введением катод-анодного промежутка, предназначенного для формирования сильноточного электронного пучка.

Кратко остановимся на уравнениях, лежащих в основе рассматриваемого приближения. В силу азимутальной симметрии резонатора и замагниченности пучка уравнения Максвелла примут следующий вид: