тимизация продольной и поперечной структуры СВЧ-поля, профиля ведущего магнитного поля и др. [1]. Имеется дополнительная возможность — профилирование параметров ондулятора по длине взаимодействия [8].

Приведенные результаты показывают, что предлагаемая схема с накачкой пучка неадиабатическим магнитным ондулятором в пространстве взаимодействия может использоваться для разработки гиротронов повышенной мощности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гиротрон/Ред. А. В. Гапонов-Грехов. Горький, 1981. [2] Гинзбург Н. С., Кременцов В. И., Петелин М. И. и др.//ЖТФ. 1979. **49**, № 2. С. 378. [3] Маршалл Т. Лазеры на свободных электронах. М., 1987. [4] Александров А. Ф., Веснин В. Л., Кубарев В. А., Черепнин В. А.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. **32**, № 5. С. 40 [5] Александров А. Ф., Власов А. Н., Галузо С. Ю. и др.//Релятивистская высокочастотная электроника. Горький, 1983. Вып. 3. С. 96. [6] Гинзбург Н. С., Новожилова Ю. В., Песков Н. Ю.//Там же. Горький, 1990. Вып. 6. С. 82. [7] Александров А. Ф., Веснин В. Л., Кубарев В. А.//Радиотехн. и электроника. 1991. **36**, № 8. С. 1525. [8] Корниенко В. Н., Кубарев В. А., Черепенин В. А.//Тез. докл. X Всесоюз. семинара «Волновые и колебательные явления в электронных приборах О-типа». Л. (ЛЭТИ), 1990. С. 76.

Поступила в редакцию
28.10.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА, АСТРОНОМИЯ. 1992. Т. 33, № 4

ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

УДК 538.56+535

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И КОМПРЕССИЯ ИМПУЛЬСОВ В СРЕДАХ С ДИСПЕРСИОННЫМИ ПОТЕРЯМИ

Ю. Е. Дьяков

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Развито спектральное и временнбе описание импульсов, распространяющихся в селективно поглощающих или усиливающих средах. Обсуждаются оптимальный выбор формы импульса, компенсация дисперсионных искажений и некоторые новые методы компрессии, основанные на использовании дисперсионных потерь. Детально рассмотрена эволюция гауссовского ЧМ-импульса в «параболической» среде, имеющей квадратичную комплексную дисперсионную характеристику, в частности в лазерном ВКР-усилителе. Получены общие оценки для энергии, заключенной в «крыльях» импульса или его частотного спектра.

Введение

Влияние дисперсионных потерь первого порядка ($\sim\omega$) на характеристики гауссовского импульса, распространяющегося в линейной среде, рассматривалось в работе [1]. Некоторые соотношения, характеризующие эволюцию импульса произвольной формы в среде с произвольным законом дисперсии, были получены в работе [2]. Наиболее полно действительная и мнимая компоненты дисперсионной характеристики учитываются в работах, посвященных анализу предвестников [1]. Однако в большинстве статей, опубликованных в последнее время и посвященных преобразованию (в частности, компрессии) импульсов в диспергирующих средах, учитывается только дисперсия скоростей, а возможные потери или не вводятся совсем, или учитываются прибли-

женно в виде декремента затухания α_0, одинакового для всех частот в спектре импульса (см., напр., обзор в [3]). Такое положение объясняется, по-видимому, как математическими сложностями, возникающими при учете зависящих от частоты потерь, так и направленностью этих работ на описание импульсов в оптических волокнах, где затухание действительно очень мало ($\alpha_0 \sim 0{,}2$ дБ/км $\sim 5\cdot 10^{-7}$ см$^{-1}$).

Тем не менее в связи с появлением активных волокон и волоконных усилителей [4] и тенденцией к уменьшению длительности импульсов обобщение анализа на случай зависящих от частоты потерь становится актуальной задачей. Кроме того, только решение этой задачи позволит надежно оценить условия, при которых дисперсионными потерями можно пренебречь при описании таких, например, тонких интерференционных эффектов, как компрессия импульсов.

Результаты, полученные в настоящей работе, указывают на интересные, на наш взгляд, возможности преобразования импульсов, связанные именно с дисперсионными потерями; в частности, обсуждаются три новых механизма компрессии.

Усиливающие и поглощающие среды с произвольной дисперсией

1. Рассмотрим узкополосный импульс ($\Delta\omega \ll \omega_0$)

$$E(t,\ z) = \exp\{i\omega_0 t - iq_0 z - \alpha_0 z\}\, A(\theta,\ z) + \text{к. с.},\quad \theta = t - z/u_0, \tag{1}$$

распространяющийся вдоль оси z в среде с комплексным волновым числом $k(\Omega) = k_1(\Omega) - ik_2(\Omega)$ ($k_{1,2}$ — действительны); в (1) $q_0 = k_1(\omega_0)$, $\alpha_0 = k_2(\omega_0)$. Введем функции частоты $q(\omega)$ и $\alpha(\omega)$, определив их соотношениями

$$k_1(\omega_0 + \omega) = q_0 + q_1\omega + q(\omega),\quad k_2(\omega_0 + \omega) = \alpha_0 + \alpha(\omega), \tag{2}$$

$q_1 = 1/u_0 = \partial k_1(\omega_0)/\partial\omega_0$. Функция $q(\omega)$ определяет зависимость от частоты (дисперсию) групповой скорости $u(\omega_0 + \omega) = u_0(1 + u_0\partial q(\omega)/\partial\omega)^{-1}$; функция $\alpha(\omega)$ описывает дисперсионные потери, положительные или отрицательные, вблизи центральной частоты ω_0 спектра импульса. Частотный коэффициент передачи для комплексной амплитуды импульса $A(\theta, z)$ определяется при этом выражением [2]

$$\mathcal{K}(\omega,\ z) = \exp\{-iq(\omega)z - \alpha(\omega)z\}. \tag{3}$$

Через $\mathcal{K}(\omega, z)$ можно выразить все параметры импульса в произвольной точке $z \geqslant 0$. Пусть на границе, $z=0$, импульс имеет амплитуду произвольного вида

$$A_0(t) = \int A_{0,\omega} \exp\{i\omega t\}\, d\omega \tag{4}$$

и энергетический спектр $g_0(\omega) = 2\pi |A_{0,\omega}|^2$. Тогда при $z \geqslant 0$ в (1)

$$A(\theta,\ z) = \int A_\omega(z) \exp\{i\omega\theta\}\, d\omega,\quad A_\omega(z) = A_{0,\omega}\mathcal{K}(\omega,\ z), \tag{5}$$

$$g(\omega,\ z) = 2\pi\, |A_\omega(z)|^2 = g_0(\omega)\ \ |\mathcal{K}(\omega,\ z)|^2. \tag{6}$$

Заметим, что спектр комплексной амплитуды $A(t) = a(t) + ib(t)$ (a, b — действительны) имеет, вообще говоря, как четную компоненту $g_1(-\omega) = g_1(\omega)$, так и нечетную компоненту $g_2(-\omega) = -g_2(\omega)$, т. е. спектр может быть асимметричен *:

$$g(\omega) = g_1(\omega) + g_2(\omega),\quad g(-\omega) = g_1(\omega) - g_2(\omega) \neq g(\omega),$$

* По поводу асимметрии спектра случайно-модулированных импульсов см. [5].

$$g_1(\omega)=2\pi(|a_\omega|^2+|b_\omega|^2)\geqslant 0,\quad g_2(\omega)=2\pi i(a_\omega^* b_\omega-a_\omega b_\omega^*)\gtrless 0.$$

Как следует из (5) и (6), в диспергирующих средах с $\alpha(\omega)\neq 0$ не только длительность импульса $\Delta\tau$, но также его энергия U и ширина частотного спектра $\Delta\omega$ зависят от z:

$$U(z)=\int g(\omega,\ z)\,d\omega=\int |A(\theta,\ z)|^2\,d\theta, \tag{7}$$

$$\Delta\tau(z)=[\langle\tau^2\rangle-\langle\tau\rangle^2]^{1/2},\quad \langle\tau^s\rangle=\int \theta^s\,|A(\theta,\ z)|^2\,d\theta/U(z), \tag{8}$$

$$\Delta\omega(z)=[\langle\omega^2\rangle-\langle\omega\rangle^2]^{1/2},\quad \langle\omega^s\rangle=\int \omega^s g(\omega,\ z)\,d\omega/U(z). \tag{9}$$

Вычисляя $\Delta\tau$ и $\Delta\omega$, иногда удобно моменты $\langle\tau^s\rangle$ выражать через частотные характеристики импульса, а $\langle\omega^s\rangle$ — через временные [2, 5, 6].

Коэффициенту передачи (3) соответствует функция Грина

$$\mathcal{H}(t,\ z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(\omega,\ z)\exp\{i\omega t\}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-iq(\omega)z-\alpha(\omega)z+i\omega t\}\,d\omega, \tag{10}$$

так что вместо (5) можно написать

$$A(\theta,\ z)=\int_{-\infty}^{\infty}A_0(t)\,\mathcal{H}(\theta-t,\ z)\,dt. \tag{11}$$

2. Энергию

$$U(\tau,\ z)=\left(\int_{-\infty}^{\langle\tau\rangle-\tau}+\int_{\langle\tau\rangle+\tau}^{\infty}\right)|A(\theta,\ z)|^2\,d\theta,$$

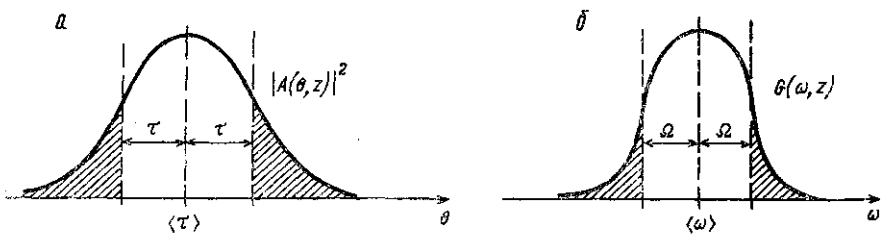

Рис. 1

заключенную в «крыльях» импульса, пришедшего в произвольную точку среды $z\geqslant 0$ (рис. 1, *а*), можно оценить по формуле

$$U(\tau,\ z)\leqslant U(z)\,(\Delta\tau/\tau)^2, \tag{12}$$

где $U(z)=U(0,\ z)$ — полная энергия (7), τ — параметр, определяющий полудлительность центральной части импульса, $\Delta\tau$ — среднеквадратичная длительность (8). Неравенство (12) можно уточнить и обобщить.

Пусть

$$\bar{f}=\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta-\langle\tau\rangle)\,|A(\theta,\ z)|^2\,d\theta/U(z)<\infty, \tag{13}$$

где $f(\tau)$ — любая четная, положительная и возрастающая функция τ. Тогда

$$U(\tau,\ z)\leqslant U(z)\,\bar{f}/f(\tau). \tag{14}$$

При $f(\tau)=\tau^2$ выражение (14) переходит в (12). Если условие (13) выполняется, например, для $f(\tau)=\tau^{2s}$ $(s>1)$ или $f(\tau)=\exp\{\gamma\tau^2\}$, то оценка (14) будет значительно точнее, чем (12). Аналогичным образом можно оценить энергию

$$U(\Omega,\ z)\equiv\left(\int_{-\infty}^{\langle\omega\rangle-\Omega}+\int_{\langle\omega\rangle+\Omega}^{\infty}\right)g(\omega,\ z)\,d\omega,$$

содержащуюся в крыльях частотного спектра (6) (рис. 1, *б*):

$$U(\Omega,\ z)\leqslant U(z)\,(\Delta\omega/\Omega)^2,\ U(\Omega,\ z)\leqslant U(z)\,\bar{\varphi}/\varphi(\Omega); \tag{15}$$

здесь $\Delta\omega$ дается формулой (9), Ω — принятая полуширина центральной части спектра, $\varphi(\Omega)$ — функция, обладающая теми же свойствами, что и $f(\tau)$ в (14), $\bar{\varphi}=\int\varphi(\omega-\langle\omega\rangle)\,g(\omega,\ z)\,d\omega/U(z)<\infty$.

Неравенства (12), (14) и (15) выводятся тем же методом, что и известное в статистике неравенство Чебышева (см., напр., [7]); аналогами плотности вероятности (как в (8) и (9)) являются при этом положительные и нормированные на единицу функции $|A(\theta,\ z)|^2/U(z)$ и $g(\omega,\ z)/U(z)$.

3. Связанные с $q(\omega)$ и $\alpha(\omega)$ дисперсионные искажения импульса могут быть значительными, так что импульс $A(\theta,\ z_1)$ в некоторой точке $z=z_1$ будет существенно отличаться от $A_0(t)$. Можно, однако, полностью убрать эти искажения, пропустив $A(\theta,\ z)$ через *компенсирующую* систему с коэффициентом передачи

$$\mathcal{K}_C(\omega,\ z_2)=\exp\{i\omega\tau+a\}\,\mathcal{K}^{-1}(\omega,\ z_1), \tag{16}$$

где τ и a — произвольные, не зависящие от ω, параметры. На выходе компенсирующей системы будет формироваться импульс , совпадающий по форме с $A_0(t)$:

$$A(\theta,\ z_2)=\int A_{0,\omega}\,\mathcal{K}(\omega,\ z_1)\,\mathcal{K}_C(\omega,\ z_2)\exp\{i\omega\tau+a+i\omega\theta\}\,d\omega=$$

$$=\exp\{a\}\,A_0(\theta+\tau)$$

(рис. 2, *а*). Другой вариант неискажающей передачи импульса $A_0(t)$ через диспергирующую среду состоит в том, чтобы сначала пропустить

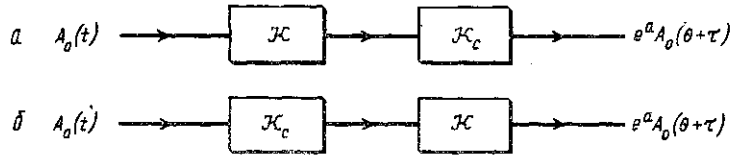

Рис. 2

$A_0(t)$ через компенсирующую систему $\mathscr{K}_C$ и получить специальным образом «пред-искаженный» импульс. При его дальнейшем распространении в $\mathscr{K}$ на известной длине l_1 (на которую настроена система $\mathscr{K}_C$) эти пред-искажения полностью компенсируются и восстанавливается входной импульс $A_0(t)$ (рис. 2, *б*).

Известным примером компенсирующих систем являются среды без потерь с положительной и отрицательной дисперсией скоростей [8]:

$$\mathscr{K}(\omega, z_1) = \exp\left\{\frac{i}{2} q_2\omega^2 z_1\right\}, \quad \mathscr{K}_C(\omega, z_2) = \exp\left\{-\frac{i}{2} q_2' \omega^2 z_2\right\} \tag{17}$$

при $q_2 z_1 = q_2' z_2$; выражение (17) для $\mathscr{K}_C$ является частным случаем (16).

Рассмотрим другой пример компенсирующих систем. Для описания сигнала, распространяющегося в *поглощающей* среде вблизи одной из линий поглощения, можно получить уравнения

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u}\frac{\partial A}{\partial t} = -\Gamma Q, \quad T\dot{Q} + Q = A, \quad \Gamma > 0, \tag{18}$$

для нормированных амплитуд сигнала A и колебаний среды Q. Согласно (18) при этом для сигнала

$$\mathscr{K}_1(\omega, z) = \exp\left\{-i\omega\frac{z}{u} - \frac{\Gamma z}{1 + i\omega T}\right\},$$

$$\mathscr{H}_1(t, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\omega t - \frac{\Gamma z}{1 + i\omega T}\right\} d\omega =$$

$$= \delta(t) - \frac{G}{T}\,\frac{J_1(\sqrt{2G\tau})}{\sqrt{2G\tau}} \exp\{-\tau\}\, 1(t), \tag{19}$$

где J_1 — функция Бесселя, $1(t)$ — функция Хэвисайда, $G = \Gamma z$, $\tau = t/T$. Для *резонансно-усиливающих* сред получим подобные же соотношения:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u}\frac{\partial A}{\partial t} = \Gamma_2 Q^*, \quad T_2\dot{Q} + Q = A^*, \quad \Gamma_2 > 0,$$

$$\mathscr{K}_2(\omega, z) = \exp\left\{-i\omega\frac{z}{u} + \frac{\Gamma_2 z}{1 + i\omega T_2}\right\}, \tag{20}$$

$$\mathscr{H}_2(t, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\omega t + \frac{\Gamma_2 z}{1 + i\omega T_2}\right\} d\omega =$$

$$= \delta(t) + \frac{G}{T_2}\,\frac{I_1(\sqrt{2G\tau})}{\sqrt{2G\tau}} \exp\{-\tau\}\, 1(t), \tag{21}$$

где, например, для ВКР-усилителя с монохроматической накачкой $\Gamma_2 = (1/2) g I_p$, I_p — интенсивность накачки, $g > 0$ — параметр вещества, $G = \Gamma_2 z$, $\tau = t/T_2$, I_1 — модифицированная функция Бесселя. Выражения (19) и (21) следуют из результатов работы [9] (см. также [7]). Мы видим, что $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ удовлетворяют критерию (16), если $T = T_2$ и $\Gamma l_1 = \Gamma_2 l_2$ ($l_{1,2}$ — длины z, соответствующие $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$).

4. Рассмотрим обратную задачу: каким должен быть входной импульс A_0, чтобы он, пройдя в диспергирующей среде с коэффициентом передачи $\mathscr{K}$ расстояние l, в момент времени θ_0 имел бы наибольшее из всех возможных пиковое значение интенсивности $J_{\max}$? По аналогии с известной задачей о согласованном фильтре [7] в этом случае

можно говорить о согласованном с отрезком среды $0<z<l$ оптимальном сигнале (импульсе) A_0^{opt} [2, 6]. Для определенности энергию входного импульса U_0 и площадь под резонансной кривой $S_0 = \int |\mathcal{K}(\omega, l)|^2 d\omega$ считаем фиксированными параметрами.

Используя неравенство Коши—Буняковского $\left|\int fg dx\right|^2 \leqslant \int |f|^2 dx \times \int |g|^2 dx$, в котором равенство достигается при $f \sim g^*$, а также соотношения (5) и (6), находим, полагая $f = A_{0,\omega}$, $g = \mathcal{K}(\omega, l) \exp\{i\omega\theta_0\}$: $|A(\theta_0, l)|^2 = \left|\int A_{0,\omega} \mathcal{K}(\omega, l) \exp\{-i\omega\theta_0\} d\omega\right|^2 \leqslant U_0 S_0/2\pi$. Таким образом, $J_{\max} = U_0 S_0/2\pi$, причем $A_{0,\omega}^{\text{opt}} = C\mathcal{K}^*(\omega, l) \exp\{-i\omega\theta_0\}$, $A_0^{\text{opt}}(t) = 2\pi C \mathcal{H}^*(t-\theta_0, l)$, $2\pi C^2 = U_0/S_0$. Выражая с помощью (3) все величины через $\alpha(\omega)$ и $q(\omega)$, получим

$$A_0^{\text{opt}}(t) = C \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-iq(\omega) l - \alpha(\omega) l + i\omega(t-\theta_0)\} d\omega, \tag{22}$$

$$A^{\text{opt}}(\theta, l) = C \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-2\alpha(\omega) l + i\omega(\theta-\theta_0)\} d\omega, \tag{23}$$

$$J_{\max} = \frac{U_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-2\alpha(\omega) l\} d\omega. \tag{24}$$

Мы видим, что оптимальный входной импульс A_0^{opt} определяется полной дисперсионной характеристикой среды ($\alpha(\omega)$ и $q(\omega)$), но соответствующий сигнал на выходе зависит только от функции $\alpha(\omega)$, т. е. от дисперсионных потерь.

Модель «параболической» среды

5. Обобщая условия анализа, принятые в работе [1] (в (3) $q(\omega) = (1/2) q_2\omega^2$, $\alpha(\omega) = \alpha_1\omega$), рассмотрим случай дисперсии первого и второго порядка, когда в (3)

$$q(\omega) = \frac{1}{2} q_2\omega^2, \quad \alpha(\omega) = \alpha_1\omega + \frac{1}{2}\alpha_2\omega^2 = \frac{1}{2}\gamma_0 + \frac{1}{2}\alpha_2(\omega-\omega_d)^2, \tag{25}$$

$$\mathcal{K}(\omega, z) = \exp\left\{-\alpha_1 z\omega - \frac{1}{2}(\alpha_2 + iq_2) z\omega^2\right\}, \tag{26}$$

$$|\mathcal{K}(\omega, z)|^2 = \exp\{-2\alpha_1 z\omega - \alpha_2 z\omega^2\} = \exp\left\{-\gamma_0 z - \frac{(\omega-\omega_d)^2}{2\Delta\omega_d^2(z)}\right\}. \tag{27}$$

Здесь $\omega_d = -\alpha_1/\alpha_2$ — частота, на которой декремент затухания минимален (при $\alpha_2>0$) или максимален (при $\alpha_2<0$) и равен $\gamma_0 = -\alpha_1^2/\alpha_2$,

$$\Delta\omega_d(z) = (2\alpha_2 z)^{-1/2} \tag{28}$$

— ширина полосы усиления (при $\alpha_2>0$). Согласно (10) и (26) функция Грина параболической среды равна

$$\mathcal{H}(t, z) = [2\pi(\alpha_2 + iq_2) z]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(t-i\alpha_1 z)^2}{2(\alpha_2+iq_2) z}\right\}. \tag{29}$$

Как и в [1], рассмотрим прохождение через среду гауссовского импульса с линейной частотной модуляцией, энергия которого равна U_0:

$$A_0(t)=(U_0/\sqrt{\pi}\,t_0)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}(1+i\beta)(t/t_0)^2\right\},\quad \Delta\tau_0=t_0/\sqrt{2}, \tag{30}$$

$$A_{0,\omega}=(U_0/\sqrt{\pi}\,t_0)^{1/2}\frac{t_0}{\sqrt{2\pi(1+i\beta)}}\exp\left\{-\frac{\omega^2t_0^2}{2(1+i\beta)}\right\},\quad \Delta\omega_0=\frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{2}\,t_0}, \tag{31}$$

$$g_0(\omega)=\frac{U_0}{\sqrt{\pi}\,t_0}\frac{t_0^2}{\sqrt{1+\beta^2}}\exp\left\{-\frac{\omega^2t_0^2}{1+\beta^2}\right\}. \tag{32}$$

Используя формулы (6)—(9) и (32), находим для импульса в среде:

$$g(\omega,\ z)=\frac{U_0}{t_0\sqrt{\pi}}\frac{t_0^2}{\sqrt{1+\beta^2}}\exp\left\{-\Gamma(z)-\frac{1}{2}\left[\frac{\omega-\omega_1(z)}{\Delta\omega(z)}\right]^2\right\}, \tag{33}$$

$$U(z)=U_0\exp\{-\Gamma(z)\}\cdot(1+C_3z)^{-1/2},\quad \Delta\omega(z)/\Delta\omega_0=(1+C_3z)^{-1/2}, \tag{34}$$

где

$$\Gamma(z)=\alpha_1z\omega_1(z),\quad \omega_1(z)=-\frac{\alpha_1z}{t_0^2B(z)}, \tag{35}$$

$$B(z)=\frac{1+C_3z}{1+\beta^2}=\frac{1}{1+\beta^2}+\frac{\alpha_2}{t_0^2}z,\quad C_3=\alpha_2(1+\beta^2)/t_0^2 \tag{36}$$

и предполагается, что $1+C_3z>0$. Подставляя (29) и (30) в (11), найдем временные характеристики:

$$A(\theta,\ z)=\frac{1}{\sqrt{1+i\beta}\sqrt{(1+i\beta)^{-1}+(\alpha_2+iq_2)zt_0^{-2}}}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{(\theta+i\alpha_1z)^2/2t_0^2}{(1+i\beta)^{-1}+(\alpha_2+iq_2)zt_0^{-2}}\right\}=$$

$$=\{(1+i\beta)[B(z)+iC(z)]\}^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}(V_1+iV_2)\right\}, \tag{37}$$

где

$$V_1=\frac{(\theta-\alpha_1^2z^2)B(z)+2\theta\alpha_1zC(z)}{t_0^2[B^2(z)+C^2(z)]}=\frac{1}{2}\Gamma(z)+\frac{1}{2}\left[\frac{\theta-\theta_1(z)}{\Delta\tau(z)}\right]^2,$$

$$V_2=\frac{2\theta\alpha_1zB(z)-C(z)(\theta^2-\alpha_1^2z^2)}{t_0^2[B^2(z)+C^2(z)]},\quad C(z)=\frac{q_2z}{t_0^2}-\frac{\beta}{1+\beta^2}, \tag{38}$$

$$\theta_1(z)=-\alpha_1z\frac{C(z)}{B(z)},\quad \frac{\Delta\tau(z)}{\Delta\tau_0}=\sqrt{\frac{(1-C_1z)^2+C_2^2z^2}{1+C_3z}}, \tag{39}$$

$$C_1=\frac{q_2\beta-\alpha_2}{t_0^2},\quad C_2=\frac{\alpha_2(1+\beta^2)}{t_0^2}.$$

Эти выражения показывают, что импульс в среде сохраняет гауссовскую форму; его мгновенная интенсивность равна

$$I(\theta,\ z)=|A(\theta,\ z)|^2=J\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\theta-\theta_1(z)}{\Delta\tau(z)}\right]^2\right\}, \tag{40}$$

где

$$J=|A(\theta,\ z)|^2_{\max}=\frac{U_0}{\sqrt{\pi}\,t_0}\,\frac{\exp\{-\Gamma(z)\}}{\sqrt{(1-C_1z)^2+C_2^2z^2}} \tag{41}$$

— пиковая интенсивность. Из полученных формул следует, что в любой точке z выполняются соотношения $\frac{U(z)}{G(z)\,\Delta\omega(z)}=\frac{U(z)}{T(z)\,\Delta\tau(z)}=\sqrt{2\pi}$, где $G(z)=\frac{U_0}{t_0\sqrt{\pi}}\,\frac{t_0^2}{\sqrt{1+\beta^2}}\exp\{-\Gamma(z)\}$ — максимум спектра, приходящийся на частоту $\omega_1(z)$ (см. (34)).

Как следует из (22)—(25), для параболической среды с $\alpha_2>0$

$$A_0^{\text{opt}}(t)=\sqrt{\frac{2\pi C^2}{(\alpha_2-iq_2)l}}\exp\left\{-\frac{(t-\theta_0-i\alpha_1 l)^2}{2(\alpha_2-iq_2)\,l}\right\},$$

$$\Delta\tau_0=\sqrt{\frac{(\alpha_2^2+q_2^2)\,l}{2\alpha_2}},\quad \Delta\omega_0=\frac{1}{\sqrt{2\alpha_2 l}},$$

$$A^{\text{opt}}(\theta,\ l)=\sqrt{J_{\max}}\exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_0)^2}{4\alpha_2 l}-i\,\frac{(\theta-\theta_0)\,\alpha_1}{\alpha_2}\right\},$$

$$\Delta\tau(l)=\sqrt{\alpha_2 l},\quad \Delta\omega(l)=\frac{1}{2\sqrt{\alpha_2 l}}, \tag{42}$$

$$J_{\max}=\frac{U_0}{2\sqrt{\pi\alpha_2 l}}\exp\{\alpha_1^2 l/\alpha_2\},\quad \frac{\Delta\tau(l)}{\Delta\tau_0}=\sqrt{\frac{2\alpha_2^2}{q_2^2+\alpha_2^2}},\quad \frac{\Delta\omega(l)}{\Delta\omega_0}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Выражение (42) для $J_{\max}$ можно получить и непосредственно из (41), максимизируя J по t_0 и β.

6. Как видно из (38), в распространяющемся в параболической среде гауссовском импульсе всегда наводится линейная частотная модуляция (ЛЧМ) независимо от того, имелась ли или нет ЛЧМ у входного импульса. Если β и q_2 одного знака, то внешняя (связанная с β) и наводимая средой ЛЧМ имеют разные знаки, и в точке

$$z=z_0=\frac{\beta}{1+\beta^2}\,\frac{t_0^2}{q_2} \tag{43}$$

происходит их полное взаимное гашение (заметим, что параметры α_1 и α_2, характеризующие дисперсионные потери, на величину z_0 не влияют). Соответственно в точке z_0 имеем: $\Delta\omega\Delta\tau=1/2$,

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta\tau_0}=\sqrt{\frac{1+\alpha_2\beta/q_2}{1+\beta^2}},\quad \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0}=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha_2\beta/q_2}},\quad J=\frac{U_0}{\sqrt{\pi\alpha_2 z_0}}\times$$

$$\times\frac{1}{(\beta\alpha_2/q_2)^{1/2}+(\beta\alpha_2/q_2)^{-1/2}}. \tag{44}$$

Согласно первому соотношению в (44) в точке z_0 происходит не только полная демодуляция импульса, но и его довольно сильная компрессия: $\Delta\tau/\Delta\tau_0\sim\sqrt{\alpha_2/q_2\beta}\ll 1$ (если $|\beta\gg\alpha_2/|q_2|$). Сравнивая последнюю формулу в (44) с (42) (для простоты — при $\alpha_1=0$), можно заключить, что любой импульс (30) оказывается как бы автоматически согласован-

ным — в обсуждавшемся в п. 4 смысле — с отрезком среды $0<z<z_0$ по длительности t_0, но не по коэффициенту модуляции β. Из (44), однако, очевидно, что $\beta_{opt}=q_2/\alpha_2$; при этом

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta\tau_0}=\sqrt{\frac{2}{1+q_2^2/\alpha_2^2}},\quad \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad J=\frac{U_0}{2\sqrt{\pi\alpha_2 z_0}}=$$

$$=J_{max}\left(z=z_0,\ \beta=\frac{q_2}{\alpha_2}\right)$$

в согласии с (43).

7. Из полученных результатов следует, что дисперсионные потери различного порядка по-разному влияют на основные характеристики распространяющегося в параболической среде гауссовского импульса.

Потери нулевого порядка (α_0). С величиной α_0 связано лишь общее экспоненциальное ослабление ($\alpha_0>0$) или усиление ($\alpha_0<0$) импульса.

Потери первого порядка (α_1). При $\alpha_1\neq0$ и $\alpha_2=0$ возникает линейное по z смещение $\omega_1(z)$ максимума спектра в область меньших значений декремента затухания [1], а также дополнительное смещение по времени верхушки импульса на величину $\theta_1(z)$. Возникает также нелинейный по z инкремент $\Gamma(z)=-(\alpha_1 z/t_0^2)^2(1+\beta^2)$ роста энергии. На $\Delta\tau$ и $\Delta\omega$ параметр α_1 не влияет. Если $\alpha_2=0$, то ширина спектра импульса при распространении остается постоянной: $\Delta\omega=\Delta\omega_0$. Независимо от величины α_2 при $\alpha_1=0$ обращаются в нуль также $\Gamma(z)$, $\omega_1(z)$ и $\theta_1(z)$.

Потери второго порядка (α_2). В среде с $\alpha_2\neq0$ возникает зависимость от z ширины спектра $\Delta\omega$; влияет z и на $\Delta\tau$, $\Gamma(z)$, $\omega_1(z)$ и $\theta_1(z)$. Смещение спектра $\omega_1(z)$ при $\alpha_2>0$ конечно и с ростом z стремится к частоте ω_d, на которой затухание минимально. Если $\alpha_2<0$, то, наоборот, центр спектра неограниченно удаляется от частоты ω_d, которая в этом случае соответствует наибольшему затуханию.

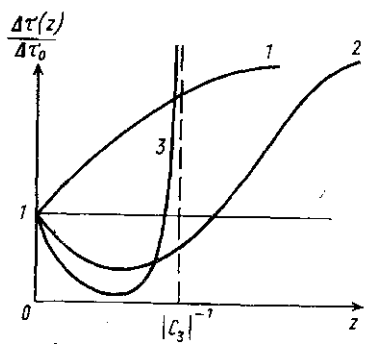

Рис. 3

Следует, однако, отметить, что полученные формулы применимы лишь при условии, что исходная параболическая аппроксимация (25) дисперсионной кривой достаточно точна в пределах ширины спектра импульса с учетом его дисперсионного смещения. Это условие может ограничивать допустимые длины z.

8. Рассмотрим подробнее изменение длительности импульса при его движении. Как видно из (39), в средах с $\alpha_2\neq0$ ($C_3\neq0$) нарушается установленная в [10, 11] универсальная параболическая зависимость $\Delta\tau^2$ от z, характерная для всех сред без дисперсионных потерь (см. также [2]). При этом график функций $\Delta\tau(z)$ имеет вид кривых *1* ($2C_1+C_3<0$), *2* ($2C_1+C_3>0$, $\alpha_2>0$) или *3* ($2C_1+C_2>0$, $\alpha_2<0$), представленных на рис. 3. Условие получения компрессии выражается неравенством

$$2C_1+C_3=t_0^{-2}\,[2q_2\beta+\alpha_2(\beta^2-1)]>0, \tag{45}$$

при выполнении которого кривые *2* и *3* при $z=0$ имеют отрицательный наклон и пересекают уровень $\Delta\tau_0$ в двух точках: при $z=0$ и

$$z=z_1=\frac{2C_1+C_3}{C_1^2+C_2^2}=t_0^2\frac{2q_2\beta+(\beta^2-1)\alpha_2}{(1+\beta^2)(q_2^2+\alpha_2^2)}. \tag{46}$$

Через z_1 просто выражается расстояние до «перетяжки» z_w, на котором $\Delta\tau$ принимает минимальное значение $\Delta\tau_{\min}\equiv\Delta\tau_w$. Если $\alpha_2\geqslant 0$ $(C_3\geqslant 0)$, то

$$z_w=\frac{z_1}{1+\sqrt{1+C_3z_1}},\quad \sqrt{1+C_3z_1}=\frac{|q_2+\alpha_2\beta|}{\sqrt{\alpha_2^2+q_2^2}},\quad 0<z_w<\frac{1}{2}z_1 \tag{47}$$

(рис. 3, кривая *2*), а если $\alpha_2<0$ $(C_3<0)$, то

$$z_w=\frac{z_1}{1-\sqrt{1-|C_3|z_1}},\quad \sqrt{1-|C_3|z_1}=\frac{|q_2-\alpha_2\beta|}{\sqrt{\alpha_2^2+q_2^2}},\quad \frac{1}{2}z_1<z_w<z_1$$

(рис. 3, кривая *3*). Отметим некоторые характерные частные случаи.

1) Случай $q_2\neq 0$, $\alpha_1\neq 0$, $\alpha_2=0$ — диспергирующая среда с потерями первого порядка. Согласно (45) для получения компрессии необходимо, чтобы q_2 и β были одного знака. По формулам (34), (35), (39), (46) и (47) находим:

$$\Delta\tau(z)/\Delta\tau_0=\sqrt{(1-q_2\beta z/t_0^2)^2+(q_2z/t_0^2)^2}\quad \Delta\omega=\Delta\omega_0,$$
$$z_1=\frac{2\beta}{1+\beta^2}\frac{t_0^2}{q_2},\quad z_w=\frac{1}{2}z_1,\quad \frac{\Delta\tau_w}{\Delta\tau_0}=(1+\beta^2)^{-1/2}. \tag{48}$$

Сильная компрессия достигается при $|\beta|\gg 1$ (см. (48)). В этом случае $z_w=z_0$ (см. (43)), т. е. в точке максимальной компрессии подавляется ЛЧМ.

2) Случай $q_2=0$, $\alpha_1\neq 0$, $\alpha_2>0$ — спектр импульса попадает в полосу резонансного усиления среды. Математически близкая задача о прохождении импульса через частотный фильтр с гауссовской характеристикой рассматривалась в [12]. Условие компрессии (45) выполняется в этом случае, если $|\beta|>1$ (знак β несуществен), и

$$\frac{\Delta\tau(z)}{\Delta\tau_0}=\sqrt{\frac{(1+\alpha_2z/t_0^2)^2+(\alpha_2\beta z/t_0^2)^2}{1+\alpha_2(1+\beta^2)z/t_0^2}},\quad \frac{\Delta\tau_w}{\Delta\tau_0}=\sqrt{\frac{2|\beta|}{1+\beta^2}}, \tag{49}$$

$$\frac{\Delta\omega(z)}{\Delta\omega_0}=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha_2(1+\beta^2)z/t_0^2}},\quad \frac{\Delta\omega_w}{\Delta\omega_0}=\frac{1}{\sqrt{|\beta|}},$$
$$z_1=\frac{t_0^0}{\alpha_2}\frac{\beta^2-1}{\beta^2+1},\quad z_w=\frac{t_0^2}{\alpha_2}\frac{|\beta|-1}{\beta^2+1}=\frac{z_1}{1+|\beta|}. \tag{50}$$

Так как здесь $z_w\neq z_0$, то подавление ЛЧМ в точке максимальной компрессии не является полным: $\Delta\omega(z_w)\Delta\tau(z_w)=1/\sqrt{2}>1/2$.

Согласно (49), если $|\beta|\gg 1$, то уменьшение длительности импульса в точке z_w может быть значительным. Наглядно это можно объяснить следующим образом. Мгновенная частота входного импульса (30) изменяется во времени по линейному закону, $\omega(t)=-\beta t/t_0^2$, $|t|\leqslant\Delta\tau_0/2$. Если $|\beta|\gg 1$, то при достаточно больших $|t|$ эта частота окажется за пределами полосы пропускания среды $\Delta\omega_d(z)$, передний и задний фронты импульса поглотятся, а через среду пройдет только центральная часть

импульса, что и дает эффект компрессии (с потерей энергии за счет поглощенной энергии крыльев импульса). При этом оценки для $\Delta\tau_w$ и z_w, качественно совпадающие с (49) и (50), можно получить из простых соотношений: $\omega(t=\Delta\tau_w)\sim\Delta\omega_d(z_w)\sim\Delta\tau_w^{-1}$.

3) Случай $q_2=0$, $\alpha_1\neq0$, $\alpha_2<0$ — спектр импульса попадает в полосу поглощения среды. Условие компрессии (45) принимает вид $|\beta|<1$, т. е. ЛЧМ входного импульса должна быть достаточно слабой. В отличие от двух предыдущих случаев здесь ЛЧМ является лишь помехой для компрессии. При этом

$$\frac{\Delta\tau(z)}{\Delta\tau_0}=\sqrt{\frac{(1-|\alpha_2|z/t_0^2)^2+(\alpha_2\beta z/t_0^2)^2}{1-|\alpha_2|(1+\beta^2)z/t_0^2}},\quad \frac{\Delta\tau_w}{\Delta\tau_0}=\sqrt{\frac{2|\beta|}{1+\beta^2}},\tag{51}$$

$$\Delta\omega(z)/\Delta\omega_0=[1-|\alpha_2|(1+\beta^2)z/t_0^2]^{-1/2},\quad \Delta\omega(z_w)/\Delta\omega_0=|\beta|^{-1/2}.$$

Здесь эффект компрессии объясняется тем, что среда «поднимает» крылья спектра импульса, что ведет к увеличению $\Delta\omega$ (см. (51)) и уменьшению $\Delta\tau$.

Насколько нам известно, методы компрессии в случаях *2* и *3*, а также компрессия в точке подавления ЛЧМ z_0 при $\alpha_2\neq0$ (см. (44)) ранее в литературе не обсуждались.

9. В качестве примера, соответствующего случаю *2*, рассмотрим компрессию слабого стоксова импульса в ВКР-усилителе с монохроматической накачкой. Перейдем в (20) к времени $\theta=t-z/u_{NL}$, где $u_{NL}=u(1+ugI_pT_2)^{-1}$ и u — групповые скорости на стоксовой частоте соответственно с учетом нелинейного взаимодействия и в линейном приближении. Предполагая усиление большим, $(1/2)gI_pz\gg1$, получим из (20) известное приближенное выражение для коэффициента передачи усилителя:

$$\mathcal{K}(\omega,\ z)_{SRS}=\exp\left\{\frac{1}{2}G-\frac{1}{2}GT_2^2\omega^2\right\},\quad G=gI_0z\tag{52}$$

(см., напр., [7, с. 586]). Анализ этого случая в предыдущем разделе показывает, что если входной импульс (30) имеет ЛЧМ с $|\beta|>1$, то изменение длительности импульса по длине усилителя будет характеризовать кривая *2* на рис. 3, и при $|\beta|\gg1$ импульс будет испытывать сильное сжатие. Как следует из (49) и (50), максимальное сжатие в $N=[1+\beta^2)/2\beta]^{1/2}$ раз достигается на длине $z_w=(t_0/T_2)^2(|\beta|-1)[gI_p(1+\beta^2)]^{-1}$; при этом коэффициент усиления $G=gI_pz_w=(t_0/T_2)^2(|\beta|-1)(\beta^2+1)^{-1}$ не зависит от интенсивности накачки. Из (41) находим также, что $J(z_w)=U_0/(\sqrt{\pi\beta}\,t_0)$, если $|\beta|\gg1$. Используя эти соотношения, нетрудно показать, что для получения на длине z_w коэффициента компрессии $N\gg1$ нужно выбрать $|\beta|=2N^2\gg1$, $t_0=T_2\sqrt{2G}N\gg T_2$, $z_w=G/gI_p$, $G\gg1$, $U_0\ll2\sqrt{\pi G}N^2T_2I_p\exp\{-G\}$; последнее неравенство следует из условия линейности ВКР-усилителя $J\exp\{G\}\ll I_p$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М., 1983. [2] Дьяков Ю. Е.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. 32, № 3. С. 54. [3] Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М., 1988. [4] Desurvire F. et al.//Opt. Lett. 1989. 14. P. 1266. [5] Дьяков Ю. Е.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. 32, № 2. С. 53. [6] Дьяков Ю. Е.//Лазеры в народном хозяйстве (Материалы семинара. Общество «Знание» РСФСР). М., 1990. С. 130. [7] Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М., 1981. [8]

Marcuse D., Lin C.//IEEE J. Quant. Electron. 1981. **QE-17**, N 6. P. 869. [9] Дьяков Ю. Е.//Научн. труды радиотехн. ин-та АН СССР. М., 1968. С. 185. [10] Дьяков Ю. Е., Никитин С. Ю. Задачи по статистической радиофизике и оптике. М., 1985. [11] Anderson D, Lisak M.//Phys. Rev. 1987. **A35**, N 1. P. 184. [12] Manassah J. T.//Appl. Opt. 1986. **25**. P. 1737.

Поступила в редакцию
28.06.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА, АСТРОНОМИЯ. 1992. Т. 33, № 4

УДК 535.411

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОНКОСЛОЙНЫХ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ФИЛЬТРОВ

А. В. Козарь, А. В. Козлов

(кафедра радиофизики)

Проведено теоретическое изучение спектральных характеристик (зависимости энергетического коэффициента пропускания от длины волны) тонкослойных (полная оптическая толщина всей структуры меньше полуволновой) интерференционных фильтров. Получены простые аналитические соотношения, позволяющие адекватно определять положение и глубину всех экстремумов на спектральных характеристиках таких фильтров. Изучены и обсуждены особенности спектров рассматриваемых структур и возможности их использования в задачах прикладной оптики. Проведенный на ЭВМ численный анализ подтвердил результаты теории.

В работе [1] сообщалось о возможности синтеза интерференционных фильтров с толщинами не только отдельных слоев, но и всей структуры в целом меньше полуволновой. Настоящая работа посвящена изучению спектральных характеристик тонкослойных интерференционных фильтров (ТИФ), т. е. исследованию зависимости энергетического коэффициента пропускания структуры от длины волны.

Пусть плоская монохроматическая волна падает нормально на многослойную периодическую структуру, состоящую из N плоскопараллельных слоев без поглощения с показателями преломления n_1 (первый слой со стороны падения волны) и n_2 и толщинами соответственно d_1 и d_2, периодом n_1, n_2.

В [1] было показано, что условием полного пропускания падающего излучения для ТИФ является решение системы матричных уравнений, из которых непосредственно следует соотношение

$$U_{N/2-1}(x)=0, \tag{1}$$

где $U_k(x)$ — полином Чебышева второго рода:

$$U_k(x)=\frac{\sin[(k+1)\arccos(x)]}{\sqrt{1-x^2}};\quad x=\frac{(1-pT_1T_2)}{\sqrt{(T_1^2+1)(T_2^2+1)}},$$

$$p=\frac{n_1^2+n_2^2}{2n_1n_2};\quad T_i=\operatorname{tg}\frac{2\pi n_i d_i}{\lambda};\quad i=1,\ 2;\ \lambda\text{— длина волны.}$$

Подставив выражение для полинома Чебышева в (1), получим

$$x=\cos\left(\frac{2\pi}{N}j\right), \tag{2}$$

где $j=1\div(k-1)$ при четном числе слоев $(N=2k)$, $j=1\div k$ при нечетном числе слоев $(N=2k+1)$.