(15) теперь имеет вид: $X=X_0-R(x, m)$. Увеличение поперечной неоднородности приводит к усилению дрейфа пучка и значительному разбросу поперечных импульсов, который грубо можно оценить на основе (28), если положить $a=a_0 \exp(kh)$, h — толщина пучка; тогда $(\Delta p/p)_N \approx (kh)/3$. Аналогичная оценка для симметричных ондуляторов дает $(\Delta p/p)_S \approx (kh)^2/12$, откуда ясно, что они имеют меньший разброс по сравнению с несимметричными примерно в $(\Delta p/p)_S/(\Delta p/p)_N \approx$ $\approx (kh)/4$ раз. Качественно такое же соотношение справедливо и для дрейфовых смещений пучка.

Таким образом, влияние поперечной неоднородности ондуляторного поля существенно в режимах с высокими значениями питч-фактора электронов и для пучков большой, в масштабе неоднородности, толщины. При этом симметричные ондуляторы имеют с точки зрения разброса скоростей электронов и их поперечного дрейфа существенно лучшие характеристики, чем несимметричные.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Маршалл Т. Лазеры на свободных электронах. М., 1987. [2] Александров А. Ф., Веснин В. Л., Кубарев В. А., Черепенин В. А.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. **32**, № 5. С. 40. [3] Александров А. Ф., Веснин В. Л., Кубарев В. А.//Радиотехн. и электроника. 1991. **36**, № 8. С. 1525. [4] Fajans J., Kirkpatrik D. A., Bekefi G.//Phys. Rev. 1985. **A32**, N 6. P. 3448. [5] Freund H. P., Kehs P. A., Granatstein V. L.//IEEE J. Quant. Electron. 1985. **QE21**, N 7. P. 1080. [6] Freund H. P., Ganguly A. K.//Ibid. P. 1073. [7] Гапонов А. В., Миллер М. А.//ЖЭТФ. 1958. **34**, № 2. С. 242. [8] Геккер И. Р. Взаимодействие сильных электромагнитных полей с плазмой. М., 1978.

Поступила в редакцию 09.12.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1992. Т. 33, № 5

УДК 537.868:531

ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕЖМОДОВОЙ СТРИКЦИОННОЙ СВЯЗИ В СФЕРИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРАХ

Г. В. Белокопытов, Н. П. Пушечкин, В. Н. Семененко

(кафедра физики колебаний)

Исследованы интегральные характеристики стрикционного межмодового взаимодействия электромагнитных и акустических колебаний в сферических резонаторах. Установлены правила отбора и рассчитаны интегральные коэффициенты стрикционного взаимодействия с учетом векторного характера полей и анизотропии тензора электрострикции. Обнаружено хорошее соответствие результатов расчета с данными эксперимента по стрикционному параметрическому возбуждению радиальных упругих колебаний в диэлектрических резонаторах из танталата калия СВЧ-накачкой.

Исследование взаимодействий волн в нелинейных резонаторах естественно сводится (путем разложения по собственным колебаниям) к задаче о связанных нелинейных осцилляторах. При этом эффективность нелинейной связи между различными модами характеризуют интегральные коэффициенты, величина которых зависит от пространственного распределения взаимодействующих полей и нелинейных свойств среды. Подобный подход применялся при анализе параметрических взаимодействий в резонаторах оптического [1] и СВЧ-диапазонов [2, 3], а также явлений магнитоакустического резонанса [4] и стрикционного параметрического возбуждения в сегнетоэлектриках [5]. При надлежащей нормировке все характеристики параметрической генерации могут быть представлены как функции уровня накачки, настройки и добротности колебательной системы. Это позволило в указанных работах исследовать динамику нелинейных колебаний, не имея детальной информации о пространственной структуре взаимодействующих мод.

Вместе с тем именно особенности пространственного распределения полей (электромагнитных, упругих, магнитостатических) определяют через интегральные коэффициенты эффективность взаимодействия и соответственно — масштаб нормировки в уравнениях для связанных мод, порог параметрической генерации, и в конечном итоге — сам факт возбуждения колебаний на тех или других модах. Общие выражения для интегральных коэффициентов хорошо известны, однако их расчет весьма труден, и до последнего времени приходилось довольствоваться либо анализом простейших одномерных моделей [1, 2], либо грубыми оценками из соображений подобия [2, 5]. Единственным частным исключением был расчет интегрального коэффициента для взаимодействия за счет кубичной нелинейности на основной моде сферического диэлектрического резонатора, проведенный с учетом анизотропии нелинейной диэлектрической восприимчивости [3].

Настоящая работа посвящена расчету и экспериментальному определению интегральных коэффициентов стрикционной межмодовой связи в сферических диэлектрических резонаторах (ДР). Уникальным обстоятельством является то, что для изотропного сферического резонатора известно аналитическое представление для полей собственных электромагнитных и акустических колебаний [6]. Это позволяет добиться упрощения выражений интегральных коэффициентов, сформулировать правила отбора эффективно взаимодействующих комбинаций мод и создать рациональную программу расчета.

Интегральные коэффициенты межмодовой связи при стрикционном взаимодействии вводятся следующим образом. Электрическую индукцию $\mathbf{D}$ и вектор механического смещения $\mathbf{U}$ в резонаторах представляют в виде разложений по собственным стоячим волнам, отвечающим нормальным частотам ω_a и Ω_w и образующим ортогональные семейства мод, нормированные посредством соотношений

$$\int \varepsilon^{-1}\mathbf{D}^{(a)}\mathbf{D}^{(b)}\,dV=\delta_{ab},\quad \Omega_r^2\int \rho\mathbf{U}^{(r)}\mathbf{U}^{(s)}\,dV=\delta_{rs}, \tag{1}$$

V — объем ДР, ε — диэлектрическая проницаемость, ρ — плотность кристалла. Подставив разложение $\mathbf{D}(\mathbf{r},\ t)=A_a(t)\,\mathbf{D}^{(a)}(\mathbf{r})$, $\mathbf{U}(\mathbf{r},\ t)=B_w(t)\,\mathbf{U}^{(w)}(\mathbf{r})$ в уравнения электро- и эластодинамики с учетом материальных уравнений и соотношений ортогональности (1), получим систему уравнений [5] для амплитуд связанных электромагнитных и акустических колебаний:

$$\begin{aligned}\ddot{A}_f+\omega_f^2A_f&=-R_{fa}\dot{A}_a-I^*_{far}A_aB_r-F_f^{el}(t),\\ \ddot{B}_w+\Omega_w^2B_w&=-\theta_{wr}\dot{B}_r-(1/2)\,I_{wab}A_aA_b-F_w^m(t).\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь индексы a, b, f нумеруют электромагнитные, а w и r — акустические моды, $I^*{}_{far}$ и I_{wab} — интересующие нас интегральные коэффициенты межмодовой связи:

$$I^*_{far}=\omega_f^2\left(\ {}_{raf}-\frac{c^2}{\mu}S^*_{raf}\right),\quad I_{wab}=\Omega_w^2\,(K_{wab}-S_{wab}), \tag{3}$$

где

$$K_{wab}=\int\limits_V G_{jinm}U_{ji}^{(w)}D_n^{(a)}D_m^{(a)}\,dV,$$

$$S_{wab}=\oint\limits_S G_{jinm}U_i^{(w)}X_jD_n^{(a)}D_m^{(b)}\,dS,$$

$$S^*_{wab}=\oint\limits_S ([\varkappa\mathbf{D}^{(a)};\ \operatorname{rot}\mathbf{D}']-[\mathbf{D}';\ \operatorname{rot}\varkappa\mathbf{D}^{(a)}])\,d\mathbf{S},$$

$\varkappa=4\pi\varepsilon^{-1}$, $D_n'=G_{ijmn}u_{ij}^{(w)}D_m^{(b)}$, $u_{ij}=\partial U_i/\partial X_j$ — компоненты тензора деформации, G — тензор электрострикции, X_i — декартовы координаты. Объемный интеграл K_{wab} пропорционален энергии электрострикционного взаимодействия в ДР. Интегралы S_{wab} и S^*_{wab} берутся по поверхности ДР (вектор $d\mathbf{S}$ ориентирован по внешней нормали). Они описывают эффект преобразования энергии электромагнитной волны при ее отражении от вибрирующей поверхности ДР.

Электромагнитные моды сферического ДР подразделяются на два класса — E и H. В свою очередь, акустические колебания изотропного упругого шара подразделяются на чисто поперечные крутильные (T) и смешанные (S). Во всех увязанных случаях пространственное распределение векторов электрических и упругих смещений может быть выражено через векторные сферические функции $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{L}=\operatorname{grad}\psi;\ \mathbf{M}=\operatorname{rot}(\mathbf{r}\psi);\ \mathbf{N}=(1/k)\operatorname{rot}\mathbf{M}, \tag{4}$$

где $\mathbf{r}(r,\ \theta,\ \varphi)$ — единичный вектор, направленный по радиусу, а ψ есть решение скалярного волнового уравнения

$$\Delta\psi+k^2\psi=0 \tag{5}$$

в сферических координатах. Так, для электромагнитных E- и H-мод имеем соответственно

$$\mathbf{E}=A_E\mathbf{N},\ \mathbf{E}=A_H\mathbf{M}, \tag{6,а}$$

а для акустических колебаний T- и S-мод

$$\mathbf{U}=A_T\mathbf{M},\ \mathbf{U}=A_s\mathbf{L}+B_s\mathbf{N}. \tag{6,б}$$

Как известно [6], решения (5) имеют следующий вид:

$$\psi(r,\ \theta,\ \varphi)=(kr)^{-1/2}J_{n+1/2}(kr)P_n^{(m)}(\cos\theta)\begin{cases}\sin m\varphi,\\ \cos m\varphi,\end{cases} \tag{7}$$

причем константы A, B в (6) и волновое число k определяются граничными условиями и нормировкой (1). При идентификации мод всех указанных типов задается тройка индексов: радиальный p, зональный n и азимутальный m. Индекс p определяет число полуволн, укладывающихся по радиусу шара, а n и m — угловое пространственное распределение полей согласно формуле (7). Для радиальных упругих колебаний $m=n=0$ (моды типа S_{p00}).

Чтобы однозначно идентифицировать вариант трехмодового стрикционного взаимодействия и соответствующие интегральные коэффициенты I_{wab}, I^*_{wab} для сферического ДР, следует указать, к какому классу относится каждая из трех стоячих волн, входящих в (3), и задать 9 индексов: $(p_a,\ n_a,\ m_a)$ — для акустической моды и $(p_1,\ n_1,\ m_1)$ и $(p_2,\ n_2,\ m_2)$ — для электромагнитных.

Число возможных вариантов взаимодействия необозримо велико, и одну из основных проблем составляет отбор комбинаций эффективно взаимодействующих мод. Собственные частоты таких мод должны удовлетворять требованиям частотного синхронизма и пространственного перекрытия. Первое условие означает, что разность частот электромагнитных мод с точностью до величины порядка ширины полосы электромагнитного резонанса должна быть равна частоте акустической моды. Вследствие очень большой разницы в скоростях электромагнитных и упругих волн условие синхронизма для мод сферического ДР реально может быть выполнено в двух случаях [5]. 1. Если частоты электромагнитных мод близки к вырождению, а частота упругой моды приближенно равна их разности, имеет место трехмодовое взаимодействие. В сферическом ДР каждая из электромагнитных мод $(2m+1)$-кратно вырождена. Небольшое возмущение указанных колебаний приводит к снятию вырождения и делает возможным трехмодовое взаимодействие. Кроме того, при $\varepsilon \gg 1$ близки к вырождению моды $H_{l,n,m}$ и $E_{l,n-1,m'}$. 2. Если ширина полосы электромагнитного резонанса сравнима с акустической частотой или превышает ее, то возбуждение накачки и комбинационных частот происходит на одной и той же электромагнитной моде. Такой режим, двухмодовый, или «с сохранением моды», также может быть энергетически эффективным.

Условие пространственного перекрытия означает, что коэффициенты I_{wab} и I^*_{wab} не должны обращаться в нуль. Рассмотрим следствия из этого требования для наиболее важного случая, когда во взаимодействии участвуют электромагнитные моды одного класса с одинаковыми индексами p и n. Анализ коэффициентов (3) с учетом (4), (6), (7) позволяет установить следующие правила отбора. В стрикционном взаимодействии могут участвовать только такие упругие S-моды, в том числе радиальные, у которых зональные индексы четны: $n_a=2l$ (l — целое), причем для азимутальных индексов выполняется соотношение

$$|m_a \pm m_1 \pm m_2| = 0,\ 2,\ 4. \tag{8}$$

Сдвиговые моды взаимодействуют с электромагнитными, только если их индексы нечетны: $n_a=2l+1$. При этом азимутальные индексы также должны удовлетворять соотношениям (8). В случае $m_1=m_2$ (двухмодовый режим возбуждения) $m_a=4j$.

При вычислении интегральных коэффициентов (3) для сферического резонатора объемные и поверхностные интегралы разбиваются на конечные суммы произведений одномерных интегралов по сферическим координатам. При этом обнаруживается аналогия с задачей нахождения коэффициентов Клебша—Гордана [7], где также приходится иметь дело с интегрированием по угловым координатам тройных произведений сферических гармоник. Однако использовать эту аналогию не удается ввиду большей сложности задачи об интегральных коэффициентах (векторный характер волновых полей, анизотропия электрострикции в кристаллах, необходимость интегрирования по радиусу). Эта большая сложность проявляется, в частности, в том, что правила отбора (8) не совпадают с правилами сложения угловых моментов.

С учетом возможности сравнения с экспериментом конкретные вычисления были приведены для резонаторов из виртуального сегнетоэлектрика танталата калия, имеющего кубическую симметрию. При расчете электромагнитных колебаний мы принимали $\varepsilon=4000$, что соответствует гелиевым температурам. Для приближенного описания упругих колебаний шара из $KTaO_3$ была принята модель изотропной упругой среды с эффективными константами жесткости: $c_{11}=3,81\cdot10^{12}$ дин/см^2, $c_{44}=1,25\cdot10^{12}$ дин/см^2, $\rho=6,93$ г/см^3. При таком выборе констант скорости продольных и поперечных акустических волн равны средним значениям, определенным для реальных акустически анизотропных кристаллов $KTaO_3$, при измерениях в кристаллографических направлениях [100], [110], и [111] (см. [8]).

Тензор электрострикции в кристалле $KTaO_3$ имеет три независимые компоненты. Согласно экспериментальным данным работы [9] $G_{11}=-7$; $G_{12}=0,4$; $G_{44}=-0,4$ СГС. Таким образом, анизотропия стрикционных свойств весьма значительна, и необходим ее явный учет при вычислении интегральных коэффициентов.

Согласно [5] для пороговой мощности стрикционного параметрического возбуждения имеет место формула

$$P_{\text{th}}=\omega_f F/(Q_1Q_2Q_aK_{ef}^2), \tag{9}$$

где ω_f — циклическая частота СВЧ-накачки, F — функция настройки системы, Q_1 и Q_2 — добротности мод электромагнитных колебаний накачки и комбинационных частот (в двухмодовом режиме $Q_1=Q_2$), Q_a — добротность моды акустических колебаний $K_{ef}^2=I_{wab}I_{wab}^*/\omega_f^2\Omega_a^2$ — коэффициенты межмодовой связи.

С помощью пакета программ, описанного в [10], были вычислены величины $K^2{}_{ef}$ в сферическом резонаторе из $KTaO_3$ для примерно 500 вариантов двух- и трехмодового взаимодействия с возбуждением симметричных радиальных и чисто сдвиговых колебаний. Для них зависимость коэффициентов $K^2{}_{ef}$ от упругих констант наиболее проста, так что можно полагать

$$\bar{K}_{ef}^2=\frac{\Phi\varepsilon^2}{c_{ef}V}, \tag{10}$$

где для радиальных колебаний $c_{ef}=c_{11}$ и для сдвиговых $c_{ef}=c_{44}$, а величина Φ зависит только от коэффициентов электрострикции и пространственного распределения полей взаимодействующих мод.

Информацию об эффективности стрикционной нелинейной связи между модами можно получить из эксперимента, измеряя пороговую мощность параметрического возбуждения. В том же цикле измерений можно определить величины, характеризующие настройку колебательной системы, коэффициент связи и добротности ДР, и воспользовавшись (9) и (10), найти величину Φ.

Для экспериментального исследования была изготовлена партия сферических ДР из кристаллов танталата калия, а также из легированных кристаллов $KTaO_3$: Li (с замещением калия литием до 10% по шихте). Измерения проводились при температуре 4,2 К в диапазоне ($\omega_f/2\pi$) 8,2—10 ГГц. Связь сферического ДР с трактом СВЧ осуществлялась посредством короткозамкнутой петли на конце коаксиального кабеля, при этом наблюдалось возбуждение только магнитных типов колебаний (мод H_{pnm}).

В резонаторах исследованной партии было зафиксировано стрикционное возбуждение около 20 различных акустических мод в интервале ($\Omega_a/2\pi$) от 2 до 30 МГц. Отметим, что при стрикционном взаимодействии однородных бегущих волн (например, при ВРМБ) из условий Брэгга следует ограничение $\Omega_a/\omega_f<2(v_a/v_{el})$, где v_a и v_{el} — скорости звука и света в среде. В наших экспериментах этот предел оказался превышенным, благодаря тому, что стоячие волны в ДР заведомо неоднородны.

Варьируя условия настройки и изменяя частоту накачки, удавалось наблюдать параметрические процессы в различных режимах (двухмодовом и трехмодовом) и с участием различных сочетаний мод. Возбуждение радиальных акустических колебаний (моды S_{p00}) происходило только в двухмодовом режиме. Правила отбора не запрещают возбуждение радиальных колебаний в трехмодовом режиме, однако, согласно расчетам, при этом значение величины Ф на четыре порядка ниже, чем для режима с сохранением моды.

Сдвиговые колебания (моды T_{pnm}) более эффективно возбуждались в трехмодовом режиме, хотя наблюдалось и двухмодовое возбуждение, в том числе — запрещенной правилами отбора моды T_{12m}. При объяснении этого обстоятельства следует иметь в виду, что правила отбора и интегральные коэффициенты были определены в пренебрежении анизотропией акустических свойств $KTaO_3$. Различие в скоростях поперечных волн в зависимости от направления и поляризации достигает 20%, что приводит к трудностям в идентификации акустических колебаний и к большим отличиям между расчетными и измеренными величинами Ф.

Характеристики нелинейных электроакустических резонаторов сферической формы

Акустическая мода (число образцов)	$\Omega_a/2\pi$, расчет*, эксперимент	Электромагнитные моды	Ф эксперимент	Ф расчет
S_{100} (11)	6,13 5,96±0,09	H_{11m} H_{21m} H_{31m} H_{41m}	4,0±0,4 6,4±0,6 6,5±0,6 7,4±0,7	4,4±0,4 6,4±0,4 6,8±0,4 6,9±0,4
S_{200} (3)	14,26 14,35±0,07	H_{11m} H_{21m} H_{31m}	3,9±0,4 5,0±0,5 7,1±0,7	3,1±0,3 5,6±0,3 6,7±0,4
T_{13m} (8)	5,20	H_{111}, H_{111}'	0,10—0,25	0,22
	5,37±0,14	H_{211}, H_{211}'	0,19	0,12
T_{23m}** (9)	11,36	H_{111}, H_{111}'	0,005	0,0067
	10,55—11,70	H_{211}, H_{211}'	0,01—0,09	0,07±0,01

* Приведено к диаметру 1 мм.

** Близко к вырождению с модой S_{16m}.

Результаты определения параметров стрикционного взаимодействия для наиболее надежно отождествленных мод представлены в таблице. Было обнаружено весьма хорошее соответствие вычисленных значений коэффициентов Ф с результатами эксперимента по возбуждению радиальных колебаний. Для трехмодового взаимодействия с T-модами в ряде случаев также имело место количественное согласие экспериментальных и расчетных значений K^2_{ef}. Так, расчеты показали, что при взаимодействии колебаний H-типов с крутильной модой T_{11} интегральные коэффициенты обращаются в нуль. В свою очередь в эксперименте стрикционное возбуждение моды T_{11} не происходило ни при каких условиях. Вместе с тем, как видно из таблицы, точность и степень согласия результатов для сдвиговых мод в целом ниже, чем для радиальных колебаний. Анализ и дополнительные расчеты [10] позволяют указать причину этого расхождения. Распределение полей деформаций T-мод таково, что их стрикционная связь с электромагнитными колебаниями гораздо слабее, чем у радиальных мод. Так, наибольшие значения величины Ф для радиальных и сдвиговых акустических колебаний различаются на два порядка.

Этот результат слабо зависит от характера анизотропии электрострикции и свидетельствует о том, что нелинейные взаимодействия в различных частях резонатора в значительной степени компенсируют друг друга. В таких условиях на их эффективности сильно сказываются возмущения волновых полей, вызванные анизотропией упругих свойств и случайными несовершенствами ДР, что и приводит к расхождению теории с экспериментом.

Хотя в трехмодовом режиме интегральные коэффициенты стрикционной связи были значительно меньше, чем в двухмодовом, более благоприятные условия настройки [5] обеспечивали снижение порога и возбуждение акустических колебаний при малом уровне накачки (вплоть до единиц микроватт).

Исследование влияния легирования на эффективность стрикционного параметрического взаимодействия в $KTaO_3$ подтвердило зависимость $P_{th} \sim \varepsilon^{-7/2}$, которая следует из (9) и (10), если учесть, что при фиксированной частоте ω_f объем ДР, возбуждаемого на заданной моде, пропорционален $\varepsilon^{-3/2}$. В то же время акустические частоты и величины Ф у легированных до 5% и нелегированных кристаллов по существу не различались, что указывает на то, что замещение ионов калия литием слабо влияет на константы упругой жесткости и электрострикции.

Проведенное исследование продемонстрировало возможность расчета интегральных характеристик сферических нелинейных электроакустических резонаторов с учетом векторного характера взаимодействующих полей и анизотропии материальной среды. При этом точность расчетов позволяет получить не только качественное объяснение наблюдаемых в эксперименте закономерностей стрикционного возбуждения, но и достичь количественного согласия. Это открывает возможность прогнозирования порога стрикционного параметрического возбуждения в других материалах и частотных диапазонах.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Yariv A., Louicell W. H.//IEEE J. of Quant. Electron. 1966. **QE-2**, N 9. P. 418. [2] Белокопытов Г. В.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1977. **18**, № 2. С. 61. [3] Белокопытов Г. В., Моисеев Н. Н.//Изв. вузов, Радиофизика. 1982. **25**, № 10. С. 1210. [4] Comstock R. L., Auld B. A.//J. Appl. Phys. 1963. **34**, N 5. P. 1461. [5] Белокопытов Г. В.//Изв. вузов, Радиофизика. 1987. **30**, № 9. С. 1121. [6] Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М., 1960. Т. 2. [7] Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. Л., 1975. [8] Barrett H. H.//Phys. Lett. 1968. **26A**, N 6. P. 217. [9] Uwe H., Sakudo T.//J. Phys. Soc. Japan. 1975. **38**, N 1. P. 183. [10] Белокопытов Г. В., Пушечкин Н. П. Деп. ВИНИТИ № 7404-В89 от 13.12.89.

Поступила в редакцию
11.12.91