

учитывается для операторов первых порядков ($s=1, 2, \dots$) через члены теории возмущений высших порядков. В данном случае конкретный вид теории возмущений не изменится при изменении типа симметрии, а разложение для операторов определяется выбором основного приближения, которое естественно взять исходя из типа симметрии.

Описание единым образом однородной и упорядоченной фаз дает возможность исследовать фазовые переходы. При этом проведенные нами расчеты (будут опубликованы позже) показали, что использование в качестве основного приближения решения уравнения самосопряженного поля с исключенным самовоздействием уже при учете корреляций первого порядка позволяет описать как однородную, так и упорядоченную фазы, а также фазовый переход между ними.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bazarov I. P., Nikolaev P. N. Theory of many-particle systems. N. Y., 1989. [2] Yukalov V. I. // Physical Reports. A Review Section of Physical Letters. 1991. 208, N 6. P. 395. [3] Ландау Л. Д., Лифшиц И. М. Статистическая физика. Ч. 1. М. 1976. С. 277—288. [4] Леонтович М. А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. М., 1983. С. 117—119. [5] Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., 1961.

Поступила в редакцию
19.02.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1992. Т. 33, № 6

УДК 530.12;531.51;539.12.17

ОДНОРОДНЫЕ ИЗОТРОПНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В 6-МЕРНОЙ ТЕОРИИ КАЛУЦЫ—КЛЕЙНА

Ю. С. Владимиров, Америко Пераса Альварес *

(кафедра теоретической физики)

Найдены точные однородные изотропные открытые космологические решения уравнений Эйнштейна 6-мерной теории Калуцы—Клейна. Дан их анализ и сравнение с аналогичными космологическими решениями в 5-мерной теории Калуцы—Клейна и с 4-мерной космологической моделью Фридмана.

В настоящее время большое внимание уделяется исследованиям многомерных геометрических теорий Калуцы—Клейна [1, 2]. При этом преследуются две основные цели: во-первых, это получение многомерных геометрических моделей объединенной теории физических взаимодействий и, во-вторых, использование дополнительных геометрических скалярных полей для описания возможных изменений фундаментальных физических констант. Большая часть работ посвящена объединению физических взаимодействий. Анализировались возможности моделей различной размерности: от пяти до одиннадцати и более. В частности, в работах нашей группы [3, 4] было показано, что в рамках 6-мерной теории удастся объединить эйнштейновскую теорию гравитации с моделью электрослабых взаимодействий Вайнберга—Салама. В русле второго направления исследований — учета эффектов многомерного скаляризма — ранее были найдены точные 5-мерные сферически-симметричные решения 5-мерных уравнений Эйнштейна, а также 5-мерные однородные изотропные космологические модели [5, 6].

* Стипендиат Национального Совета по науке и технологии Мексики (CONACYT).

В настоящей статье сделан следующий шаг — найдены аналогичные космологические модели в рамках 6-мерной теории Калуцы—Клейна. Эти решения представляют особый интерес в свете того, что в нашей 6-мерной теории гравито-электрослабых взаимодействий основные фундаментальные физические константы зависят от дополнительных компонент 6-мерной метрики, т. е. на их значениях сказывается эволюция скалярных полей.

Рассмотрим 6-мерное уравнение Эйнштейна

$${}^6R_{MN} - \frac{1}{2} G_{MN} {}^6R = \kappa T_{MN}, \quad (1)$$

где индексы M, N принимают значения 0, 1, 2, 3, 5, 6; G_{MN} — компоненты 6-мерного метрического тензора; T_{MN} — 6-мерный тензор энергии-импульса материи; κ — эйнштейновская гравитационная постоянная. Будем искать космологическое решение, обладающее свойством однородности и изотропности в общепринятом 3-мерном смысле. Это означает, что искомая метрика имеет вид

$$dI^2 = \varphi^2 \{ a^2 [dx^{0^2} - dx^{1^2} - f^2(x^1)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Phi^2)] - dx^{5^2} - \psi^2 dx^{6^2} \}, \quad (2)$$

где $G_{55} = -\varphi^2$; $G_{66} = -\varphi^2 \psi^2$ — дополнительные компоненты метрического тензора; функция $f^2(x^1)$ может иметь три вида: $f^2 = \text{sh}^2 x^1$ для гиперболического 3-мерного пространственного сечения; $f^2 = \sin^2 x^1$ для 3-мерного пространства Римана и $f^2 = x^{1^2}$ для евклидова пространственного сечения. В метрике (2) содержатся три неизвестные функции от координаты x^0 : a, φ, ψ .

Чтобы записать для этих функций уравнения Эйнштейна, воспользуемся формализмом внешних форм Картана [7]. Определим компоненты 6-мерного базиса следующим образом:

$$\begin{aligned} \Theta^{(0)} &= \varphi a dx^0, \quad \Theta^{(1)} = \varphi a dx^1, \quad \Theta^{(2)} = \varphi a f d\theta, \\ \Theta^{(3)} &= \varphi a f \sin \theta d\Phi, \quad \Theta^{(5)} = \varphi dx^5, \quad \Theta^{(6)} = \varphi \psi dx^6. \end{aligned} \quad (3)$$

Из них известным образом находятся 1-формы кривизны:

$$\begin{aligned} \omega_{(1)}^{(0)} &= A \Theta^{(1)}, \quad \omega_{(6)}^{(0)} = N \Theta^{(6)}, \\ \omega_{(2)}^{(0)} &= A \Theta^{(2)}, \quad \omega_{(2)}^{(1)} = -\frac{F}{b} \Theta^{(2)}, \\ \omega_{(3)}^{(0)} &= A \Theta^{(3)}, \quad \omega_{(3)}^{(1)} = -\frac{F}{b} \Theta^{(3)}, \\ \omega_{(5)}^{(0)} &= M \Theta^{(5)}, \quad \omega_{(3)}^{(2)} = -\frac{\text{ctg } \theta}{fb} \Theta^{(3)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где были использованы обозначения

$$b = a\varphi, \quad A = \dot{b}/b^2, \quad M = \dot{\varphi}/\varphi b, \quad \xi = \varphi\psi, \quad N = \dot{\xi}/\xi b, \quad F = f'/f. \quad (5)$$

Здесь и в дальнейшем точка означает дифференцирование по x^0 , а штрих — дифференцирование по x^1 .

После соответствующих вычислений находим, что из 21 уравнения Эйнштейна (1) различным нетривиальным содержанием обладают лишь четыре диагональных уравнения:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \eta = \kappa \mu \frac{a^2 \varphi^2}{3} - \frac{10}{3} \frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^2} - 4 \frac{\dot{a}\dot{\varphi}}{a\varphi} - \frac{\dot{\psi}}{\psi} \left(\frac{a}{a} + \frac{4}{3} \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} \right), \quad (6)$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \eta = -4 \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} - 2 \frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^2} - 4 \frac{\dot{a}\dot{\varphi}}{a\varphi} - \frac{\dot{\psi}}{\psi} \left(\frac{\dot{a}}{a} + 4 \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} \right) - \frac{\ddot{\psi}}{\psi}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} + \eta = B_5 \frac{a^2 \varphi^2}{3} - \frac{4}{3} \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} - \frac{2}{3} \frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^2} - \frac{8}{3} \frac{\dot{a}\dot{\varphi}}{a\varphi} - \\ - \frac{2}{3} \frac{\dot{\psi}}{\psi} \left(\frac{\dot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} \right) - \frac{1}{3} \frac{\ddot{\psi}}{\psi}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \eta = B_6 \frac{a^2 \varphi^2}{3} - \frac{4}{3} \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} - \frac{2}{3} \frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^2} - \frac{8}{3} \frac{\dot{a}\dot{\varphi}}{a\varphi}, \quad (9)$$

где параметр η принимает три значения: $\eta=+1$ для 3-мерного пространства постоянной положительной кривизны, $\eta=-1$ для 3-мерного пространства Лобачевского, $\eta=0$ для 3-мерного евклидова пространства; μ — плотность пылевидной материи в 4-мерном смысле, B_5 и B_6 — плотности, соответствующие компонентам T_{55} и T_{66} .

Легко убедиться, что при $\psi=0$ уравнения (6)–(8) переходят в соответствующие уравнения из [6] для 5-мерной теории Калуцы–Клейна, а при $\psi=0$, $\varphi=1$ уравнения (6) и (7) совпадают с соответствующими уравнениями 4-мерной общей теории относительности, из которых находятся решения Фридмана.

Перейдем к новому набору неизвестных функций:

$$b(x^0) \equiv a(x^0) \varphi(x^0), \quad \xi(x^0) \equiv \psi(x^0) \varphi(x^0), \quad \varphi(x^0), \quad (10)$$

тогда система (6)–(9) приводится к более простому виду:

$$\frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{\dot{b}}{b} \left(\frac{\dot{\xi}}{\xi} + \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} \right) + \eta = \kappa \frac{\mu b^2}{3} - \frac{1}{3} \frac{\dot{\xi}\dot{\varphi}}{\xi\varphi}, \quad (11)$$

$$\frac{2\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \eta + \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} + \frac{\ddot{\xi}}{\xi} + \frac{\dot{b}\dot{\varphi}}{b\varphi} + \frac{\dot{\xi}\dot{\varphi}}{\xi\varphi} + \frac{\dot{\xi}\dot{b}}{\xi b} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{1}{3} \frac{\ddot{\xi}}{\xi} + \frac{2}{3} \frac{\dot{\xi}\dot{b}}{\xi b} = \frac{1}{3} \tilde{B}_5 - \eta, \quad (13)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{1}{3} \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} + \frac{2}{3} \frac{\dot{b}\dot{\varphi}}{b\varphi} = \frac{1}{3} \tilde{B}_6 - \eta, \quad (14)$$

где $\tilde{B}_5 = B_5 b^2$; $\tilde{B}_6 = B_6 b^2$.

Для дальнейшего решения этой системы необходимо использовать какие-то соображения о виде дополнительных компонент тензора энергии-импульса T_{55} и T_{66} (т. е. о неизвестных функциях $\tilde{B}_5$ и $\tilde{B}_6$), иначе четырех уравнений (11)–(14) недостаточно для нахождения шести неизвестных функций. Предположим, что в реальном мире в среднем дополнительные плотности $\tilde{B}_5$ и $\tilde{B}_6$ пренебрежимо малы ($\tilde{B}_5 = \tilde{B}_6 = 0$), кроме того, ограничимся случаем, когда

$$\dot{\varphi}/\varphi = \dot{\xi}/\xi, \quad (15)$$

тогда уравнения (13) и (14) совпадают и система (11)–(13) приводится к виду

$$\frac{\dot{b}^2}{b^2} + 2 \frac{\dot{b}\dot{\varphi}}{b\varphi} + \eta = \kappa \mu \frac{b^2}{3} - \frac{1}{3} \frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^2}, \quad (16)$$

$$\frac{2\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \eta + \frac{2\ddot{\varphi}}{\varphi} + 2 \frac{\dot{b}\dot{\varphi}}{b\varphi} + \frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^2} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{1}{3} \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} + \frac{2}{3} \frac{\dot{b}\dot{\varphi}}{b\varphi} + \eta = 0. \quad (18)$$

Умножая уравнение (18) на 3 и вычитая из него уравнение (17), приходим к выражению

$$\frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} - \frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^2} + 2\eta = 0. \quad (19)$$

Ограничимся частным случаем, когда (19) можно представить в виде

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} = \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} + \frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^2} - 2\eta = C, \quad (20)$$

где C — некоторая константа, которая будет найдена из уравнения (17) или (18). Тогда для функции $b(x^0)$ имеем уравнение

$$\ddot{b}b + \dot{b}^2 - Cb^2 = 0. \quad (21)$$

Производя замену $b^2 = u$, это уравнение сводим к $\ddot{u} - 2Cu = 0$, откуда имеем решение

$$u = b^2 = C_1 \exp\{\sqrt{2C} x^0\} + C_2 \exp\{-\sqrt{2C} x^0\}. \quad (22)$$

Аналогично для функции $\varphi(x^0)$ из (20) получаем уравнение

$$\ddot{\varphi}\varphi + \dot{\varphi}^2 - (C + 2\eta)\varphi^2 = 0. \quad (23)$$

Производя замену $\varphi^2 = v$, это уравнение сводим к $\ddot{v} - 2(C + 2\eta)v = 0$, откуда находим

$$v = \varphi^2 = C_3 \exp\{\sqrt{2(C + 2\eta)} x^0\} + C_4 \exp\{-\sqrt{2(C + 2\eta)} x^0\}. \quad (24)$$

Из общих выражений (22) и (24) выделим четыре частных случая, для которых окончательные решения можно записать в явном виде. Это случаи, когда

$$\begin{array}{l} 1) C_1 \neq 0; C_2 = 0; \quad 2) C_1 = 0; C_2 \neq 0; \\ C_3 \neq 0; C_4 = 0; \quad C_3 = 0; C_4 \neq 0; \\ 3) C_1 \neq 0; C_2 = 0; \quad 4) C_1 = 0; C_2 \neq 0; \\ C_3 = 0; C_4 \neq 0; \quad C_3 \neq 0; C_4 = 0. \end{array} \quad (25)$$

Для всех четырех случаев легко найти значения константы C , содержащейся в (20) — (24). Для этого подставим решения (22) и (24) при любом из условий (25) в уравнение (18), которое тогда примет вид

$$2(C + 2\eta) = \mp \sqrt{C(C + 2\eta)}. \quad (26)$$

Отсюда находим два возможных решения:

$$C_{(1)} = -(8/3)\eta; \quad C_{(2)} = -2\eta. \quad (27a)$$

Поскольку нас интересуют лишь вещественные решения, когда $C \geq 0$ и $C + 2\eta \geq 0$, приходим к выводу, что следует брать значение $\eta = -1$, соответствующее 3-мерным пространственным сечениям постоянной от-

рицательной кривизны (пространствам Лобачевского). Следовательно, C принимает два возможных значения:

$$C_{(1)}=8/3; C_{(2)}=2. \quad (276)$$

Плотность пылевидной материи μ находится из уравнения (16). Подставляя в него решения (22) и (24) с условиями (25), находим

$$\mu = \frac{3}{\kappa b^2} \left[\frac{2}{3} (C + 2\eta) \pm \sqrt{C(C + 2\eta)} \right], \quad (28)$$

где знак «плюс» соответствует первому и второму, а знак «минус» — третьему и четвертому случаям из (25). Отсюда сразу же можно сделать вывод, что при значении константы $C_{(2)}=2$ все четыре случая (25) соответствуют вакуумным космологическим моделям без внешней пылевидной материи.

Беря значение $C_{(1)}=8/3$ для третьего и четвертого случаев из (25), для плотности пыли из (28) находим отрицательное значение, что физически неприемлемо. Для первого и второго случаев получается положительная плотность материи:

$$\mu = 16/3\kappa b^2. \quad (29)$$

При этом первый случай соответствует расширяющейся вселенной:

$$b = \sqrt{C_1} \exp \left\{ \frac{2x^0}{\sqrt{3}} \right\}, \quad \varphi = \sqrt{C_3} \exp \left\{ \frac{x^0}{\sqrt{3}} \right\}, \quad \mu = \frac{16 \exp \{ -4x^0/\sqrt{3} \}}{3\kappa C_1}, \quad (30)$$

а второй случай — сжимающейся вселенной:

$$b = \sqrt{C_2} \exp \left\{ -\frac{2x^0}{\sqrt{3}} \right\}, \quad \varphi = \sqrt{C_4} \exp \left\{ -\frac{x^0}{\sqrt{3}} \right\}, \quad \mu = \frac{16 \exp \{ 4x^0/\sqrt{3} \}}{3\kappa C_2}. \quad (31)$$

Имея в виду экспериментальные данные о расширении реального мира, следует остановиться на первом случае, т. е. на решении (30). Учитывая (10) и (15), для этого решения находим

$$a(x^0) = b/\varphi = \sqrt{C_1/C_3} \exp \{ x^0/\sqrt{3} \}, \quad \varphi = \sqrt{C_3} \exp \{ x^0/\sqrt{3} \}, \quad \psi = C_5, \quad (32)$$

где C_5 — некоторая константа. Очевидно, что x^0 не является физическим временем, а представляет собой лишь некий параметр эволюции. Физическое время τ находится из $a(x^0)$ следующим образом:

$$\tau = \int a(x^0) dx = \sqrt{3C_1/C_3} \exp \{ x^0/\sqrt{3} \} + C_6, \quad (33)$$

где C_6 — константа интегрирования, которую положим равной нулю. Подставляя (33) в (32), находим

$$a = \tau/\sqrt{3}. \quad (34)$$

Интересно сравнить полученную 6-мерную космологическую модель с аналогичными космологическими моделями в 5-мерной теории Калуцы—Клейна. В работах [5, 6] было показано, что там также получаются два типа решений, соответствующих $C_{(1)}$ и $C_{(2)}$. Значению $C_{(2)}$ также соответствуют вакуумные космологические, как открытая, так и закрытая, модели. Решения с негеометрическим пылевидным ве-

ществом можно получить из уравнений (11)–(13), в которых полагаем $\dot{\xi}=0$:

$$\frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{\dot{b}\dot{\varphi}}{b\dot{\varphi}} + \eta = \kappa\mu \frac{b^2}{3}, \quad (35)$$

$$2 \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \eta + \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} + \frac{\dot{b}\dot{\varphi}}{b\dot{\varphi}} = 0, \quad (36)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \eta = 0. \quad (37)$$

Из последнего уравнения сразу же находим $b(x^0)$ для открытой модели ($\eta=-1$):

$$b = C_1 \exp \{x^0\} + C_2 \exp \{-x^0\}. \quad (38)$$

Далее из уравнения (36) легко находится $\varphi(x^0)$, а из (35) — плотность пылевидного вещества:

$$\mu = \frac{3C_3 \exp \{-3x^0\}}{\kappa C_1^2 (C_4 - C_3 \exp \{-x^0\})}. \quad (39)$$

Для случая $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$ получаем эволюцию расширяющейся открытой модели:

$$a = \frac{C_1 \exp \{x^0\}}{C_4 - C_3 \exp \{-x^0\}}, \quad \tau = C_1 \left[\frac{\exp \{x^0\}}{C_4} + \frac{C_3}{C_4^2} \ln (C_4 \exp \{x^0\} - C_3) \right], \quad (40)$$

где C_1 , C_2 , C_3 и C_4 — некоторые константы.

Наконец, напомним, что в 4-мерной общей теории относительности аналогом полученного здесь решения является открытая однородная изотропная космологическая модель Фридмана, эволюция которой в параметрической форме записывается в виде

$$a = a_0 (\operatorname{ch} x^0 - 1), \quad \tau = a_0 (\operatorname{sh} x^0 - x^0). \quad (41)$$

Для больших τ формулы (34), (40) и (41) качественно соответствуют друг другу, однако в 6-мерной теории масштабный фактор растет в $\sqrt[3]{3}$ раз медленнее, чем во фридмановской модели.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Владимиров Ю. С., Попов А. Д. Многомерные модели физических взаимодействий типа теории Калуцы—Клейна // Итоги науки и техники. Сер. Классическая теория поля и теория гравитации. Т. 1. 1991. М.: ВИНТИ. С. 5—48. [2] Duff M. J., Nilsson B. E. W., Pope C. N. // Phys. Rep. 1986. 130. № 1—2. Р. 1. [3] Владимиров Ю. С. Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий. М., 1987. [4] Владимиров Ю. С. Пространство-время: явные и скрытые размерности. М., 1989. [5] Владимиров Ю. С., Антонов В. И. // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М., 1977. Вып. 8. С. 162. [6] Владимиров Ю. С. Системы отсчета в теории гравитации М., 1982. [7] Israel W. Differential forms in general relativity. Dublin. Dublin Institute for advanced studies. 1970. Series A, No. 19.

Поступила в редакцию:
26.02.92