УДК 535.3

О ВОЗМОЖНОСТИ ЭФФЕКТИВНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ШИРОКОПОЛОСНОЙ НАКАЧКИ В УЗКОПОЛОСНОЕ СТОКСОВО ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ ВКР В СЕЛЕКТИВНОМ РЕЗОНАТОРЕ

Ю. Е. Дьяков
(*кафедра общей физики и волновых процессов*)

Теория комбинационного лазера обобщается на случай сильных немонохроматических полей, когда ширина частотного спектра накачки произвольна и возможно насыщение перехода. Предполагается, что в резонатор введен селективный элемент, сужающий спектр генерируемой стоксовой волны. Определены условия, при которых КПД генерации может быть близок к 100%.

1. Известная особенность ВКР состоит в том, что частотный спектр стоксовой волны $G_s(\omega)$ в стационарном режиме повторяет спектр волны накачки $G_p(\omega)$; при этом ширины спектров одинаковы, $\Delta\omega_s \approx \Delta\omega_p$ [1—3]. Это свойство было установлено, однако, для неселективных сред, в которых волны всех частот, входящих в $G_s(\omega)$, распространяются одинаково свободно. Очевидно, что если некоторые частоты при распространении будут подавляться, то можно получить генерацию узкополосного излучения в поле широкополосной накачки, $\Delta_s\omega \ll \Delta\omega_p$. Такая ситуация рассматривается в настоящей работе на примере возбуждения ВКР в кольцевом резонаторе, зеркала которого полностью пропускают излучение накачки, но хорошо отражают на

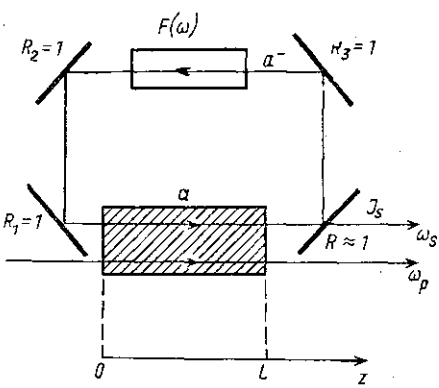

Рис. 1

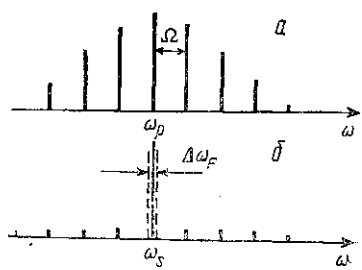

Рис. 2

стоксовой частоте (рис. 1). Стоксова волна распространяется в комбинационно-активной среде (заштрихована на рис. 1) только в направлении вперед, проходя путь обратно в пустоте, где она фильтруется селективным элементом $F(\omega)$ (например, тонким интерферометром Фабри-Перо) с узкой полосой пропускания $\Delta\omega_F$, которая и определяет ширину спектра стоксовой волны, $\Delta\omega_s \approx \Delta\omega_F$.

2. Представим спектр накачки в виде набора дискретных частот $\omega_p \pm n\Omega$ (n=0, 1, 2, ...); при этом ширина спектра накачки $\Delta\omega_p = 2M\Omega$, где $2M+1$ — эффективное число частот в спектре (рис. 2, *а*). Спектр стоксовой волны будет при этом содержать частоты $\omega_s \pm n\Omega$, а спектр молекулярных колебаний — частоты $\omega_0 \pm n\Omega$, где $\omega_s = \omega_p - \omega_0$, ω_0 — ре-

зонансная частота молекулярных колебаний. Мы предполагаем, что выполняется условие $\Delta\omega_F \ll \Omega$; при этом в резонаторе будут существовать благоприятные условия лишь для возбуждения одной частоты, например ω_s (рис. 2, *б*). Интенсивность этой монохроматической стоксовой волны вне резонатора обозначим J_s.

Для определения J_s исходим из общих уравнений для комплексных амплитуд накачки A, стоксовой волны a и a^- (a^- соответствует волне, распространяющейся назад), молекулярных колебаний Q, а также для разности населенностей N:

$$\frac{\partial a}{\partial z} = \frac{1}{2} g\alpha_2 A Q^*, \tag{1}$$

$$-\frac{\partial a^-}{\partial z} + \frac{2}{c}\frac{\partial a^-}{\partial \theta} = 0, \quad \theta = t - z/c, \tag{2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} + \alpha_2 Q = A a^* N, \quad \alpha_2 = 1/T_2, \tag{3}$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{1}{2} g\alpha_2 \frac{\omega_p}{\omega_s} a Q, \tag{4}$$

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} + \alpha_1 N = \alpha_1 - \frac{1}{2}(A a^* Q^* + \text{к. с.}), \quad \alpha_1 = 1/T_1 \tag{5}$$

(см., напр., [4]), где $g > 0$ — параметр усиления ВКР. В уравнениях (1)—(5) использована нормировка, при которой интенсивности $|A|^2$ и $|a|^2$ имеют размерность частоты, а Q — безразмерно. В дальнейшем предполагается, что время T_1 достаточно велико, а время T_2 — произвольно,

$$\Omega T_1 \gg 1, \quad \Omega T_2 \gtrless 1. \tag{6}$$

При этих условиях и с учетом действия селективного элемента $F(\omega)$ ищем стационарное решение приведенных выше уравнений в виде

$$A = \sum_n A_n(z) \exp\{i\Omega n\theta\}, \quad Q = \sum_n Q_n(z) \exp\{i\Omega n\theta\}, \tag{7}$$

$$a = \rho(z) \exp\{i\varphi(z)\}, \quad a^- = \text{const}, \quad N = N(z). \tag{8}$$

Так как стоксова волна считается приблизительно монохроматической (см. (8)), то в (1) правую часть заменяем ее средним по времени значением:

$$A Q^* \to \Sigma A_n Q_n^*. \tag{9}$$

Аналогичную замену делаем и в (5), учитывая первое условие (6); при этом можно также положить $\partial N/\partial\theta = 0$. В результате получим

$$Q_n = \frac{A_n \rho \exp\{-i\varphi\} N}{\alpha_2 + i\Omega n}, \quad |Q_n|^2 = I_n F_n \rho^2 N^2 \alpha_2^{-2}, \tag{10}$$

$$N = 1 - \frac{1}{\alpha_1}\left(\rho^2 N \sum_n \frac{I_n}{\alpha_2 - i\Omega n} + \text{к. с.}\right) = \frac{1}{1 + \rho^2 v/\sigma^2}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial A_n}{\partial z} = -\frac{1}{2} g \frac{\omega_p}{\omega_s} \rho^2 \frac{A_n}{1 + \rho^2 v/\sigma^2} \frac{1}{1 + i\Omega T_2 n}, \tag{12}$$

где

$$I_n = |A_n|^2,\ v = v(z) = \Sigma I_n(z) F_n,\ F_n = \frac{1}{1 + (\Omega T_2 n)^2},$$

$$\sigma = (\alpha_1 \alpha_2)^{1/2} = (T_1 T_2)^{-1/2}.$$

Из (11) следуют уравнения для I_n и полной средней интенсивности накачки $I = \Sigma I_n$ в резонаторе $(0 < z < L)$:

$$\frac{dI_n}{dz} = -g \frac{\omega_p}{\omega_s} \rho^2 \frac{I_n F_n}{1 + \rho^2 v/\sigma^2}, \tag{13}$$

$$\frac{dI}{dz} = -g \frac{\omega_p}{\omega_s} \rho^2 \frac{v}{1 + \rho^2 v/\sigma^2}. \tag{14}$$

3. Предположим, что коэффициент отражения выходного зеркала близок к единице, $R \approx 1$, а остальные зеркала являются идеально отражающими на частоте ω_s, $R_i = 1$ (рис. 1). Тогда в соответствии с (8) условие согласования прямой и обратной стоксовых волн примет вид

$$|a^-| = \rho(0) = R\rho(L). \tag{15}$$

С другой стороны, подставив (8) и (9) в (1), получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{1}{2} g\alpha_2 \operatorname{Re} \exp\{-i\varphi\} \Sigma A_n Q_n^*, \tag{16}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{2\rho} g\alpha_2 \operatorname{Im} \exp\{-i\varphi\} \Sigma A_n Q_n^*. \tag{17}$$

Интегрируя (16) по длине L резонатора и учитывая (15), найдем

$$\rho(L) - \rho(0) = \rho(L) - \rho(L) R = \rho(L)(1 - R) =$$

$$= \frac{1}{2} g\alpha_2 \int_0^L \operatorname{Re} \exp\{-i\varphi\} \Sigma A_n Q_n^* dz.$$

Подставив сюда

$$\Sigma A_n Q_n^* = \frac{\rho \exp\{i\varphi\}}{1 + \rho^2 v/\sigma^2} \frac{1}{\alpha_2} \Sigma \frac{I_n}{1 - i\Omega T_2 n} \tag{18}$$

(см. (10)), находим

$$(1 - R)\rho(L) = \frac{1}{2} g \int_0^L \rho(z) \frac{v(z)\, dz}{1 + \rho^2(z)\, v(z)/\sigma^2}. \tag{19}$$

При $R \approx 1$ характерной особенностью амплитуды резонирующей волны является то, что она мало меняется по длине резонатора [2, 5] (см. также ниже п. 7). Таким образом, в подынтегральном выражении в (19) можно положить

$$\rho(z) \approx \rho(L) = \rho = \text{const}. \tag{20}$$

В результате получим соотношение

$$2(1 - R) = g \int_0^L \frac{v(z)\, dz}{1 + \rho^2 v(z)/\sigma^2}. \tag{21}$$

Из (14) и (21) вытекает закон сохранения

$$I_0 - I_L = g\rho^2 \frac{\omega_p}{\omega_s} \int_0^L \frac{v dz}{1 + \rho^2 v/\sigma^2} = \frac{\omega_p}{\omega_s} J_s. \tag{22}$$

Здесь $I_0 = I(0)$, $I_L = I(L)$ и $J_s = \rho^2(1 - R^2) \approx 2(1 - R)\rho^2$ — искомая интенсивность узкополосного стоксова излучения на выходе резонатора. Далее находим, интегрируя (13):

$$I_{n,L} = I_{n,0} \exp\{-F_n \zeta\}, \quad I_L = \Sigma I_{n,L} \exp\{-F_n \zeta\}, \tag{23}$$

где

$$\zeta = g \frac{\omega_p}{\omega_s} \rho^2 \int_0^L \frac{dz}{1 + \rho^2 v/\sigma^2}.$$

Но, как следует из (21) и (22),

$$\int_0^L \frac{dz}{1 + \rho^2 v/\sigma^2} = L - \frac{\rho^2}{\sigma^2} \int_0^L \frac{v dz}{1 + \rho^2 v/\sigma^2} = \left[1 - \frac{2\rho^2(1 - R)}{\sigma^2 g L}\right] L,$$

так что ζ можно выразить через J_s:

$$\zeta = g\rho \frac{\omega_p}{\omega_s} L \left[1 - \frac{2\rho^2(1 - 2)}{\sigma^2 g L}\right] = \frac{J_s}{I_1}\left(1 - \frac{J_s}{I_2}\right). \tag{24}$$

Здесь введены обозначения

$$I_1 = \frac{2(1 - R)}{gL} \frac{\omega_s}{\omega_p}, \quad I_2 = \sigma^2 g L = \frac{\hbar \omega_s N_0 L}{2T_1} \tag{25}$$

(N_0 — плотность газа). Интенсивность I_1 с точностью до множителя ω_s/ω_p совпадает с порогом генерации комбинационного лазера с монохроматической накачкой; I_2 — предельная интенсивность стоксовой волны, достижимая при полном насыщении перехода как в открытом пространстве [6], так и в резонаторе (см. ниже).

Подставив (23) в (22), получим трансцендентное уравнение, определяющее величину J_s:

$$J_s = \frac{\omega_s}{\omega_p} I_0 (1 - \mu), \quad \mu = I_0^{-1} \Sigma I_{n,0} \exp\{-F_n \zeta\}. \tag{26}$$

Здесь зависимость ζ от J_s дается формулой (24). В частном случае монохроматической накачки ($F_n = \delta_{0n}$) и малых J_s, когда не проявляется насыщение перехода ($J_s \ll I_2$), уравнение (26) принимает известный вид [7]:

$$J_s = \frac{\omega_s}{\omega_p} I_0 (1 - \exp\{-J_s/I_1\}).$$

Если ввести квантовую эффективность генерации $\eta = \omega_p J_s/\omega_s I_0$, то из (26) найдем

$$\eta = 1 - \mu. \tag{27}$$

Так как μ является монотонно убывающей функцией ζ (см. (26)), то

$\mu=\mu_{\min}$ и $\eta=\eta_{\max}$ при $\zeta=\zeta_{\max}$. Согласно (24) $\zeta_{\max}=I_2/4I_1$ достигается при $J_s=I_2/2$. Следовательно,

$$\eta_{\max}=1-\mu_{\min}, \tag{28}$$

где

$$\mu_{\min}=I_0^{-1}\Sigma I_{n,0}\exp\{-F_nI_2/4I_1\} \tag{29}$$

при

$$J_s=I_2/2,\ I_0=\frac{I_2\omega_p}{2\omega_s}(1-\mu_{\min})^{-1}. \tag{30}$$

4. Из соотношений (11), (13) и (14) вытекает, что интенсивности $I_n(z)$, $I(z)$ и функции $v(z)=\Sigma I_n(z)F_n$ и $u(z)=\rho^2v(z)/\sigma^2$ монотонно уменьшаются по длине резонатора, а разность населенностей $N(z)=(1+u)^{-1}$, наоборот, монотонно возрастает. Изменение интенсивности молекулярных колебаний

$$I_Q(z)=\Sigma\,|Q_n(z)|^2=\frac{\rho^2}{\alpha_2^2}N^2(z)v(z)=\frac{T_2}{T_1}\frac{u}{(1+u)^2} \tag{31}$$

на интервале $0<z<L$ будет немонотонно, если значение $u=1$, при котором

$$I_Q=I_{Q,\max}=\frac{T_2}{4T_1},$$

лежит внутри этого интервала, и монотонным (убывающим или возрастающим) в противном случае.

5. Определим порог генерации I_0^{ht} при немонохроматической накачке. Считая J_s и ζ малыми величинами, находим из (26)

$$J_s=\frac{\omega_s}{\omega_p}\zeta\Sigma I_{n,0}F\left(1-\frac{1}{2}F_n\zeta\right),\ \zeta\approx J_s/I_1, \tag{32}$$

т. е. на пороге ($J_s=0$)

$$I_1=\frac{\omega_s}{\omega_p}\Sigma I_{n,0}F_n$$

или

$$I_0^{\text{th}}=I_1\frac{\omega_p}{\omega_s\varkappa}=\frac{2(1-R)}{gL\varkappa},\quad \varkappa=I_0^{-1}\Sigma I_{n,0}F_n\leqslant 1. \tag{33}$$

Оценим влияние немонохроматичности накачки на величину порога. Например, если спектр накачки состоит из $2M+1$ частот одинаковой интенсивности (рис. 3), то

$$\varkappa=\frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M}\frac{1}{1+(\Omega T_2n)^2}.$$

При этом для «редкого» спектра ($\Omega T_2\gg 1$, рис. 3, *а*)

$$\varkappa\approx\frac{1}{2M+1},$$

а для «частого» спектра ($\Omega T_2 \ll 1$, рис. 3, *б*)

$$\varkappa \approx \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(\Omega T_2 n)^2} = \frac{1}{2M+1} \frac{\pi}{\Omega T_2} \operatorname{cth} \frac{\pi}{\Omega T_2} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2M+1} \frac{\pi}{\Omega T_2} \approx \frac{\Delta\omega_0}{\Delta\omega_p}.$$

В обоих случаях параметр $\varkappa$ в (33) равен относительной доле интенсивности накачки, приходящейся на интервал частот, равный ширине линии КР $\Delta\omega_0 = 2/T_2$.

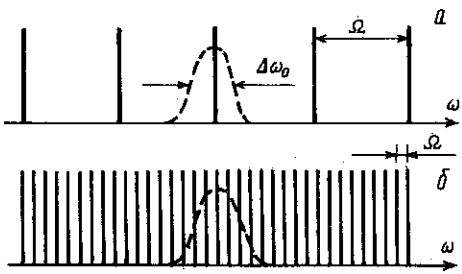

Рис. 3

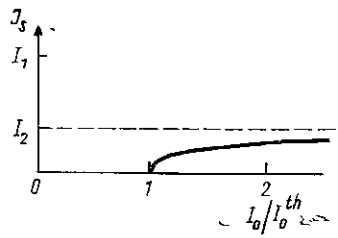

Рис. 4

6. При небольших превышениях порога генерации согласно (32)

$$J_s = \frac{\omega_s}{\omega_p} \frac{I_0 - I_0^{\text{th}}}{\varkappa_1/2\varkappa + I_1/I_2}, \quad \varkappa_1 = I_0^{-1} \Sigma I_{n,0} F_n^2. \tag{34}$$

При больших превышениях порога согласно (24) и (26) величина J_s стремится к I_2:

$$J_s = I_2 (1 - I_0^{\text{th}}/I_0) \quad (I_0 \gg I_0^{\text{th}}). \tag{35}$$

При этом если $I_1 \gg I_2$ (низкий порог насыщения), то формула (34) принимает вид

$$J_s = \frac{\omega_s}{\omega_p} \frac{I_0 - I_0^{\text{th}}}{I_1} I_2 \varkappa = I_2 (I_0/I_0^{\text{th}} - 1) \quad (I_0 \approx I_0^{\text{th}}).$$

К этому же значению при $I_0 \to I_0^{\text{th}}$ формально стремится и J_s, определенное формулой (35):

$$J_s = I_2 \frac{I_0 - I_0^{\text{th}}}{I_0} \to I_2 (I_0/I_0^{\text{th}} - 1) \quad (I_0 \approx I_0^{\text{th}}).$$

Поэтому можно предположить, что формула (35) дает хорошую интерполяцию для J_s при любых I_0:

$$J_s \approx I_2 (1 - I_0^{\text{th}}/I_0) \quad (I_0^{\text{th}} \leqslant I_0 < \infty, \ I_1 \gg I_2) \tag{36}$$

(рис. 4). Используя (36), находим эффективность генерации:

$$\eta = \frac{\omega_p J_s}{\omega_s I_0} = \frac{\omega_p I_2}{\omega_s I_0} (1 - I_0^{\text{th}}/I_0). \tag{37}$$

Согласно (37) максимальная величина η достигается при двойном превышении порога:

$$\eta_{\max}=\frac{\varkappa I_2}{4I_1}\quad (I_0=2I_0^{\text{th}}). \tag{38}$$

Из (38) следует, что при $I_1 \gg I_2$ большие КПД генерации недостижимы: $\eta<\eta_{\max}\ll 1$.

Большие КПД можно получить, однако, в противоположном предельном случае $I_1 \ll I_2$ (высокий порог насыщения), когда согласно (28) и (29) $\mu_{\min}\ll 1$ и $\eta=\eta_{\max}\approx 1$ при $I_0=I_2\omega_p/2\omega_s$. Общий характер зависимости J_s и η от I_0 в этом случае показан на рис. 5.

Заметим, что наиболее благоприятный случай $I_1 \ll I_2$ реализуем при использовании в принципе любого комбинационно-активного вещества, так как величина отношения

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{(\sigma g L)^2\,\omega_p}{2(1-R)\,\omega_s}$$

определяется не только материальными параметрами (σ, g), но и длиной резонатора L и коэффициентом отражения выходного зеркала R.

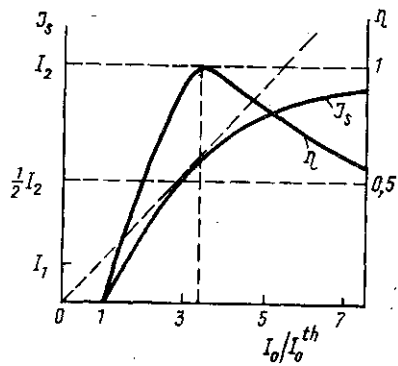

Рис. 5

7. Выше предполагалось (см. (20)), что изменение $\Delta\rho$ амплитуды ρ стоксовой волны в резонаторе относительно мало:

$$\Delta\rho \ll \rho. \tag{39}$$

Уточним условия, при которых неравенство (39) имеет место. Согласно (16)

$$\Delta\rho \leqslant \frac{1}{2}\, g\alpha_2 L\, |\Sigma A_n Q_n^*|_{\max}.$$

Учитывая неравенство Коши—Буняковского

$$|\Sigma A_n Q_n^*|^2 \leqslant \Sigma\, |A_n|^2\, \Sigma\, |Q_n|^2 = I(z)\, I_Q(z),$$

а также то, что $I_{\max}=I_0$, $N(z)\leqslant 1$ и

$$I_Q(z)=\frac{\rho^2}{\alpha_2^2}\, N^2(z)\, v(z) \leqslant \frac{\rho^2}{\alpha_2^2}\, v(0)=\frac{\rho^2}{\alpha_2^2}\, I_0\varkappa,$$

находим

$$\frac{1}{2}\, g\alpha_2 L\, |\Sigma A_n Q_n^*| \leqslant \frac{1}{2}\, g I_0 L \sqrt{\varkappa}\,\rho,$$

т. е.

$$\Delta\rho/\rho \leqslant \frac{1}{2}\, g I_0 L \sqrt{\varkappa}. \tag{40}$$

Обозначим через n превышение накачки над порогом:

$$I_0=nI_0^{\text{th}}=n\,\frac{2(1-R)}{gL\sqrt{\varkappa}}. \tag{41}$$

Подставив (41) в (40), получим

$$\Delta\rho/\rho \leqslant \frac{1-R}{\sqrt{\varkappa}} n.$$

Следовательно, величина $\Delta\rho/\rho$ мала, если коэффициент отражения близок к единице и не слишком велико превышение порога генерации.

Аналогичная оценка вытекает из уравнения (17) для $\Delta\varphi$ — приращения фазы стоксовой волны в резонаторе:

$$\Delta\varphi \sim \frac{\Delta\rho}{\rho} \leqslant \frac{1-R}{\sqrt{\varkappa}} n.$$

Для $\Delta\varphi$ может быть получено и точное выражение. Интегрируя (17) по z, находим, учитывая (18),

$$\Delta\varphi = \frac{g\alpha_2}{2\rho} \int_0^L \operatorname{Im} \exp\{-i\varphi\} \Sigma A_n Q_n^* dz =$$

$$= \frac{1}{2} g\Omega T_2 \Sigma n F_n \int_0^L \frac{I_n(z)\, dz}{1+\rho^2 v(z)/\sigma^2}.$$

Но из (13) и (23) следует, что

$$I_{n,0} - I_{n,L} = I_{n,0}(1 - \exp\{-F_n\zeta\}) = g\frac{\omega_p}{\omega_s}\rho^2 F_n \int_0^L \frac{I_n(z)\, dz}{1+\rho^2 v(z)/\sigma^2}.$$

В результате получим

$$\Delta\varphi = \frac{\omega_s \Omega T_2}{\omega_p \cdot 2\rho^2} \Sigma n I_{n,0}(1 - \exp\{-F_n\zeta\}). \tag{42}$$

Формула (42) показывает, что при симметричном спектре накачки на входе резонатора ($I_{n,0} = I_{-n,0}$) набег фазы отсутствует: $\Delta\varphi = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дьяков Ю. Е.//Письма в ЖЭТФ. 1970. **11**. С. 362. [2] Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М., 1981. [3] Дьяков Ю. Е., Никитин С. Ю.//Квант. электроника. 1987. **14**. С. 1965. [4] Ахманов С. А., Коротеев Н. И. Методы нелинейной оптики в спектроскопии рассеяния света. М., 1981. [5] Дьяков Ю. Е., Коврыгин А. И.//Квант. электроника. 1972. **10**. С. 86. [6] Дьяков Ю. Е.//Тез. докл. VII Всесоюз. конф. по когер. и нелин. оптике (Ташкент, 1974). М., 1974. С. 242. [7] Glass A. J., McMahon J. M.//IEEE J. Quant. Electron. 1969. **QE-5**, N 1. P. 1.

Поступила в редакцию
13.02.92