ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.21

ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ИЗМЕРЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Ю. П. Пытьев, В. А. Газарян, Г. В. Сухорукова, Т. В. Матвеева

(кафедра физики атмосферы и математической геофизики)

В качестве эффективного принципа оценивания атмосферных параметров по измерениям интенсивности солнечной радиации предлагается метод интервального оценивания. Размеры доверительного множества являются количественной мерой информативности конкретного эксперимента по отношению к параметрам изучаемого объекта. Для иллюстрации представлены оценки общего содержания озона и аэрозоля, оптического аэрозольного параметра, а также вертикального распределения озона.

Дистанционные методы определения состава и пространственной структуры атмосферы, оптически активных составляющих атмосферы основаны, как правило, на измерении спектров интенсивности электромагнитного излучения Солнца.

Основной целью статьи является разработка эффективного принципа оценивания атмосферных параметров по измерениям солнечной радиации. Для этого предлагается метод интервального оценивания. При решении дистанционных задач не всегда ясно априори, как в данных измерений распределена информация об исследуемых параметрах и возможно ли по имеющимся экспериментальным данным построить разумные оценки всех этих параметров. Результатом их интервального оценивания является построение доверительных множеств. Размеры случайного множества можно рассматривать как количественную меру информативности конкретного эксперимента по отношению к параметрам изучаемого объекта.

Схему измерений вектора параметров объекта **f** (у нас это атмосферные параметры) зададим уравнением

$$\xi = A(\theta) f + \nu, \tag{1}$$

где параметр θ оператора $A(\theta)$, формирующего измеряемый сигнал ξ (с точностью до случайной погрешности ν), точно не известен. Количественную меру информации о том или ином параметре, содержащейся в измерениях (1), дает случайное множество, покрывающее истинное значение параметра с заданной вероятностью.

Предположим, что при заданной вероятности доверительное множество для какого-то параметра оказалось большим. Тогда с этой вероятностью в него попадут значения параметра, далекие от истинного. Такая оценка параметра является грубой и не представляет ценности. Можно говорить о том, что в измерениях содержится слишком мало информации для того, чтобы с заданной вероятностью достаточно точно оценить значение упомянутого параметра. Чем меньше при заданной вероятности доверительное множество, тем точнее оценка параметра по имеющейся реализации ξ, а следовательно, выше информативность измерений по отношению к данному параметру.

Определим понятие случайного оценивающего множества. Случайное множество $\psi(\xi, p)$ называется оценивающим параметр $\theta \in \mathfrak{N}$ распределения ξ с вероятностью p, если вероятность $P_\theta(\theta \in \psi(\xi, p)) = p$ для любого $\theta \in \mathfrak{N}$. При этом p называется надежностью оценивания θ, $p \in [0, 1]$ [1].

Пусть в схеме измерений (1) ξ, $\nu \in R_n$, $f \in R_m$, $A(\theta)$ — линейный оператор, действующий из R_m в R_n, $\theta \in \mathfrak{N}$, случайный вектор ν имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(0, \Sigma)$, $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$, $a = A(\theta) f \in R_n$. Истинный оператор $A(\theta_0)$ модели измерения $[A(\theta_0), \Sigma]$ и истинное значение вектора $f \in R_m - f_0$ неизвестны. Построим множество, оценивающее параметр $a_0 = A(\theta_0) f_0 \in R_n$ нормального распределения $\mathcal{N}(a_0, \Sigma)$ вектора $\xi = a_0 + \nu$ с вероятностью p: $P_{a_0}(a_0 \in \psi(\xi, p)) = p$.

Для этого достаточно найти область принятия гипотезы $H = \{\xi \sim \mathcal{N}(a_0, \Sigma)\}$ о значении a_0 математического ожидания случайной величины ξ при альтернативе $K = \{\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma), a \in R_n, a \neq a_0\}$. Если в действительности верна альтернатива и параметр принимает значение $a_1 \in K$, то вероятность того, что a_0 попадет в доверительное множество $\psi(\xi, p)$, будет наименьшей для равномерно наиболее мощного критерия (РНМК). Эта величина $\gamma(a_1, p) = P_{a_1}(a_0 \in \psi(\xi, p))$ называется размером оценивающего множества $\psi(\xi, p)$ [1].

Качество оценивания характеризуется двумя параметрами: вероятностью p, с которой $\psi(\xi, p)$ содержит истинное значение $a_0 \in R_n$, и размером множества $\psi(\xi, p)$. Итак, чтобы доверительное множество имело минимальный размер, требуется найти область принятия гипотезы $H = \{\xi \sim \mathcal{N}(a_0, \Sigma)\}$ при альтернативе $K = \{\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma), a \in R_n, a \neq a_0\}$ для РНМК. Известно, что в общем случае такого критерия не существует. Однако рассматриваемая задача обладает естественной симметрией, связывающей значения параметров распределения a и наблюдений ξ и согласованной со структурой гипотезы H и альтернативы K, и построение РНМК оказывается возможным в более узком классе инвариантных критериев. Рассмотрим множество евклидовых преобразований пространства R_n, образующих группу $\mathfrak{G}$:

$$\{\mathfrak{G} : \mathfrak{G}x = \Sigma^{1/2} V \Sigma^{1/2}(x - a_0) + a_0,\ x \in R_n\},$$

где $V \in \{V\}$, $\{V\}$ — множество ортогональных преобразований пространства R_n. Можно показать, что при нормальном распределении ξ $P(\mathfrak{G}\xi \in B, a_0) = P(\xi \in B, \mathfrak{G}a)$ и любое преобразование группы $\mathfrak{G}$ не меняет гипотезы и множества альтернатив, т. е. наша задача проверки статистической гипотезы является $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$-инвариантной [2].

Максимальным инвариантом $\mathfrak{G}$ является функция $\tau(x) = \|\Sigma^{-1/2}(x - a_0)\|^2$. При первой гипотезе τ контролируется центральным χ^2-распределением с n степенями свободы, при верной альтернативе — нецентральным, и задача сводится к проверке гипотезы о параметре нецентральности χ^2-распределения. Область принятия гипотезы для РНМК, как известно, имеет вид [2]

$$\{x \in R_n : \|\Sigma^{-1/2}(x - a_0)\|^2 < \varepsilon\},$$

где ε выбрано по заданному уровню критерия $\alpha = 1 - p$: $\int_{\varepsilon}^{\infty} P_{n,0}(t)\, dt = \alpha$, а $P_{n,0}(t)$ — плотность центрального χ^2-распределения. Соответственно истинный параметр a_0 с вероятностью p будет лежать внутри случайного множества

$$\{a \in R_n : \|\Sigma^{-1/2}(\xi - a)\|^2 < \varepsilon\}.$$

«Неопределенность», свойственная интервальной оценке $\tau < \varepsilon$, приводит к тому, что в доверительное множество кроме истинных значений θ_0 и f_0, $a_0 = A(\theta_0) f_0$ попадут и другие значения. Такие значения параметров мы не сможем отличить от истинных, проводя интервальное оценивание по имеющимся экспериментальным данным.

Реально полученное множество может оказаться слишком широким для того, чтобы сделать разумное заключение о модели. Посмотрим, нельзя ли извлечь из ξ более емкую информацию об f_0 и θ_0, в частности попытаться уменьшить зависимость оценок $A(\theta)$ и f друг от друга.

Запишем статистику $\tau(\xi)$ в виде $\tau(\xi)=\|\Sigma^{-1/2}(\xi-A(\theta)f)\|^2=\|\Pi(\theta)\times\Sigma^{-1/2}(\xi-A(\theta)f)\|^2+\|(I-\Pi(\theta))\Sigma^{-1/2}\xi\|^2$, где $\Pi(\theta)=\Sigma^{-1/2}A(\theta)(\Sigma^{-1/2}A(\theta))^{-}$ — ортогональный проектор на пространство значений оператора $\Sigma^{-1/2}A(\theta)$. Статистика $\tau_1=\|(I-\Pi)\Sigma^{-1/2}\xi\|^2=\|(I-\Pi(\theta))\Sigma^{-1/2}(A(\theta_0)f_0+\nu)\|^2$ характеризует близость нормированного вектора измерений $\Sigma^{-1/2}\xi$ к пространству значений оператора $\Sigma^{-1/2}A(\theta)$ и называется статистикой надежности модели $[A(\theta), \Sigma]$. Если оператор $A(\theta)$ в проекторе такой же, как на самом деле в ξ, независимо от f получаем случайную величину τ_1, имеющую центральное χ^2-распределение с $(n-m)$ степенями свободы, где m — ранг $\Pi(\theta)$. Значит, по заданному выше уровню критерия α можно ограничить доверительное множество соответствующим значением ε_1 и говорить о том, что с заданной вероятностью $(1-\alpha)$ будет выполнено условие $\tau_1<\varepsilon$ и значения параметров θ, определяющие $A(\theta)$ и удовлетворяющие неравенству $\tau_1<\varepsilon$, неотличимы от реального значения θ_0.

Не следует забывать о зависимости оценки от f, ведь мы не знаем, какова величина f на самом деле. В принципе, если f мало, в область, ограниченную ε_1, могут попасть θ, далекие от реального. Чем больше f, тем точнее будет оценка θ_0. Можно говорить лишь о том, что вывод о значении параметра, вытекающий из результатов интервального оценивания, с заданной вероятностью не противоречит экспериментальным данным ξ и, хотя полностью разделить параметры θ и f методом интервального оценивания по ξ невозможно, зависимость доверительного множества для θ_0 от f будет слабее, чем при оценке параметра a_0. Действительно, при правильном выборе параметра в результате проецирования на ортогональное дополнение к пространству значений оператора $\Sigma^{-1/2}A(\theta)$, где $\theta=\theta_0$, зависимости от f не будет. Вообще, по мере приближения θ к θ_0 добавка за счет неточного проецирования убывает монотонно, а значит, влияние f на оценку θ_0 ослабевает. Таким образом, зависимость доверительного множества для θ_0 от f реагирует на ошибку в модели, связанную с неточным выбором параметра θ, а так как, формируя новое доверительное множество, мы работаем, как правило, в небольшой окрестности θ_0, можно надеяться, что отклонение от реального θ_0 будет невелико.

Рассуждая аналогично, можно уменьшить зависимость оценки f_0 от θ, проецируя вектор измерений на $R(\Sigma^{-1/2}A(\theta))$. Возьмем статистику $\tau_2=\|\Pi(\theta)\Sigma^{-1/2}(\xi-A(\theta)f)\|^2$ и для каждого θ из предыдущего оценивающего множества построим оценку f_0, воспользовавшись тем, что при фиксированном θ, совпадающем с θ_0, статистика τ_2 имеет центральное χ^2-распределение с m степенями свободы. Итак, для конкретного θ из указанной области вектор f_0 с вероятностью $1-a$ лежит в доверительном множестве

$$\{f:\|\Pi(\theta)\Sigma^{-1/2}(\xi-A(\theta)f)\|^2<\varepsilon_2\}.$$

Опять возникает ситуация, когда оценка f в принципе зависит от выбора θ, но за счет того, что мы работаем в окрестности точного значения f_0, эта зависимость будет слабой.

В качестве примера построения оценивающего множества $\psi_p(\xi)$ рассмотрим оценку общего содержания озона (ОСО) и аэрозоля (ОСА) по данным наземных измерений прямого солнечного излучения в диапазоне 305—340 нм. Выясним, насколько модельные данные измерений солнечной радиации в указанной задаче позволяют конкретизировать априорные представления об этих параметрах.

Рассмотрим кратко модель атмосферы и схему измерения солнечной радиации. Наземный приемник ориентирован в направлении падения прямого солнечного излучения и регистрирует монохроматическую радиацию на длине волны λ_i, $i=1, ..., n$. Схема измерений имеет вид

$$\xi_i = J(\lambda_i) + \nu_i, \tag{2}$$

где $J(\lambda_i)$ — интенсивность солнечного излучения, ослабленного на пути от верхней границы атмосферы до точки наблюдения, ξ_i — результат измерения $J(\lambda_i)$ с погрешностью ν_i. В соответствии с законом Бугера [3] $J(\lambda_i) = S_{\lambda_i} \exp\{-T\}$, где S_λ, 300 нм$\leqslant\lambda\leqslant$340 нм, — спектр интенсивности внеатмосферной солнечной радиации. Помимо поглощения озоном существенное влияние на распространение излучения в данном диапазоне длин волн оказывает также молекулярное рассеяние, аэрозольное поглощение и рассеяние. Поэтому оптическая толщина атмосферы T на длине волны λ_i имеет вид

$$T_i = (\tau_{i_m} + \tau_{i_a} + \tau_{i_{oz}})\, m(\theta_s) = (\tau_{i_m}(h, \theta_s) + (b/\lambda_i^y)\, m(\theta_s) + \alpha_{\lambda_i} X) m(\theta_s),$$

где слагаемые представляют собой полные молекулярную, аэрозольную и озонную толщи соответственно, $m(\theta_s)$ — оптическая масса атмосферы, зависящая от видимого угла Солнца, α_λ — сечение поглощения озона, X — ОСО, b и y — параметры [4]. Проблема интерпретации измерений (2) состоит в наиболее точном определении значения X.

Спектральная зависимость аэрозольной оптической толщи описывается формулой Ангстрема:

$$T_{i_a} = (b/\lambda^y)\, m(\theta_s).$$

Из-за сильной изменчивости концентрации и состава аэрозоля в атмосфере для интерпретации измерений (2) необходимо знать аэрозольную оптическую толщу в момент проведения измерений. Поэтому в рамках схемы измерений (2) наряду с ОСО должны быть определены и оптические параметры аэрозоля.

Представим (2) в виде $\xi_i/J(\lambda_i) = 1 + \nu_i/J(\lambda_i)$, $\ln(\xi_i/J(\lambda_i)) = \ln(1 + \nu_i/J(\lambda_i))$ и, линеаризуя последнее равенство на основании того, что отношение ν_i/J_i мало, получим схему измерений в виде

$$\zeta_i = -(b/\lambda_i^y)\, m(\theta_s) - a_{\lambda_i} X m(\theta_s) + \nu_i^*,$$

где $\zeta = \ln\xi + \tau_{i_m}$, $\nu_i^* = \nu_i/J_i(\theta_s)$, $i = 1, \ldots, n$, или в векторном виде

$$\zeta = A(y) f + \nu^*,$$

где $f = (X, b)$. Элементами оператора A являются

$$A_1^i = -a_{\lambda_i} m(\theta_s), \quad A_2^i = -m(\theta_s)/\lambda_i^y.$$

В математической модели атмосферы необходимо правильно выбрать параметры, определяющие ее оптические свойства. Изменчивость оптических свойств атмосферы во многом связана с поведением аэрозоля, и поэтому знание общего содержания аэрозоля b и спектральной зависимости аэрозольного ослабления, в данном случае параметра y, становится особенно важным. Задача определения ОСО и ОСА решалась следующим образом. Методом математической редукции оценивался вектор $f=(X, b)$, а аэрозольный параметр y уточнялся методом максимальной надежности модели [5]. Таким образом, постановка задачи оценивания общего содержания аэрозоля и общего содержания озона такова, что по измерениям прямой солнечной радиации делается вывод о нескольких атмосферных параметрах.

Проведен вычислительный эксперимент по интервальному оцениванию атмосферных параметров X, b и y. Вначале рассматривается попарная оценка параметров при заданном значении третьего. Доверительное множество для параметров X и b, определяемое условием $\tau<\varepsilon$, представляет собой эллипс (рис. 1, *а*). Из рис. 1 видно, что при

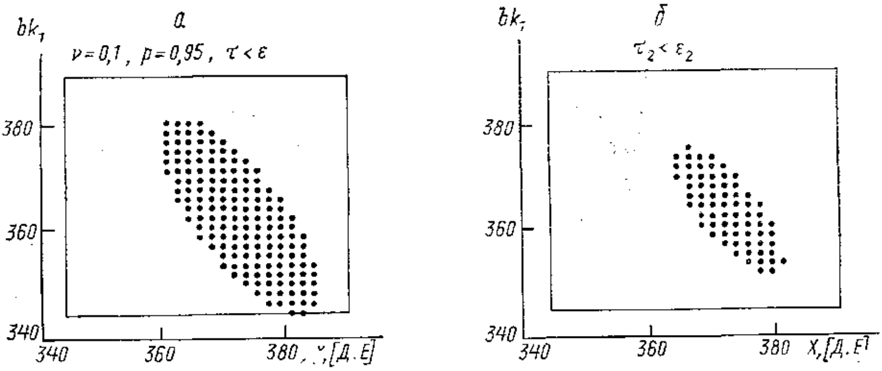

Рис. 1. Доверительное множество для параметров X и b, соответствующее оценке $\{a(X, b) : \|\Sigma^{-1/2}(\xi-a)\|^2<\varepsilon\}$ (*а*), и оценке $\{f(X, b) : \|\Pi(\theta)\Sigma^{-1/2}(\xi-A(\theta)f)\|^2<\varepsilon_2\}$ (*б*). Сплошной линией отмечены априорные интервалы параметров. Здесь и далее для удобства изображения доверительных множеств используются масштабные коэффициенты $k1$, $k2$, $k3$, равные отношению длин априорных интервалов X и b, X и y, b и y соответственно. Размерность параметра X — единицы Добсона (Д. Е.)

известном y содержащаяся в измерениях информация об X и b распределена примерно поровну, т. е., имея четкие представления о значении параметра y, можно с большой вероятностью (здесь $p=0{,}95$) получить такую оценку, которая значительно уточняет априорные представления как об X, так и об y. Используя для оценки $f=(X, b)$ статистику τ_2, т. е. проверяя условие $\tau_2<\varepsilon_2$, получаем более узкое доверительное множество, а следовательно, более точную оценку параметров (рис. 1, *б*). Это говорит о том, что проецирование вектора измерений на подпространство $R(\Sigma^{-1/2}A(\theta))$ действительно позволяет уменьшить зависимость оценки f_0 от θ.

Почти так же обстоит дело с оценкой X и y при известном b. Доверительное множество для этих параметров, представленное на рис. 2, *а*, очень похоже на предыдущее. Уточнения параметра y при проецировании на $R^{\perp}(\Sigma^{-1/2}A(\theta))$ не происходит — множество остается прежним, зато при проецировании на $R(\Sigma^{-1/2}A(\theta))$ становится у́же доверительный интервал для X (рис. 2, *б*).

Рассмотрим теперь оценку b и y при заданном значении X. Доверительные множества для этих параметров представлены на рис. 3. Здесь результат не столь обнадеживающий. Оказывается, что качественно оценить аэрозольные параметры b и y вместе, зная X, не удается, ведь для каждого b из априорного интервала можно найти такие y, которые удовлетворяют условию $\tau<\varepsilon$. Однако из рис. 3 видно, что полоса достаточно узкая (особенно для статистики τ_2) и при известном b можно было бы уточнить y, что и было сделано в предыдущем случае.

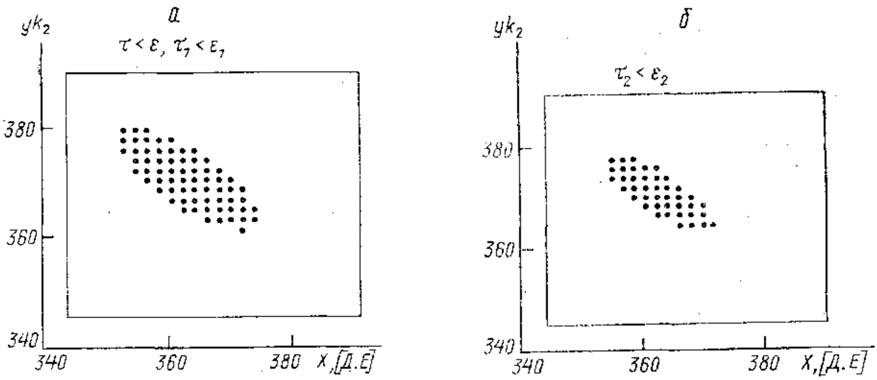

Рис. 2. Доверительное множество для параметров X и y, соответствующее оценке $\{a(X, y) : \|\Sigma^{-1/2}(\xi-a)\|^2<\varepsilon\}$ (*а*), и доверительные интервалы для параметра X при фиксированных значениях y, соответствующие оценке $\{f(X) : \|\Pi(\theta)\Sigma^{-1/2}(\xi-A(\theta)f)\|^2<\varepsilon_2\}$ (*б*)

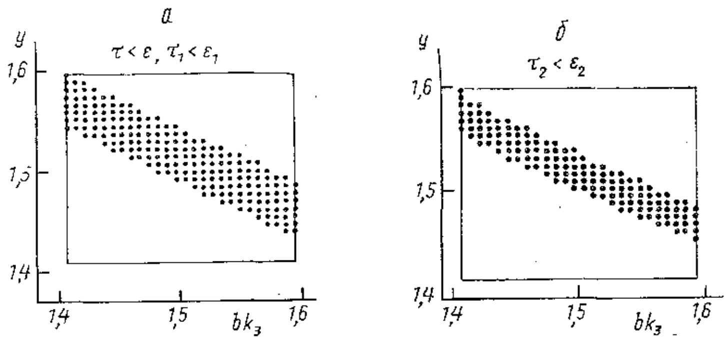

Рис. 3. Доверительное множество для параметров b и y, соответствующее оценке $\{a(b, y) : \|\Sigma^{-1/2}(\xi-a)\|^2<\varepsilon\}$ (*а*), и доверительные интервалы для параметра b при фиксированных значениях y, соответствующие оценке $\{f(b) : \|\Pi(\theta)\Sigma^{-1/2}(\xi-A(\theta)f)\|^2<\varepsilon_2\}$ (*б*)

При оценивании всех трех параметров X, y и b вместе оценивающие множества представляют собой полосы (ширина которых зависит от используемой для оценки статистики), и конкретизировать все три параметра в совокупности не представляется возможным. Одно из таких множеств показано на рис. 4.

Другой пример оценивающего множества $\psi_p(\xi)$ — интервальная оценка вертикального распределения концентрации озона в земной атмосфере по данным наземных измерений спектра рассеянного солнечного излучения. В этом случае схема измерений имеет вид

$$\xi=A(f)+\nu, \tag{3}$$

где координатами вектора f являются значения концентрации озона на высоте z_i, $i=1, \ldots, m$, а значение нелинейного оператора A определяется из решения краевой задачи для уравнения переноса излучения в атмосфере Земли [6]. Диалог интерпретатора с измерительной системой (3) состоит в возможности построения множества $\psi_p(\xi)$ минимального размера в зависимости от математической модели оператора $A(\theta)$, где θ — такие параметры, как высота Солнца, оптические коэффициенты ослабления атмосферы и др. Статистика τ в этой задаче имеет вид $\tau(\xi)=\|\Sigma^{-1/2}(\xi-A(f)\|^2$.

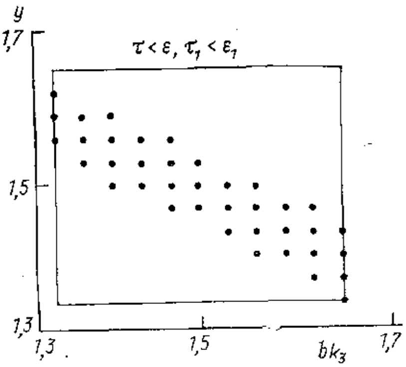

Рис. 4. Доверительное множество для параметров X и y, соответствующее оценке $\{a(X, b, y) : \|\Sigma^{-1/2}(\xi-a)\|^2<\varepsilon\}$

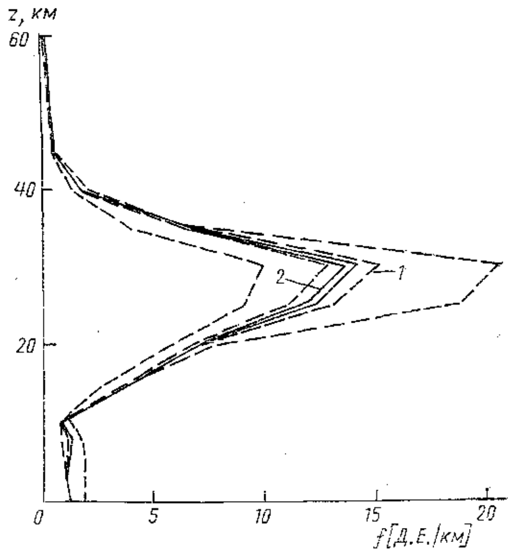

Рис. 5. Результаты интервального оценивания вертикального распределения озона при различных зенитных углах Солнца: *1* — 40°, *2* — 75°. Внешними штриховыми линиями отмечен априорный интервал

На рис. 5 показаны результаты интервального оценивания вектора f по данным моделирования спектра УФ радиации в соответствии со схемой (2) при зенитных углах Солнца 40° и 75°. Внешней штриховой линией показано среднезональное среднеклиматическое (в среднеквадратичном) отклонение вектора f от математического ожидания профиля озона f_0.

Установлено, что использование измерений спектра при больших (>70°) зенитных углах Солнца позволяет получить более точную оценку вертикального распределения концентрации озона, чем использование спектра, измеренного при малых зенитных углах.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Леман Э. Проверка статистических гипотез. М., 1979. [2] Пытьев Ю. П. Методы анализа и интерпретации эксперимента. М., 1990. [3] Мак-Картни Э. Оптика атмосферы. М., 1979. [4] Перов С. П., Хргиан А. Х. Современные проблемы атмосферного озона. Л., 1980. [5] Сухорукова Г. В. Дис. ... канд. физ.-мат. наук (МГУ, физ. ф-т). М., 1989. [6] Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах.

Поступила в редакцию
27.03.92