УДК 536.7

ДВИЖУЩАЯ СИЛА МАШИНЫ КАРНО, РАБОТАЮЩЕЙ ПРИ МАКСИМАЛЬНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ МОЩНОСТИ

Б. Б. Шишкин

(кафедра физической электроники)

Доказана теорема существования движущей силы в машине Карно, производящей максимальную мощность. Проведено уточнение теоремы вириала. Движущие силы машины выражены через кинематические характеристики поршня машины. Показано, что в процессе изотермического расширения идеального газа действует закон «3/2», устанавливающий зависимость координаты поршня от времени.

В настоящей статье анализируется машина Карно [1], работающая при максимальном производстве мощности. Модель такой машины предложена Керзоном и Олборном [2]. При анализе работы машины использованы некоторые идеи Умова [3] и Лоренца [4].

§ 1. Коэффициент полезного действия (КПД) машины, работающей при максимальном производстве мощности

1°. Модель машины [2]. Рабочее вещество машины — идеальный газ в количестве одного моля. Масса газа равна μ. Газ находится в цилиндре, радиус которого равен $\mathcal{R}$, нижнее основание цилиндра неподвижно, верхнее основание — подвижный поршень, имеющий массу M. В начальном состоянии внешнее давление p_e равно внутреннему p_i, поршень покоится, его координата $z=z_0$. Пусть газ внутри цилиндра и стенки цилиндра имеют температуру T_{10}.

Будем изменять состояние газа в цилиндре таким образом, чтобы машина совершила цикл Карно. Предположим, что в процессе изотермического расширения нагреватель повышает температуру стенок цилиндра до $T_1>T_{10}$. Если разность

$$x=T_1-T_{10} \tag{1}$$

мала, то поток теплоты q_1 от стенок цилиндра к газу найдем, используя закон Ньютона для теплопроводности. Имеем

$$q_1=\alpha x, \tag{2}$$

где α — коэффициент теплопереноса системы стенки цилиндра—газ.

Пусть τ_1 — время изотермического расширения газа. Тогда полное количество теплоты Q_1, подведенной к газу в процессе изотермического расширения, равно

$$Q_1=q_1\tau_1. \tag{3}$$

Второе представление найдем, используя основное термодинамическое тождество. Имеем

$$Q_1=\int\limits_{V(0)}^{V(\tau_1)} p\,dV=RT_{10}\ln\frac{V(\tau_1)}{V(0)}. \tag{4}$$

Здесь V — объем газа, R — универсальная газовая постоянная.

Рассуждая вполне аналогично, запишем уравнение, характеризующее процесс изотермического сжатия газа:

$$y = T_{20} - T_2 > 0, \tag{5}$$

$$q_2 = \beta y, \tag{6}$$

$$Q_2 = q_2 \tau_2, \tag{7}$$

где T_2 — температура стенок цилиндра при изотермическом сжатии газа, имеющего температуру T_{20}, β — коэффициент теплопереноса системы газ—стенки цилиндра, τ_2 — время изотермического сжатия, Q_2 — количество теплоты, переданной холодильнику.

Будем считать, что времена адиабатических стадий цикла Карно равны соответственно τ_1 и τ_2 *), а сами адиабатические стадии вполне обратимы. Следовательно, имеет место уравнение Клаузиуса:

$$\frac{Q_1}{T_{10}} = \frac{Q_2}{T_{20}}. \tag{8}$$

2°. КПД машины. Мощность машины, работающей по традиционному циклу Карно, равна нулю, так как времена τ_1 и τ_2 бесконечно велики. Мощность рассмотренной выше машины конечна. Средняя мощность P этой машины за один цикл равна

$$P = \frac{Q_1 - Q_2}{2(\tau_1 + \tau_2)} = \frac{A}{2(\tau_1 - \tau_2)} = \frac{\alpha\beta xy(T_1 - T_2 - x - y)}{2[\beta T_1 y + \alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta)]}, \tag{9}$$

где A — полезная работа цикла.

Предположим, что α, β, T_1 и T_2 являются параметрами задачи, и исследуем экстремальные свойства функции $P(x, y)$. В результате этого исследования найдем **), что в точке

$$x_0 = \frac{[1 - (T_2/T_1)^{1/2}]}{[1 + (\alpha/\beta)^{1/2}]} T_1, \tag{10}$$

$$y_0 = \frac{[(T_1/T_2)^{1/2} - 1]}{[1 + (\beta/\alpha)^{1/2}]} T_2 \tag{11}$$

функция $P(x, y)$ имеет максимальное значение $P_{\max}$:

$$P_{\max} = P(x_0, y_0) = \frac{\alpha\beta}{2}\left(\frac{\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}\right)^2. \tag{12}$$

Используя формулы (8), (10) и (11), рассчитаем КПД машины Карно, работающей при максимальном производстве мощности ***):

$$\eta = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}. \tag{13}$$

Эта формула впервые получена Керзоном и Олборном [2].

Сравнение реальных КПД лучших тепловых станций мира с КПД, рассчитанными по традиционной формуле Карно, дает различие теории и опыта в десятки процентов, а по формуле (13) — всего в несколько процентов.

---

*) В работе [2] предполагается, что сумма адиабатических стадий цикла равна $(\gamma - 1)(\tau_1 + \tau_2)$, где γ — показатель адиабаты.

**) В тексте статьи [2] в формуле (11) имеется опечатка.

***) Формула (13) получается с учетом (10) и (11) из рассмотрения цепочки равенств $\eta = 1 - T_{20}/T_{10} = 1 - (T_2 + y_0)/(T_1 - x_0)$ и т. д.

Таким образом, при конструировании устройств, преобразующих Q в A, инженерная мысль практически исчерпала возможности, предоставленные природой.

3°. Теорема существования движущей силы машины Карно, работающей при максимальном производстве мощности*). Формулы (12) и (13) преобразуем к простому виду:

$$A = \frac{2(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 Q_1^2}{\alpha\beta T_1} \cdot \nu, \tag{14}$$

$$P = \frac{2(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 Q_1^2}{\alpha\beta T_1} \cdot \nu^2, \tag{15}$$

где $\nu = \frac{1}{2(\tau_1 + \tau_2)}$ — частота циклов преобразования $Q \to A$.

Если машина работает длительный промежуток времени, за который совершается n полных циклов преобразования $Q \to A$ (n — целое число), то суммарная работа машины A_Σ равна

$$A_\Sigma = An = \text{const} \cdot \nu n. \tag{16}$$

В соответствии с основным термодинамическим тождеством количество теплоты Q полностью преобразуется в механическую работу A в процессе изотермического расширения газа. Следовательно, отношение Q_1/τ_1 можно интерпретировать двояким способом. Во-первых, $Q_1/\tau_1 = q_1$, как это следует из формулы (3). Во-вторых, $Q_1/\tau_1 = A_1/\tau_1 = \overline{N}^t$, где A_1 — работа расширения газа, а $\overline{N}^t$ — средняя во времени мощность, развиваемая силами, действующими на поршень машины Карно при изотермическом расширении газа.

Потребуем, чтобы рассматриваемая машина — идеальный преобразователь $Q_1 \to A$ — обладала бесконечно малой дисперсией мощности: $(DN)^2 \to 0$.

В пределе $(DN)^2 = 0$, откуда следует

$$(\overline{N}^t) = (\overline{N^2})^t. \tag{17}$$

Учитывая (17), перепишем формулу (15):

$$\overline{P}^t = a(\overline{N^2})^t, \tag{18}$$

где

$$a = \frac{2(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 \tau_1^2}{\alpha\beta T_1} \cdot \nu^2.$$

Пусть F_m — реальная сила, действующая на поршень машины, а z' — мгновенная скорость поршня. Используя определенные мощности, найдем второе представление $\overline{P}^t$:

$$\overline{P}^t = \frac{1}{t} \int_0^t F_m \cdot z' dt. \tag{19}$$

Исключая $\overline{P}^t$ из (18) и (19), получим интегральное уравнение для F_m.

---

*) В дальнейшем не будем повторять, что рассматривается машина, производящая максимальную мощность, и опустим индексы «max» у A и P.

Итак, теорема существования F_m доказана. Ближайшая задача исследования — выяснение свойств этой силы.

§ 2. Движущая сила машины Карно, работающей при максимальном производстве мощности

1°. Модель рабочего вещества. Идеальный газ, являющийся рабочим веществом машины, можно считать состоящим из материальных точек, взаимодействующих по законам классической механики, или из бесконечно малых объемов, подчиняющихся уравнениям механики сплошных сред. В настоящей работе выбрана модель материальных точек.

Рассмотрим систему, состоящую из $\mathcal{N}$ молекул (для определенности положим $\mathcal{N}_A$, где $\mathcal{N}_A$ — число Авогадро), занимающих в начальный момент времени объем V. Поверхность S ограничивает этот объем. Силу $\vec{\mathcal{F}}_k$, действующую на произвольно выбранную k-ю молекулу, представим в виде суммы

$$\vec{\mathcal{F}}_k = \vec{\mathcal{F}}_{k,e} + \vec{\mathcal{F}}_{k,i}, \tag{20}$$

где $\vec{\mathcal{F}}_{k,e}$ — внешняя сила, характеризующая воздействие внешних (по отношению к рассматриваемой системе) тел на k-ю молекулу, $\vec{\mathcal{F}}_{k,i}$ — внутренняя сила, обусловленная взаимодействием k-й молекулы газа со всеми оставшимися.

Будем предполагать, что действие сил $\vec{\mathcal{F}}_{k,e}$ сводится к внешнему гидростатическому давлению p_e на поверхности S.

Обычное допущение о центральном характере внутренних межмолекулярных сил не ограничивает общности полученных ниже результатов.

2°. Теорема вириала. 1. Введем в рассмотрение декартову систему координат с центром в центре масс системы и запишем уравнения движения для каждой k-й молекулы газа:

$$m_k \mathbf{r}_k'' = \vec{\mathcal{F}}_{k,e} + \vec{\mathcal{F}}_{k,i}, \tag{21}$$

где k пробегает все значения от 1 до $\mathcal{N}_A$, m_k — масса k-й молекулы, штрих обозначает дифференцирование по времени t. Умножим обе части каждого уравнения (21) скалярно на $\mathbf{r}_k$, перегруппируем члены в соответствии с тождеством $(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')' = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'') + v^2$ $(\mathbf{v} \equiv \mathbf{r}')$ и проведем суммирование всех уравнений (21). В результате этих операций получим

$$\frac{1}{4}\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{Sp}\,(I) = B_e + B_i + 2\mathrm{T}, \tag{22}$$

где $\mathrm{Sp}\,(I)$ — след матрицы, составленной из коэффициентов тензора момента инерции системы, $B_e = (\mathbf{r}_k \cdot \vec{\mathcal{F}}_{k,e})$ — вириал внешних сил, действующих на систему, $B_i = (\mathbf{r}_k \cdot \vec{\mathcal{F}}_{k,i})$ — вириал внутренних сил системы, T — суммарная кинетическая энергия поступательного движения молекул системы. В выражениях для B_e и B_i по повторяющимся индексам «k» проводится суммирование*). Введенные здесь вириалы отли-

*) Это обстоятельство нелишне напомнить хотя бы потому, что в левой части (21) суммирования нет.

чаются от традиционных вириалов Клаузиуса [3] тем, что вириальные суммы не усреднены во времени.

2. Проведем расчет B_e. В соответствии с выбранной моделью действие сил $\vec{\mathcal{F}}_{k,e}$ сводится к внешнему давлению на поверхность S. Выберем на этой поверхности малую площадку $d\sigma_k$. Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный $d\sigma_k$: вектор внешней нормали. Имеем для компонент векторов $\mathbf{r}_k(x_k, y_k, z_k)$ и $\vec{\mathcal{F}}_{k,e}(X_{k,e}, Y_{k,e}, Z_{k,e})$:

$$x_k = r_k \cos(\widehat{\mathbf{r}_k, \overrightarrow{0x}}), \tag{23}$$

$$X_{k,e} = -p_e \cos(\widehat{\mathbf{n}, \overrightarrow{0x}})\, d\sigma_k. \tag{24}$$

Для оставшихся компонент имеют место аналогичные формулы. Расписывая в проекциях (с учетом (23) и (24)) каждое скалярное произведение, входящее в B_e, найдем

$$B_e = -p_e \sum r_k \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{r}_k})\, d\sigma_k. \tag{25}$$

При вычислении суммы, входящей в (25), рассмотрим конус с вершиной в начале координат и с основанием $d\sigma_k$. Пусть h_k — высота этого конуса. Очевидно, объем конуса равен

$$\delta V_k = \frac{1}{3} h_k\, d\sigma_k,$$

где

$$h_k = r_k \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{r}_k}),$$

откуда следует

$$V = \frac{1}{3} \sum r_k \cos(\widehat{\mathbf{n}, r_k})\, d\sigma_k. \tag{26}$$

Из (25) и (26) получаем искомый вириал:

$$B_e = -3p_e V. \tag{27}$$

Вириал B_i легко конкретизируется в предположении о центральном характере межмолекулярных сил.

Итак, доказана следующая теорема вириала:

$$\frac{1}{4} \frac{d^2}{dt^2} \operatorname{Sp}(I) = -3p_e V + B_i + 2\mathrm{T}. \tag{28}$$

Рассмотрим ряд следствий, вытекающих из этой теоремы.

3. Если система находится в тепловом и механическом равновесии с окружающими телами, образующими термостат, то левая часть в (28) обращается в нуль. Действительно, момент инерции такой системы может меняться со временем только за счет флуктуаций плотности, которые в данной системе бесконечно малы.

Дополнительно предполагая, что $B_i=0$, конкретизируем в полном соответствии с опытом физический смысл абсолютной температуры T_0 и в качестве первого следствия из теоремы вириала (28) получим уравнение состояния идеального газа:

$$p_e V = (2/3)\,\mathrm{T} = RT_0. \tag{29}$$

Если $B_i \neq 0$, а $p_e = p_i$, то определим внутреннее давление в системе, находящейся в тепловом и механическом равновесии с термостатом, так:

$$p_i V = p_e V = \frac{1}{3} B_i + \frac{2}{3} \mathrm{T}. \tag{30}$$

Первый член правой части формулы (30) дает поправки к уравнению состояния, которые в настоящее время рассчитывают с использованием методов квантовой статистики. Из определения (30) и теоремы (28) получаем в качестве второго следствия теоремы вириала, что момент инерции системы (I) сохраняется.

Усредняя (28) по времени, получим теорему вириала в форме Клаузиуса.

Теорема вириала (28) значительно богаче по содержанию, нежели любое из ее следствий, выдаваемых за самое теорему вириала. Именно форма (28) позволяет решить основную задачу настоящего исследования.

3°. Движущая сила машины Карно. При движении поршня массой M в цилиндре машины Карно момент инерции газа становится функцией времени. Следовательно, пренебрегать левой частью (28) нельзя. Выбирая должным образом систему координат, рассчитаем

$$\mathrm{Sp}\,(I) = \mu \mathcal{R}^2 + \frac{\mu}{6} z^2, \tag{31}$$

где $z = z(t)$.

Сравнивая (28) с уравнением движения поршня и учитывая (30) и (31), видим, что в процессе изотермического расширения газа на поршень действует сила f_m такая, что

$$|f_m| = M \frac{(z')^2}{z}. \tag{32}$$

Мгновенная мощность, развиваемая этой силой, равна

$$N = M \frac{(z')^3}{z}. \tag{33}$$

В дальнейшем используем фактически ту же процедуру, которую применил Лоренц [4] к расчету силы лучистого трения, действующей на классический осциллятор.

Исключим $\overline{P^t}$ из (18) и (19), воспользуемся математическим определением (17) $\overline{N^{2t}}$, в которое подставим N из (33). В результате получим интегральное уравнение, выражающее движущую силу машины Карно F_m через посредство кинематических характеристик поршня:

$$\frac{1}{t} \int_0^t F_m z' \, dt = a M^2 \frac{1}{t} \int_0^t \frac{(z')^6}{z^2} \, dt. \tag{34}$$

Для того, чтобы F_m удовлетворяла уравнению (34), достаточно (не необходимо!) положить

$$(F_m)_1 = a M^2 \frac{(z')^5}{z^2}. \tag{35}$$

Формула (35) дает первое частное решение уравнения (34). Если к

(35) добавим произвольную функцию $\Phi(z)$, такую, что $\int_0^t \Phi(z)\,dt=0$, то получим первое множество решений уравнения (34):

$$(F_m)_{\mathrm{I}}^{*}=aM^2\frac{(z')^5}{z^2}+\Phi(z). \tag{35'}$$

Выполним в правой части уравнения (34) интегрирование по частям. Предположим, что внеинтегральный член ограничен. Тогда при $t\to\infty$ его можно опустить.

Итак, второе решение уравнения (34)

$$(F_m)_{\mathrm{II}}=5aM^2\frac{(z')^3z''}{z}, \tag{36}$$

$$(F_m)_{\mathrm{II}}^{*}=5aM^2\frac{(z')^3z''}{z}+\Psi(z), \tag{36'}$$

где $\Psi(z)$ — функция, аналогичная по своим свойствам функции $\Phi(z)$.

Формулы (35′) и (36′) определяют искомые движущие силы машины Карно, силы, с одной стороны, компенсирующие падение давления p_i в процессе изометрического расширения газа, а с другой стороны, сообщающие поршню положительное ускорение. Формулы (35) и (36) определяют «укороченные» силы F_m.

4°. Некоторые частные законы движения поршня машины. 1. Поставим в соответствие реальной машине Карно, производящей полезную работу A_Σ (16), некоторую эквивалентную машину. Пусть в этой машине $T_1—T_{10}$=const. Действие эквивалентной машины сводится к преобразованию непрерывно вводимой в машину теплоты Q в работу силы F_m, поднимающей поршень на высоту $z(t)$. Законы движения поршня $z(t)$ найдем, используя выражения (35) и (36) для укороченных сил F_m.

Зададим начальные условия задачи:

$$z|_{t=0}=z_0;\quad z'|_{t=0}=v_0.$$

Используем (35) для составления уравнения движения поршня. Имеем

$$z''=b\frac{(z')^5}{z^2}, \tag{37}$$

где $b=aM$.

Предположим, что $b\neq b(t)$. Используя стандартные замены:

$$z'=P, \tag{38}$$

$$z''=p\frac{dp}{dz}, \tag{39}$$

понизим порядок уравнения (37). Подставляя (38) и (39) в (37), получаем уравнение первого порядка:

$$z^2p\frac{dp}{dz}=bp^5. \tag{40}$$

Первое частное решение этого уравнения:

$$p=0;\qquad z=z_0. \tag{41}$$

Сократим (40) на p и проинтегрируем:

$$\frac{1}{3p^3}=\frac{b}{z}+C, \tag{42}$$

где C — постоянная интегрирования, определяемая начальными условиями задачи. Уравнение (42) легко интегрируется в элементарных функциях. Общее решение не приводится здесь из-за его громоздкости. Свойства этого решения таковы, что асимптотически при $t\to\infty$ имеем $z\to\infty$ и $z'\to\infty$, а следовательно, $C\to 0$. Полагая в (42) $C=0$ *) и интегрируя оставшееся простое уравнение повторно, найдем асимптотический ($t\to\infty$) закон движения $z(t)$:

$$z=z_0\left(1+\frac{t}{\tau_{\mathrm{I}}}\right)^{3/2}, \tag{43}$$

где $\tau_{\mathrm{I}}=1{,}5(3bz_0^2)^{1/3}$.

Решая уравнение движения поршня, находящегося под действием укороченной силы $(F_m)_{\mathrm{II}}$, получим еще два закона движения $z(t)$:

$$z_1=v_0t+z_0, \tag{44}$$

$$z_2=z_0\left(1+\frac{t}{\tau_{\mathrm{II}}}\right)^{3/2}, \tag{45}$$

где $\tau_{\mathrm{II}}=1{,}5(5bz_0^2)^{1/3}$.

Итак, под действием движущей силы F_m поршень эквивалентной машины Карно может покоиться (41), двигаться равномерно и прямолинейно (44) или в соответствии с одним из законов (43) или (45). Законы движения (41) и (44) должны получаться при исчезающе малой силе F_m, как это следует из первого закона ньютоновской механики.

Заметим, что если $\bar{N}^i=\mathrm{const}$, то $z'z''=\mathrm{const}$. Закон (43) — точное решение этого уравнения.

2. Закон (43) удается продемонстрировать на опыте. Автор использовал простую установку общего физического практикума: термостат — водяная «баня», в которой находится сосуд с воздухом, соединенный с U-образным манометром, нагреватель и устройство для постоянного перемешивания воды. В опытах температура в «бане» повышалась с постоянной скоростью 0,2 град/мин. Измерялась временная зависимость высоты $h(t)$ столбика спирта в манометре. На экспериментальной линейной зависимости $h(t)$ в девяти сериях опытов из одиннадцати проведенных удалось зафиксировать на временных интервалах в 2—5 мин закономерности типа (43) с постоянной времени в несколько минут. Таким образом, опыт подтверждает изложенные выше соображения о существовании F_m.

Заключение

Физические причины, ответственные за происхождение F_m, вызваны изотермическими возмущениями в расширяющемся газе. Микроскопическая теория такого рода возмущений и возможных неустойчивостей в процессе расширения — тема самостоятельного исследования.

Автор благодарит доц. П. С. Булкина за предоставление возможности провести опыты в руководимом им практикуме.

*) Можно добиться равенства $C=0$ соответствующим подбором начальных условий.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Карно Т. Размышления о движущей силе огня. М. 1923. [2] Curzon F. L., Ahlborn B.//Aber. J. Phys. 1975. 43. P. 22. [3] Умов Н. А. Механическая теория теплоты. М., 1895. [4] Лоренц Г. А. Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения. М., 1956.

Поступила в редакцию
25.02.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1993. Т. 34, № 2

УДК 539.12.01

РАССЕЯНИЕ НЕЙТРИНО НА ЭЛЕКТРОНЕ В ПОСТОЯННОМ ВНЕШНЕМ ПОЛЕ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

А. В. Борисов, М. Н. Нанаа *), И. М. Тернов

(кафедра теоретической физики)

В рамках стандартной модели электрослабых взаимодействий Вайнберга—Салама вычислено сечение рассеяния мюонного нейтрино на электроне в постоянном внешнем поле с учетом эффекта пропагатора промежуточного векторного бозона. Исследована зависимость сечения от инвариантных кинематического и динамического параметров, определяемых энергиями частиц и напряженностью внешнего поля.

Исследование нейтрин-лептонных процессов позволило уточнить структуру электрослабого взаимодействия [1], которая в этом случае не осложняется вкладом сильных взаимодействий (в отличие от нейтрин-адронных реакций). Указанные взаимодействия играют важную роль в астрофизических приложениях [2], где возникает также при определенных условиях (например, в магнитосфере пульсаров [3]), необходимость учитывать влияние сильных внешних полей. В последнее время активно исследуются процессы, сопровождающие прохождение частиц высоких энергий через монокристаллы, внутренние электрические поля которых намного превосходят обычные лабораторные значения [4]. В случае малых углов влета частицы в кристалл данный процесс эффективно сводится к процессу в постоянном внешнем поле [4], что открывает уникальную возможность проверки теории электрослабых взаимодействий в условиях сильных полей, которые ранее были достижимы только в космосе [3].

В настоящей работе рассматривается рассеяние мюонного нейтрино на электроне ($\nu_\mu+e\to\nu_\mu+e$) в постоянном скрещенном поле (напряженности электрического и магнитного полей равны по величине и ортогональны друг другу: $|\mathbf{E}|=|\mathbf{H}|$, $\mathbf{E}\perp\mathbf{H}$). Как известно [5], в случае ультрарелятивистских электронов скрещенное поле моделирует произвольное постоянное электромагнитное поле при условии, что его напряженность $B\ll B_0=m^2c^3/e\hbar=4{,}41\cdot10^{13}$ Гс.

Процесс νe-рассеяния уже исследовался ранее. В работах [6, 7] рассмотрено рассеяние нейтрино на электроне, находящемся в основном или слабовозбужденном состоянии в магнитном поле. В работе [8] изучен случай ультрарелятивистского электрона в магнитном поле $H\ll B_0$, когда движение электрона квазиклассично. В [9] получено общее выражение для вероятности процесса в постоянном скрещенном поле и приведены (в виде графиков) результаты его численного исследования. Во всех указанных работах [6—9] рассмотрение ограничено областью

*) Сирия.