

РАДИОФИЗИКА

УДК 538.573

**ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ ПРЕЛОМЛЕНИЯ  
СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ ОДНОМЕРНОЙ СРЕДЫ**

С. М. Голынский, В. Д. Гусев

(кафедра физики атмосферы и математической геофизики)

Введено новое определение эффективного показателя преломления случайно-неоднородной среды, который описывает волновое поле в этой среде. В рамках диффузионного приближения найдена одноточечная плотность вероятности эффективного показателя преломления, позволяющая вычислять его любые статистические характеристики. Получены условия применимости результатов для случая, когда неоднородности среды имеют конечный радиус корреляции.

Использование понятия эффективного показателя преломления неоднородной среды привело к существенному прогрессу в описании распространения электромагнитных волн в подобных средах [1, 2]. Настоящая работа посвящена определению этой физической величины и оценке ее статистических характеристик для случая распространения и рассеяния волн в случайно-неоднородной плоскослоистой среде.

Рассмотрим нормальное падение плоской монохроматической волны на одномерный случайно-неоднородный слой, расположенный в области  $0 < z < L$ . Диэлектрическая проницаемость среды внутри слоя имеет вид  $\epsilon(z) = 1 + \alpha \epsilon_1(z)$ , где  $\alpha$  — малый безразмерный параметр, характеризующий глубину флуктуаций ( $\alpha \sim \sigma_\epsilon = \sqrt{\langle \epsilon_1^2 \rangle}$ ), а  $\epsilon_1(z)$  — одномерный нормальный процесс, определяемый нулевым средним значением и корреляционной функцией  $K(z_1 - z_2)$ ,

$$\langle \epsilon_1(z) \rangle = 0, \quad K(z_1 - z_2) = \langle \epsilon_1(z_1) \epsilon_1(z_2) \rangle = \sigma_\epsilon^2 R(z_1 - z_2).$$

Здесь  $\sigma_\epsilon^2$  — дисперсия флуктуаций диэлектрической проницаемости среды, а угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций. Вне слоя для упрощения выкладок полагаем, что  $\epsilon(z) = 1$ . Внутри слоя волновое поле  $U(z)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$U''(z) + k^2 [1 + \alpha \epsilon_1(z)] U(z) = 0 \tag{1}$$

с соответствующими условиями непрерывности для самого поля  $U(z)$  и его производной  $U'(z)$  на обеих границах слоя. В уравнении (1) и в дальнейшем штрих показывает дифференцирование по переменной  $z$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны падающего излучения. Представляя решение уравнения (1) в виде бегущих волн [2, 3]:

$$U(z) = A(z) \exp\{\pm ik\Phi(z)\},$$

получим после его подстановки два уравнения, определяющие действительные амплитуду  $A$  и эйконал  $\Phi$  бегущих волн, а именно:

$$2A'\Phi' + A\Phi'' = 0, \tag{2}$$

$$A'' + k^2 [\epsilon - (\Phi')^2] = 0. \tag{3}$$

Уравнение переноса (2) устанавливает связь между искомыми функциями  $A$  и  $\Phi$ :

$$A = \text{const} (\Phi')^{-1/2}. \quad (4)$$

По аналогии с работой [2] используем уравнение (3) для введения эффективного показателя преломления  $m = m(z)$  рассматриваемой среды. Для этого полагаем, что уравнение (3) тождественно обобщенному уравнению эйконала

$$(\Phi')^2 = m^2. \quad (5)$$

При учете соотношения (4) немедленно приходим к выводу, что уравнения (3) и (5) действительно тождественны, если эффективный показатель преломления  $m$  удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$2mm'' - 3(m')^2 + 4k^2m^4 - 4k^2\epsilon m^2 = 0. \quad (6)$$

В основе модифицированного метода бегущих волн [3] лежит представление общего решения исходного уравнения Гельмгольца (1) в виде суммы двух линейно независимых волн, не взаимодействующих друг с другом и распространяющихся в противоположных направлениях:

$$U(z) = C_1 m^{-1/2} \exp\{ik\Phi\} + C_2 m^{-1/2} \exp\{-ik\Phi\}, \quad (7)$$

$$\Phi(z) = \int_0^z m(\xi) d\xi,$$

где приняты во внимание соотношения (4) и (5), а  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования, определяемые граничными условиями.

Таким образом, для описания волнового поля  $U(z)$  (7) и его статистических характеристик как внутри слоя, так и вне его, необходимо исследовать распределение единственной неизвестной функции — эффективного показателя преломления среды  $m(z)$ , являющегося решением уравнения (6), которое следует дополнить начальными условиями  $m(z=0) = m_0$  и  $m'(z=0) = m'_0$  на нижней границе слоя  $z=0$ . Для выбора начальных условий воспользуемся следующими физическими рассуждениями. Очевидно, что в предельном случае распространения в однородной среде ( $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\epsilon(z) = 1$ ) эффективный показатель преломления должен совпадать с локальным показателем преломления среды, т. е.  $m \equiv 1$ , при этом формула (7) переходит в известное решение уравнения Гельмгольца для однородной среды. Из анализа общего решения дифференциального уравнения (6) для случая  $\epsilon = 1$  вытекает, что эффективный показатель преломления тождественно равен единице только при выборе начальных условий в виде

$$m(z=0) = m_0 = 1, \quad m'(z=0) = m'_0 = 0. \quad (8)$$

Начальные условия (8) будут использованы для нахождения частного решения уравнения (6) для рассматриваемого случая распространения волны в случайно-неоднородной среде. В то же время для решения (6) целесообразно перейти к новой функции  $\theta(z) = m^{-1}(z)$ , которая при учете (6) и (8) удовлетворяет уравнению

$$2\theta\theta'' - (\theta')^2 + 4k^2\epsilon\theta^2 - 4k^2 = 0, \quad (9)$$

$$\theta(z=0) = 1, \quad \theta'(z=0) = 0.$$

Формальное решение уравнения (9) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \theta &= u + \sqrt{u^2 - 1} \cos \psi, \\ \theta' &= -2k \sqrt{u^2 - 1} \sin \psi, \end{aligned} \quad (10)$$

где две новые функции  $u = u(z)$  и  $\psi = \psi(z)$  описываются системой двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} u' &= \alpha k \varepsilon_1 \sqrt{u^2 - 1} \sin \psi, & u(z=0) &= 1, \\ \psi' &= 2k + \alpha k \varepsilon_1 \left[ 1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} \cos \psi \right], & \psi(z=0) &= \psi_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Система уравнений (11) была получена в ряде работ (напр., [4, 5]) на основании различных подходов. Это система стохастических дифференциальных уравнений, которая может быть использована для перехода к марковскому диффузионному приближению, а именно для вывода уравнения Фоккера—Планка (УФП), определяющего одноточечную плотность вероятности  $P_2(u, \psi, z)$ .

В отличие от хорошо исследованного случая  $\delta$ -коррелированного случайного поля [5] в настоящей работе рассмотрим более общую модель, когда  $\varepsilon_1(z)$  — одномерный случайный процесс с конечным, но достаточно малым радиусом корреляции  $r = a$  ( $a$  — характерный масштаб неоднородностей среды в  $z$ -направлении) [6, 7].

Вводя двумерный вектор  $v = \{u, \psi\}$  и разделяя в правой части системы (11) детерминированные и флуктуационные члены:

$$F_0 = \{0, 2k\}, \quad F_1 = \left\{ k\varepsilon_1 \sqrt{u^2 - 1} \sin \psi, \quad k\varepsilon_1 \left[ 1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} \cos \psi \right] \right\}, \quad (12)$$

преобразуем (11) к стандартной форме стохастического дифференциального уравнения:

$$v' = F_0 + \alpha F_1(v, z). \quad (13)$$

Соответствующее (13) УФП, полученное в результате применения метода Ван Кампена [7], имеет вид (по повторяющимся индексам  $\nu, \mu = u, \psi$  предполагается суммирование)

$$\frac{\partial P_2(v, z)}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial v_\nu} \{ B_\nu(v) P_2(v, z) \} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_\nu \partial v_\mu} \{ B_{\nu\mu}(v) P_2(v, z) \}, \quad (14)$$

где коэффициенты сноса  $B_\nu(v)$  и локальных дисперсий  $B_{\nu\mu}(v)$  при учете (12) определяются выражениями

$$\begin{aligned} B_\nu(v) &= F_{0\nu} + \chi^2 \int_0^\infty \left\langle \frac{\partial F_{1\nu}(v, z)}{\partial v_\mu} \cdot F_{1\mu}(v, z - \xi) \right\rangle d\xi, \\ B_{\nu\mu}(v) &= 2\chi^2 \int_0^\infty \langle F_{1\nu}(v, z) F_{1\mu}(v, z - \xi) \rangle d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

Отметим также, что в процессе вывода УФП (14) учитывалось, что

$$\langle F_{1\nu}(v, z) F_{1\mu}(v, z - \xi) \rangle \approx 0 \text{ при } \xi \gg a.$$

В общем случае коэффициенты УФП (14) достаточно громоздки, а решение самого уравнения затруднительно даже для предельных про-

стейших случаев. Однако ситуация существенно упрощается, если учесть, что в рассматриваемом случае малых флуктуаций диэлектрической проницаемости среды ( $\alpha \ll 1$ ) переменная  $\psi(z)$  имеет структуру

$$\psi(z) = 2kz + \varphi(z) + \psi_0,$$

причем согласно (11) статистические характеристики функций  $u(z)$  и  $\varphi(z)$  медленно меняются на расстояниях порядка длины волны  $\lambda$ , в то время как в правой части системы уравнений (11) имеются быстро меняющиеся функции. Поэтому для определения медленных изменений статистических характеристик излучения можно усреднить УФП (14) по периоду быстрых осцилляций [5]. После такого усреднения коэффициенты УФП (15) не будут зависеть от переменной  $\psi$ , т. е. становится возможным проинтегрировать уравнение по этой переменной. В итоге приходим к хорошо исследованному одномерному УФП для плотности вероятности  $P(u, z)$  [4, 5]:

$$\frac{\partial P(u, z)}{\partial z} = D \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial P(u, z)}{\partial u}, \quad (16)$$

где новая величина  $D$ , играющая роль коэффициента диффузии, определяется выражением

$$D = \frac{k^2}{2} \int_0^{\infty} K(\zeta) \cos 2k\zeta d\zeta. \quad (17)$$

В частном случае гауссовой функции корреляции случайного поля  $\epsilon_1(z)$ , когда  $K(\zeta) = \sigma_e^2 \exp\{-\zeta^2/a^2\}$ , этот коэффициент имеет вид

$$D = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sigma_e^2 k^2 a \exp\{-(ka)^2\}. \quad (18)$$

При выводе УФП (14) произведено разложение по новому малому параметру  $\chi = a/\Lambda$ , где  $\Lambda = (ak)^{-1}$  характеризует масштаб изменений функций  $u(z)$  и  $\varphi(z)$ . Если  $\chi \ll 1$ , т. е.

$$\sigma_e(ka) \ll 1, \quad (19)$$

то можно разделить толщину слоя  $L$  на подынтервалы  $\Delta z$  такие, что  $\Delta z \gg a$  и в то же время  $\Delta z \ll \Lambda$ . Это означает, что на подынтервале  $\Delta z$  функции  $u(z)$  и  $\varphi(z)$  практически не меняются, в то время как случайный процесс  $\epsilon_1(z)$  полностью забывает свое прошлое. Собирая эти неравенства вместе:

$$L \gg \Lambda \gg \Delta z \gg a, \quad (20)$$

в результате приходим к обычному в теории марковских диффузионных процессов условию двухмасштабности задачи [6, 7]. Неравенства (19) и (20) определяют границы применимости полученного УФП (14) и соответственно (16), т. е. по грубой пространственной шкале, характеризующей подынтервалом  $\Delta z$ , исследуемый процесс можно приближенно считать процессом Маркова.

Решение УФП (16) при учете в соответствии с (11) начального условия  $P(u, 0) = \delta(u-1)$  представимо в виде [5]

$$P(u, t) = \int_0^{\infty} \mu \operatorname{th}(\mu t) \exp\left\{-\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)t\right\} \mathcal{P}_{-1/2+i\mu}(u) d\mu, \quad (21)$$

где введена новая безразмерная переменная

$$t = Dz, \quad (22)$$

а  $\mathcal{P}_{-1/2+i\mu}(u)$  — функция Лежандра первого рода (функция конуса).

Решение (21) можно использовать для исследования статистических характеристик усредненного эффективного показателя преломления среды  $m_y(z)$ , который после выполнения усреднения по быстрым осцилляциям в выражении для функции  $\theta(z)$  (10) определим соотношением

$$m_y(z) = [u(z)]^{-1}. \quad (23)$$

Из формул (21) и (23) получим выражение для одноточечной плотности вероятности

$$V(m_y, t) = m_y^{-2} \int_0^{\infty} \mu \operatorname{th}(\mu\pi) \exp\left\{-\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)t\right\} \mathcal{P}_{-1/2+i\mu}(m_y^{-1}) d\mu, \quad (24)$$

которая по аналогии с [8] может быть использована для вычисления среднего значения произвольной функции, зависящей от усредненного эффективного показателя преломления  $m_y$ , а именно:

$$\begin{aligned} \langle H(m_y) \rangle &= \int_0^1 H(m_y) V(m_y, t) dm_y = \\ &= \frac{\exp\{-t/4\}}{2\sqrt{2\pi}t^{3/2}} \int_0^{\infty} \omega \exp\left\{-\frac{\omega^2}{4t}\right\} \left[ \int_{\operatorname{ch}^{-1}\omega}^1 H(m_y) \frac{m_y^{-3/2} dm_y}{(m_y \operatorname{ch} \omega - 1)^{1/2}} \right] d\omega. \end{aligned} \quad (25)$$

С помощью формулы (25) можно вычислить любые статистические характеристики усредненного эффективного показателя преломления среды  $m_y$  (23), а следовательно, и одноточечные статистические характеристики волнового поля (7).

Полагая в простейшем случае  $H(m_y) = 1$ , убеждаемся, что плотность вероятности  $V(m_y, t)$  удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^1 V(m_y, t) dm_y = 1.$$

В качестве примера применения основной формулы (25) приведем два выражения, сравнение которых позволяет оценить степень информативности введенного эффективного показателя преломления среды. Первое из них — это среднее значение усредненного эффективного показателя преломления:

$$1. H(m_y) = m_y,$$

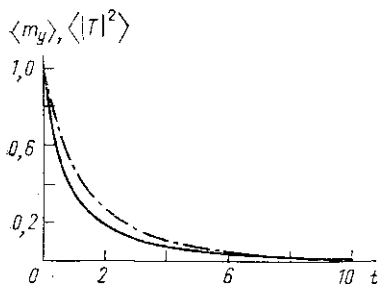
$$\begin{aligned} \langle m_y \rangle &= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp\{-t/4\} \int_0^{\infty} \frac{x \exp\{-x^2\}}{\sqrt{\operatorname{ch}(2x\sqrt{t})}} \ln \left[ \sqrt{\operatorname{ch}(2x\sqrt{t})} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\operatorname{ch}(2x\sqrt{t}) - 1} \right] dx, \end{aligned} \quad (26)$$

а второе — энергетический коэффициент прозрачности слоя (средний квадрат модуля коэффициента прохождения через слой) [4]:

$$2. H(m_y) = \frac{2m_y}{1+m_y}.$$

$$\langle |T|^2 \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp\{-t/4\} \int_0^{\infty} x^2 \exp\{-x^2\} \operatorname{ch}^{-1}(x\sqrt{t}) dx. \quad (27)$$

Графики величин, определяемых формулами (26) и (27), в зависимости от параметра  $t=DL$  приведены на рисунке. Сравнение этих кривых позволяет сделать вывод о том, что среднее значение  $\langle m_y \rangle$



(сплошная линия) дает правильное качественное описание процесса рассеяния излучения внутри слоя. Уменьшение среднего значения эффективного показателя преломления  $\langle m_y \rangle$  соответствует увеличению интенсивности обратного рассеяния от случайных неоднородностей (уменьшению энергетического коэффициента прозрачности слоя ( $\langle |T|^2 \rangle$ )).

В заключение подчеркнем, что границы применимости полученных результатов определяются неравенствами (19) и (20), т. е. существенно зависят от соотношения между толщиной слоя  $L$ , длиной волны падающего излучения  $\lambda$ , радиусом корреляции рассеивающих неоднородностей  $a$  и их «интенсивностью»  $\sigma_e$ . В частности, когда  $\sigma_e \ll 1$ , результаты могут быть справедливы и при выполнении неравенства  $ka \gg 1$ , которое для неоднородной среды, как правило, является достаточным условием применимости приближения геометрической оптики (ВКБ-метода). Однако для исследуемого случая распространения излучения в случайно-неоднородной среде использование геометрооптического подхода связано с необходимостью выполнения дополнительного условия, а именно:  $t=DL \ll \sigma_e^2/8$  [9]. Следовательно, для рассматриваемой задачи даже для случая крупномасштабных неоднородностей ( $ka \gg 1$ ) область применимости приближения геометрической оптики занимает весьма узкий интервал, в пределах которого эффективный показатель преломления  $m(z)$  совпадает с локальным показателем преломления среды  $n(z) = \sqrt{\varepsilon(z)}$ , а среднее значение  $\langle m_y \rangle$  практически постоянно и близко к единице.

Таким образом, эффективный показатель преломления неоднородной среды  $m(z)$  (5) однозначно определяет волновое поле (7) в этой среде независимо от масштаба и «интенсивности» случайных неоднородностей. При этом необходимо подчеркнуть, что представление волнового поля в виде бегущих волн (7) является точным решением исходного уравнения Гельмгольца (1). Если же точное решение выразить через локальный показатель преломления среды  $n(z)$ , то оно имеет вид асимптотического ряда по обратным степеням безразмерного параметра  $ka$  ( $ka > 1$ ). Первый член ряда определяет решение в нулевом приближении геометрической оптики, которое, как уже было указано, имеет очень ограниченную область применимости для рассматриваемой задачи, т. е. необходимо учитывать следующие члены разложения. В результате во многих приложениях переход к описанию поля с помощью эффективного показателя преломления среды обладает несомненными преимуществами. В частности, найденное в работе выражение для плотности вероятности  $V(m_y, z)$  (24) усредненного эффективного показате-

ля преломления  $n_y(z)$  (23) и формула (25) дают возможность вычислять произвольные односточечные статистические характеристики этой случайной величины, а следовательно, и волнового поля как внутри случайно-неоднородного слоя, так и вне его.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лифшиц И. М., Каганов М. И., Цукерник В. М.//Ученые записки ХГУ. 1950. 2, № 1. С. 49. [2] Виноградова М. Б., Гусев В. Д.//Радиотехн. и электроника. 1974. 19, № 3. С. 481. [3] Golynski S. M., Gusev V. D.//Phys. Lett. 1991. 154A, N 3, 4. P. 145. [4] Paranicolaou G. C.//SIAM J. Appl. Math. 1971. 21, N 1. P. 13. [5] Кляцкин В. И. Метод погружения в теории распространения волн. М., 1989. [6] Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., 1961. [7] Ван Кампен Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии. М., 1990. [8] Morrison J. A., Paranicolaou G. C., Keller J. V.//Comm. Pure and Appl. Math. 1971. 24, N 4. P. 473. [9] Гусев В. Д., Голынский С. М.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1990. 31, № 5. С. 90.

Поступила в редакцию  
25.11.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1993. Т. 34, № 2

## ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

УДК 535.375.5:621.375.8

### ОБРАТНОЕ ВЫНУЖДЕННОЕ КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ В РЕЖИМЕ КОМПРЕССИИ ИМПУЛЬСА: ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

С. Ю. Никитин, Д. А. Сивашов

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Проведено численное моделирование компрессии лазерных импульсов на основе процесса обратного вынужденного комбинационного рассеяния. Изучена зависимость компрессии от энергии и длительности импульса накачки, времени дефазировки молекулярных колебаний, длины кюветы с комбинационно-активной средой и условий фокусировки пучка накачки. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными по ВКР в водороде.

### Введение

Явление компрессии (сжатия) световых импульсов при обратном вынужденном комбинационном рассеянии (ОВКР), открытое в 1966 г. [1], привлекает внимание в связи с тем, что на его основе возможно создание устройств, многократно повышающих мощность лазерного излучения.

Физику компрессии можно пояснить следующим образом. При комбинационном взаимодействии встречных световых волн отсутствует обычный механизм ограничения интенсивности стоксова излучения, присущий попутному ВКР и выражаемый соотношением  $I_p + (\omega_p/\omega_s)I_s = \text{const}$ . Вместо этого действует закон сохранения энергии и экспоненциальный закон усиления обратной стоксовой волны:  $I_s = I_{s0} \exp\{gI_p L\}$  в «заданном» поле встречной волны накачки. Если удается обеспечить существование поля накачки на достаточно длинном отрезке комбинационно-активной среды, то создаются условия, при которых интенсивность обратного стоксова излучения может многократно превысить интенсивность волны накачки. При этом длительность генерируемого