ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1993. Т. 34, № 2

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В НЕОДНОРОДНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Г. Н. Медведев, Б. И. Моргунов

(кафедра математики)

Изучаются колебания в неоднородной вязкоупругой среде, характеризующейся нелинейными физическими свойствами, быстро изменяющимися в одном направлении. Процедура осреднения применяется для расчета задачи виброзащиты.

В работе [1] рассматривалась задача о распространении колебаний в неоднородной вязкоупругой среде с периодически изменяющимися свойствами. Общая методика исследования динамических процессов в вязкоупругих средах со свойствами, быстро изменяющимися в некотором фиксированном направлении (направлении стратификации), содержится в работе [2].

Данная статья продолжает исследования, выполненные в [1] и [2]. Описанная в [2] процедура осреднения применяется для расчета модельной задачи виброзащиты, решенной в [1] в линейной постановке.

В настоящей статье изучаются колебания в неоднородной среде, характеризующейся нелинейными физическими свойствами. Быстрое изменение характеристик среды по координате x учитывается введением быстрой переменной $\xi=x/\varepsilon$, $\varepsilon\ll1$.

Задача виброзащиты для вязкоупругого слоя, моделирующего амортизирующее устройство, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\breve{K}\left(\xi,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon\right)\right]=\rho(\xi)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\breve{K}\left(\xi,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon\right)=\alpha(\xi)\,\frac{\partial u}{\partial x}-\varepsilon\beta(\xi)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3-\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{t}A(\xi,\ t-\tau)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,\ \tau)\,d\tau,$$

$$u]_{x=0}=C\cos\omega t,\quad M\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{x=l}=$$

$$=-\left(k\,\frac{\partial u}{\partial x}-\varepsilon b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3-\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{t}\varkappa(t-\tau)\,\frac{\partial u}{\partial x}\,d\tau\right)_{x=l}, \tag{2}$$

M — масса твердого тела, жестко закрепленного на конце $x=l$ слоя. Уравнение (1) отличается от рассмотренного в [1] тем, что $\breve{K}$ нелинейно зависит от $\partial u/\partial x$.

Для асимптотического решения (1), (2) преобразуем сначала (1) к системе уравнений первого порядка, введя новую функцию $v=\breve{K}(\xi,\ \partial u/\partial x,\ \varepsilon)$. Получим

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=\alpha^{-1}(\xi)\,v(x,\ t)+\varepsilon\alpha^{-1}(\xi)\int\limits_{-\infty}^{t}A(\xi,\ t-\tau)\,\frac{\partial u}{\partial x}\,d\tau+\varepsilon\frac{\beta(\xi)}{\alpha(\xi)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3,\\ &\frac{\partial v}{\partial x}=\rho(\xi)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.\end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим асимптотическое преобразование переменных u и v, использующее идею осреднения [3]:

$$\begin{aligned}&u=u_0(x,\ t)+\varepsilon u_1(x,\ t)+\varepsilon U_1(x,\ t,\ \xi)+\varepsilon^2 U_2(x,\ t,\ \xi)+\ldots,\\ &v=v_0(x,\ t)+\varepsilon v_1(x,\ t)+\varepsilon V_1(x,\ t,\ \xi)+\varepsilon^2 V_2(x,\ t,\ \xi)+\ldots.\end{aligned} \tag{4}$$

Подставляя преобразование (4) в систему (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем рекуррентную систему для определения коэффициентов преобразования (4). Для членов порядка ε^0 имеем

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial \xi} = \frac{1}{\alpha} v_0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial \xi} = \rho \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}. \tag{5}$$

Приравнивая друг другу не зависящие от ξ слагаемые, приходим к осредненной системе уравнений относительно u_0 и v_0:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \langle \alpha^{-1} \rangle v_0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial x} = \langle \rho \rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2},$$

эквивалентной уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\widehat{\alpha} \frac{\partial u_0}{\partial x}\right] - \langle \rho \rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0. \tag{6}$$

Здесь использованы обозначения $\langle \varphi(\xi) \rangle = \int \varphi(\xi)\, d\xi$, $\widehat{\varphi} = \langle \varphi^{-1} \rangle^{-1}$. С учетом граничных условий для $u_0(x)$

$$u_0(0, t) = C \cos \omega t, \quad M \frac{\partial^2 u_0(l, t)}{\partial t^2} = -\alpha \frac{\partial u_0(l, t)}{\partial x} \tag{7}$$

периодическое решение $u_0(x, t)$ уравнения (6) с условиями (7) имеет вид

$$u_0(x, t) = y(x) \cos \omega t, \quad y(x) = C \cos \Omega x + D \sin \Omega x, \tag{8}$$

где

$$\Omega = \frac{\langle \rho \rangle \omega^2}{\widehat{\alpha}}, \quad D = C \frac{\alpha \Omega \sin \Omega l + M \omega^2 \cos \Omega l}{\alpha \Omega \cos \Omega l - M \omega^2 \sin \Omega l}.$$

Приравнивая в (5) зависящие от ξ слагаемые, получаем формулы для определения быстрых поправок U_1 и V_1:

$$U_1 = \widetilde{\widehat{\alpha}\alpha^{-1}} \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad V_1 = \widetilde{\rho} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}. \tag{9}$$

Здесь использованы обозначения

$$\widetilde{\varphi}(\xi) = \int \{\varphi(\xi)\}\, d\xi - \left\langle \int \{\varphi(\xi)\}\, d\xi \right\rangle, \quad \{\varphi(\xi)\} = \varphi(\xi) - \langle \varphi(\xi) \rangle.$$

Для учета вязкости и нелинейности необходимо рассмотреть члены порядка ε^1. В них ограничимся уравнениями для медленных поправок u_1 и v_1, получающимися приравниванием членов порядка ε, не зависящих от ξ:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \langle \alpha^{-1} \rangle v_1 + \langle \alpha^{-1} V_1 \rangle + \langle \beta \alpha^{-4} \rangle v_0^3 + \int_{-\infty}^{t} \langle \alpha^{-2} A \rangle v_0\, d\tau,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \langle \rho \rangle \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \widehat{\alpha} \langle \rho \widetilde{\alpha^{-1}} \rangle \frac{\partial^3 u_0}{\partial x\, \partial t^2}.$$

Учитывая $v_0 = \widehat{\alpha} \partial u_0 / \partial x$, $V_1 = \widetilde{\rho} \partial^2 u_0 / \partial t^2$ и исключая v_1, находим уравнение для u_1:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\widehat{\alpha} \frac{\partial u_1}{\partial x}\right] - \langle \rho \rangle \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \widehat{\alpha} \langle \rho \widetilde{\alpha^{-1}} + \alpha^{-1} \widetilde{\rho} \rangle \frac{\partial^3 u_0}{\partial x\, \partial t^2} +$$

$$+ 3\widehat{\alpha}^4 \langle \beta \alpha^{-4} \rangle \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \widehat{\alpha}^2 \int_{-\infty}^{t} \langle \alpha^{-2} A \rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\, d\tau \tag{10}$$

с граничными условиями

$$u_1(0,\ t)=0,\quad M\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\bigg|_{x=l}=-\left(k\frac{\partial u_1}{\partial x}-b\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^3-\int\limits_{-\infty}^{t}\varkappa(t-\tau)\frac{\partial u_0}{\partial x}d\tau\right)_{x=}. \tag{11}$$

Учитывая вид (8) функции $u_0(x,\ t)$, приводим (10) и (11) к виду

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=-f(x,\ t),\quad a^2=\widehat{\alpha}\langle\rho\rangle^{-1},\\ u_1(0,\ t)=0,\quad\left(M\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+k\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)_{x=l}=K_1\cos\omega t+K_1^*\sin\omega t+K_3\cos 3\omega t,\end{gathered} \tag{12}$$

где

$$f(x,\ t)=f_1(x)\cos\omega t+f_1^*(x)\sin\omega t+f_3(x)\cos 3\omega t,$$

$$f_1(x)=\langle\rho\rangle^{-1}\left[\widehat{\alpha}\langle\rho\widetilde{\alpha}^{-1}+\alpha^{-1}\widetilde{\rho}\rangle\omega^2 y'(x)+\frac{9}{4}\widehat{\alpha}^4\langle\beta\alpha^{-4}\rangle(y'(x))^2y''(x)+\right.$$

$$\left.+\widehat{\alpha}\int\limits_0^\infty\langle\alpha^{-2}A(\theta)\rangle\cos\omega\theta\,d\theta\cdot y''(x)\right],$$

$$f_1^*(x)=\langle\rho\rangle^{-1}\int\limits_0^\infty\langle\alpha^{-2}A(\theta)\rangle\sin\omega\theta\,d\theta\cdot y''(x),$$

$$f_3(x)=\frac{3}{4}\langle\rho\rangle^{-1}\widehat{\alpha}^4\langle\beta\alpha^{-4}\rangle(y'(x))^2y''(x),$$

$$K_1=y'(l)\int\limits_0^\infty\varkappa(\theta)\cos\omega\theta\,d\theta+\frac{3}{4}by'^3(l),\qquad K_1^*=y'(l)\int\limits_0^\infty\varkappa(\theta)\sin\omega\theta\,d\theta,$$

$$K_3=\frac{b}{4}y'^3(l).$$

Решение задачи (12) ищем в виде

$$u_1(x,\ t)=V(x,\ t)+x(A\cos\omega t+B\sin\omega t)+C\cos 3\omega t.$$

Из граничных условий $A=\dfrac{K_1}{k-Ml\omega^2},\quad B=\dfrac{K_1^*}{k-Ml\omega^2},\quad C=\dfrac{K_3}{k-Ml\omega^2}$.

Функцию $V(x,\ t)$ ищем в виде $V=y_1(x)\cos\omega t+y_1^*\sin\omega t+y_3\cos 3\omega t$. Для $y_1(x)$, $y_1^*(x)$ и $y_3(x)$ получаются неоднородные уравнения второго порядка с однородными граничными условиями.

Например, $y_1(x)$ имеет вид

$$y_1(x)=D_1\sin\Omega x-\frac{\Omega}{\omega^2}\int\limits_0^x\sin\Omega(x-\xi)\left(f_1(\xi)+\frac{K_1\xi\omega^2}{k-Ml\omega^2}\right)d\xi,$$

где D_1 определяется из уравнения

$$M\omega^2\left[D_1\sin\Omega l-\frac{\Omega}{\omega^2}\int\limits_0^l\sin\Omega(l-x)\left(f_1(x)+\frac{K_1x\omega^2}{k-Ml\omega^2}\right)dx\right]=$$

$$=k\left[D_1\Omega\cos\Omega l-\frac{\Omega}{\omega^2}\int\limits_0^l\cos\Omega(l-x)\left(f_1(x)+\frac{K_1x\omega^2}{k-Ml\omega^2}\right)dx\right].$$

Функции y_1^* и y_3 имеют сходную структуру.

Оценка погрешности построенного решения выполняется по описанной в [2] методике. Если в (4) ограничиться членами порядка ε включительно, то приближенное решение (4) удовлетворяет (3) с невязкой порядка ε. Решение (5) удовлетворяет (3) с невязкой, малой в среднем.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Медведев Г. Н., Моргунов Б. И.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1989. 30, № 4. С. 78. [2] Медведев Г. Н., Моргунов Б. И.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991, 32, № 1. С. 82. [3] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М., 1984.

Поступила в редакцию
06.05.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1993. Т. 34, № 2

УДК 621.372.2

СИНТЕЗ ПЛОСКОГО ВОЛНОВОДНОГО ПЕРЕХОДА

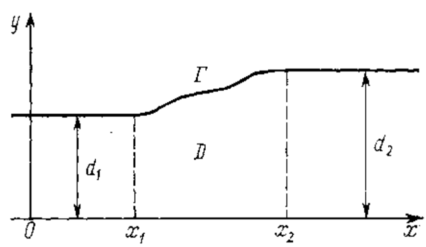
А. Н. Боголюбов, Д. В. Минаев

(кафедра математики)

Предложен алгоритм решения задачи синтеза волноводного перехода между двумя плоскими однородными волноводами.

В последнее время все большее значение в системах передачи, хранения и обработки информации приобретают согласующие элементы. В частности, разработка таких волноводных элементов может дать возможность создания волноведущих трактов с качественно улучшенными характеристиками. Особое значение при этом имеет создание эффективных алгоритмов численного решения задачи синтеза волноводных согласующих элементов.

Рассмотрим задачу синтеза плавного согласующего перехода между двумя плоскими регулярными волноводами с однородным диэлектрическим заполнением и вещественной диэлектрической проницаемостью (рисунок). Как известно, для того, чтобы найти распределение электромагнитного поля в такой системе, достаточно решить задачу для двумерного уравнения Гельмгольца с заданными граничными условиями. Пусть диаметры левого и правого волноводов равны соответственно d_1 и d_2. Через Г обозначим верхнюю границу волноводного перехода. Предположим, что боковые стенки регулярных волноводов и волноводного перехода являются идеально проводящими. На вход волновода подается сигнал, соответствующий его основной моде. Для ограничения области вдоль оси x воспользуемся парциальными условиями излучения [1]. Полученную ограниченную область обозначим через D. Временную зависимость выберем в виде $e^{-i\omega t}$. Тогда, рассматривая случай ТМ-поляризации, будем иметь следующую краевую задачу:



$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (x,\ y) \in D,$$

$$u(x,\ 0) = 0, \quad x \in (-\infty,\ +\infty); \quad u(x,\ d_1) = 0, \quad x \in (-\infty,\ x_1];$$

$$u(x,\ d_2) = 0, \quad x \in [x_2,\ +\infty); \quad u(x,\ y) = 0, \quad (x,\ y) \in \Gamma,$$

$$\int_0^{d_1} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + i\gamma_n^{(1)} u \right\}_{x=x_1} \sin \frac{\pi n y}{d_1}\, dy = A_1 i \gamma_1^{(1)} d_1,$$

$$\int_0^{d_2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - i\gamma_n^{(2)} u \right\}_{x=x_2} \sin \frac{\pi n y}{d_2}\, dy = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{1}$$