

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 536.758.539.201

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ИЗ ЗАДАЧ
УПРАВЛЕНИЯ НИТРОЦЕМЕНТАЦИЕЙ

И. Э. Степанова, В. Б. Гласко

(кафедра математики)

Рассматривается проблема единственности определения целевых характеристик процесса в случае нитроцементации плоского образца. Полученные результаты могут представлять интерес и для более общих постановок обратных задач, в частности могут быть отнесены к моделям теплопроводности. Приведены также результаты математического эксперимента на ЭВМ.

1. При насыщении металлов углеродным и азотным компонентами в целях поверхностного упрочнения могут предъявляться определенные требования к динамике процесса в некоторой приповерхностной области. Математические модели таких задач относятся к обратным задачам типа управления [1, 2].

Если целевые характеристики процесса принадлежат множеству достижимых на заданном классе управляющих параметров, то для такого типа задач может быть поставлена проблема единственности решения.

В настоящей статье такая проблема рассматривается для простейшей модели нитроцементации, когда процесс развивается в плоском слое $0 \leq x \leq l$ на временном сегменте $[0, T]$. Полученный результат может представлять интерес и для более общих постановок обратных задач, в частности может быть отнесен к моделям теплопроводности.

2. Процесс нитроцементации в газовых печах [3] описывается системой связанных уравнений параболического типа, вообще говоря, нелинейных. Управляющими параметрами служат прежде всего потенциалы атмосферы печи по углероду и азоту:

$$z_1 = \{c_{\text{атм}}(t), N_{\text{атм}}(t)\}.$$

С другой стороны, далеко не всегда известны начальные распределения углерода и азота в приповерхностном слое ($z_2(x) = \{c(x, 0), N(x, 0)\}$), от которых зависит результат и динамика процесса.

В рассматриваемой задаче управления мы будем считать искомым функциональным параметром вектор-функцию $\bar{z} \equiv \{z_1(t), z_2(x)\}$.

В качестве целевых, заранее заданных, характеристик мы принимаем конечное состояние слоя: $u_1(x) = \{c(x, T), N(x, T)\}$ и эволюцию процесса в некоторой фиксированной точке $x_0 (x_0 \in [0, l])$: $u_2(t) = \{c(x_0, t), N(x_0, t)\}$. Входной информацией служит вектор-функция $\bar{u} \equiv \{u_1(x), u_2(t)\}$. Введем обозначение $y \equiv \{c(x, t), N(x, t)\} \equiv \{y^1, y^2\}$.

3. Математическая модель процесса описывается уравнениями

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D \frac{\partial y}{\partial x} \right], \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$y(x, 0) = z_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$-D \frac{\partial y}{\partial x}(l, t) = B[y(l, t) - z_1(t)], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$y(x, T) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

$$y(x_0, t) = u_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

где

$$D \frac{\partial y}{\partial x} = \begin{pmatrix} D_1(c, N) & 0 \\ 0 & D_2(c, N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \frac{\partial c}{\partial x} \\ D_2 \frac{\partial N}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1(c, N) & 0 \\ 0 & \beta_2(c, N) \end{pmatrix} \quad (\text{для первой краевой задачи по азоту } \beta_2 = \infty).$$

Будем считать, что при $(x, t) \in \bar{Q}_T = [0, l] \times [0, T]$ значения функций $c(x, t)$, $N(x, t)$ лежат в областях σ_c и σ_N соответственно, и пусть в области $\sigma = \sigma_c \times \sigma_N$ коэффициенты матрицы D обладают двумя непрерывными производными, причем $D_i \geq D_0 > 0$, $i=1, 2$, а коэффициенты матрицы B непрерывно дифференцируемы в этой области, и выполняются условия $\beta_i \geq \beta_0 > 0$ ($i=1, 2$).

Допустим также, что вектор-функция $z_1(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$, а $z_2(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, l]$. Обозначим множество таких функций $\bar{z}$ через Z .

Назовем все перечисленные выше ограничения на функции условиями (α) .

Обозначим через U множество функциональных элементов $\bar{u}$, получаемых при каждом $\bar{z} \in Z$ с помощью оператора отображения, определяемого в соответствии с условиями (1)–(4) классической краевой задачей $\bar{z} \rightarrow \bar{u}$.

Очевидно, что при любом $\bar{u} \in U$ существует решение обратной задачи: $\bar{u} \in U \rightarrow \bar{z} \in Z$, что соответствует понятию корректности постановки задачи по Тихонову [4].

Можно убедиться, что при условиях (α) u_1 дважды непрерывно дифференцируема на $[0, l]$, а u_2 непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ [5].

4. Оказывается справедливой следующая теорема о единственности решения.

Теорема. Для любого $\bar{u} \in U$ вектор-функция $\bar{v} = \{y, \bar{z}\} \in C^{2,1}(\bar{Q}_T) \times C^{2,1}(\bar{Q}_T) \times Z$ определяется условиями (1), (3), (5), (6) однозначно, если выполняются условия (α) .

Доказательство. Рассуждения проведем в предположении, что $x_0 \in (0, l)$; в случае совпадения x_0 с одним из концов отрезка $[0, l]$ доказательство упрощается.

Допуская существование двух решений обратной задачи (1), (3), (5), (6), для их разности $\bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \bar{w} = \{\bar{y}, \bar{z}\}$ получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} = & D(y_2) \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} + \left[D'(y_2), \frac{\partial y_2}{\partial x} \right] \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + [D'(y^{(1,1)}, y^{(1,2)}), \bar{y}] \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \\ & + [D'(y_1), \bar{y}] \frac{\partial y_1}{\partial x} + \left[D'(\bar{y}^{(2)}, \bar{y}^{(3)}), \bar{y}, \frac{\partial y_2}{\partial x} \right] \frac{\partial y_1}{\partial x}, \quad (x, t) \in Q_T, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\tilde{y}(x_0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9)$$

$$\tilde{y}(x, T) = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

где D определяется выражением (7),

$$[D'(\xi), \eta] \equiv \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial D_1}{\partial \xi^i}(\xi) \eta^i & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^2 \frac{\partial D_2}{\partial \xi^i}(\xi) \eta^i \end{bmatrix}, \quad \xi, \eta \in R^2,$$

$$[D'(\xi_1, \xi_2), \eta] \equiv \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial D_1}{\partial \xi^i}(\xi_1) \eta^i & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^2 \frac{\partial D_2}{\partial \xi^i}(\xi_2) \eta^i \end{bmatrix}, \quad \xi_1, \xi_2, \eta \in R^2,$$

$$\begin{aligned} & \left[D''(\bar{y}^{(2)}, \bar{y}^{(3)}), \tilde{y}, \frac{\partial y_2}{\partial x} \right] \frac{\partial y_1}{\partial x} \equiv \\ & \equiv \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\partial^2 D_1}{\partial y^1 \partial y^i}(\mathbf{y}^{(2,1)}) \frac{\partial y_2^1}{\partial x} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 D_1}{\partial y^2 \partial y^i}(\mathbf{y}^{(3,1)}) \frac{\partial y_2^2}{\partial x} \right\} \tilde{y}^i & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\partial^2 D_2}{\partial y^1 \partial y^i}(\mathbf{y}^{(2,2)}) \frac{\partial y_2^1}{\partial x} + \frac{\partial^2 D_2}{\partial y^2 \partial y^i}(\mathbf{y}^{(3,2)}) \frac{\partial y_2^2}{\partial x} \right\} \tilde{y}^i \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $\bar{y}^{(k)} \equiv \{y^{(k,1)}, y^{(k,2)}\}$, $k = \overline{1, 3}$, $y^{(k,i)} = y_1 \theta_{(k)}^i + y_2 (1 - \theta_{(k)}^i)$, $\theta_{(k)} = \theta_{(k)}(x, t)$, $0 < \theta_{(k)}^i < 1$, $i = \overline{1, 2}$, $k = \overline{1, 3}$ — вектор-функции, фигурирующие в теореме Лагранжа о конечных приращениях.

Задача для $\bar{w}$ (при известных, по предположению, $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$) естественным образом разбивается на две в соответствии с разбиением отрезка $[0, l]$:

$$[0, l] = [0, x_0] \cup [x_0, l].$$

Первая из задач есть краевая задача с обратным временем [5] и нулевыми для $\bar{w}$ граничными условиями. Условия нашей теоремы оказываются достаточными для того, чтобы в соответствии с [5] ее решение было тождественно равно нулю.

Отсюда следует, что в точке x_0 выполнены тривиальные условия нехарактеристической задачи Коши:

$$\tilde{y}(x_0, t) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(x_0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (10)$$

При введенных ограничениях на коэффициенты уравнений (1) существует, очевидно, константа A такая, что всюду на отрезке $[x_0, l]$ справедливы неравенства:

$$\left| \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} - D(y_2) \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} \right| \leq A \left\{ |y^1| + |y^2| + \left| \frac{\partial y^1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial y^2}{\partial x} \right| \right\}. \quad (11)$$

Тогда в соответствии с [4] вторая из отмеченных выше задач имеет тривиальное решение.

Таким образом, мы получили, что $\tilde{y}(x, t) \equiv 0$, и, значит, $y_1(x, t) \equiv y_2(x, t)$ в области $[0, l] \times [0, T]$. Следовательно, при выполнении условий доказываемой теоремы однозначно определяются начальные функции $z_2(x) = \{c(x, 0), N(x, 0)\}$.

Обращаясь теперь к крайевым условиям в точке $x=l$ и учитывая, что единственность y уже установлена (поэтому однозначно определяются матрицы $D(y)|_{x=l}$ и $B(y)|_{x=l}$), имеем $B(y)|_{x=l} \tilde{z} = 0$. Поскольку элементы $B(y) \geq \beta_0 > 0$, то $\tilde{z}_1 = 0$, т. е. $c_{1atm}(t) \equiv c_{2atm}(t)$ и $N_{1atm}(t) \equiv N_{2atm}(t)$ на $[0, T]$, что и требовалось доказать.

Отметим, что теорема остается справедливой в случае, когда $N(l, t) = 0$, а также при неоднородных условиях первого рода: $y(0, t) = \varphi(t)$ при $x=0$ (при этом $\varphi(t) \in \tilde{C}^1[0, T]$).

5. Обратимся к результатам математического эксперимента по определению указанных выше управляющих функций. Поскольку теорема единственности доказана в предположении, что условия (α) выполнены, то искомые управляющие функции можно задать из соответствующих классов параметрически и поставить обратную задачу о нахождении этих параметров.

При проведении расчетов на ЭВМ мы полагали:

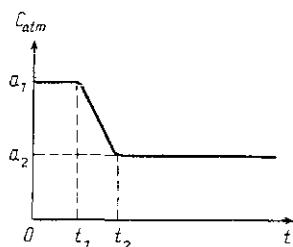
$$l = 1 \text{ см}, T = 10 \text{ ч},$$

$$D_1(c, N) = (0,04 + 0,08(c + N)) \exp \left\{ -\frac{31\,350}{1,987t_h} \right\} \frac{\text{см}^2}{\text{с}},$$

$$D_2(c, N) = (1,0 + 0,5(c + N)) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{27\,883}{1,987t_h} \right\} \frac{\text{см}^2}{\text{с}},$$

$$\beta = 1,36 \cdot 10^{-3} \cdot \exp \left\{ -\frac{11\,100}{1,987 \cdot t_h} \right\} \frac{\text{см}}{\text{с}},$$

$$t_h = 1203 \text{ К}$$



в соответствии с [6].

Положим (рисунк)

$$c_{atm}(t) = \begin{cases} a_1, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{4(a_1 - a_2)}{(t_1 - t_2)^4} \cdot \left\{ \frac{(t - t_1)^4}{4} - \frac{(t - t_1)^2(t_1 - t_2)^2}{2} \right\} + a_1, & t_1 \leq t \leq t_2, \\ a_2, & t_2 \leq t \leq T, \end{cases}$$

$$N_{atm}(t) \equiv a_2, \quad t \in [0, T], \quad N(x, 0) = -x^2 + a_4x + a_5, \quad x \in [0, l],$$

$$c(x, 0) \equiv a_6, \quad x \in [0, l],$$

где a_i , $i = \overline{1, 6}$, — константы. Вектор управляющих параметров имеет тогда вид

$$p = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}.$$

Решение обратной задачи, полученное с помощью регуляризирующего оператора Тихонова для функционала

$$F^\alpha[\tilde{z}] = \int_0^l |y(x, T) - u_1(x)|^2 dx + \int_0^T |y(x_0, t) - u_2(t)|^2 dt +$$

$$+\alpha \sum_{i=1}^6 |a_i|^6, |y-u_i|^2 = \sum_{k=1}^2 (y^k - u_i^k)^2, \quad i=\overline{1, 2},$$

приведено в первом столбце таблицы (для $\delta=0$).

p	δ					
	δ	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	$5 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$5 \cdot 10^{-1}$
a_1	1,0000	1,0010	1,0010	1,0034	1,0051	1,0424
a_2	0,8000	0,7998	0,8007	0,8055	0,8110	0,8550
a_3	0,4000	0,4004	0,4008	0,4034	0,4083	0,4481
a_4	2,0000	2,0006	2,0010	2,0084	2,0059	2,0150
a_5	0,0000	0,0002	0,0005	0,0014	0,0073	0,0438
a_6	0,1500	0,1504	0,1509	0,1540	0,1597	0,1990

Следующие ее столбцы отражают результаты, соответствующие различным уровням погрешности данных эксперимента.

Погрешность имитировалась по формулам

$$\tilde{u}_1^i(x_h) = u_1^i(x_h) + \frac{\delta \cdot \xi_h}{\sqrt{\sum_{k=0}^N \xi_k^2}}, \quad i=1, 2, \quad x_h = \frac{kl}{N},$$

где N — число разбиений отрезка $[0, l]$, $u_1(x) = \{u_1^1(x), u_1^2(x)\}$,

$$\tilde{u}_2^i(t_m) = u_2^i(t_m) + \frac{\delta \cdot \xi_m}{\sqrt{\sum_{m=0}^M \xi_m^2}}, \quad i=1, 2, \quad t_m = \frac{mT}{M},$$

где M — число разбиений отрезка $[0, T]$, $u_2(t) = \{u_2^1(t), u_2^2(t)\}$, ξ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-1; 1]$.

Приведенные результаты свидетельствуют о возможности определения решения обратной задачи (1), (3), (5), (6), устойчивого в достаточно широком диапазоне погрешности входных данных.

Неприемлемые отклонения вектора p от истинных значений управляющих параметров получаются лишь при $\delta \geq 0,5$. Погрешность результата достигает при этом 30%.

Авторы выражают благодарность А. Н. Тихонову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979. [2] Гласко В. Б. Обратные задачи математической физики. М., 1984. [3] Контроль качества термической обработки стальных полуфабрикатов и деталей: Справочник/Под ред. В. Д. Кальнера. М., 1984. [4] Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М., 1980. [5] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968. [6] Моделирование и автоматизация на базе ЭВМ процессов химико-термической обработки автомобильных деталей. ЦНИИТЭИАВТОПРОМ, Министерство автомобильной промышленности СССР. Обзорная информация. Серия XI. «Технология автомобилестроения». М., 1987.

Поступила в редакцию
09.06.92