тор монотонно возрастает с увеличением G_0L_f. Для случая $G_0L_f<1$ вычисленные значения $\varkappa_s$ неплохо согласуются с аналитической оценкой (16) (штриховая линия *4*). При $G_0L_f>1$ рост $\varkappa_s$ замедляется, что связано с нарушением адиабатичности усиления и с конечностью ширины линии усиления, роль которой возрастает по мере сокращения длительности импульса и, следовательно, уширения спектра. Там же приведена зависимость произведения $r=\varkappa_s\tau_l$ от G_0L_f (кривая *3*). Заметим, что при $G_0L_f>2$ лазер переходил в двухсолитонный режим генерации.

Какой выигрыш в длительности дают солитонные режимы генерации по сравнению с активной синхронизацией мод? Для ответа на этот вопрос мы вычислили стационарные параметры импульса $|\psi_l^0|$, τ_l^0 и энергию W_l^0 без учета в (1) фазовой самомодуляции. На рис. 4 изображены зависимости коэффициента сжатия импульса $C_\tau=\tau_l^0/\tau_l$ (кривая *1*) от G_0L_f. Видно, что в солитонном режиме при $G_0L_f\simeq2$ длительность импульса сокращается более чем в десять раз, а энергия (кривая *2*) остается практически неизменной.

Подводя итоги, подчеркнем, что кольцевые волоконно-оптические лазеры с активной синхронизацией мод представляются весьма перспективными источниками высокоинтенсивных солитонных импульсов фемтосекундного диапазона длительностей.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Mollenauer L. F., Stolen R. H.//Opt. Lett. 1984. **9**. P. 13. [2] Kafka J. D., Baer T., Hall D. W.//Opt. Lett. 1989. **14**. P. 1269. [3] Richardson D. J. et al.//Electron. Lett. 1991. **27**. P. 542. [4] Bulushev A. G., Dianov E. M., Okhotnikov O. G.//Sov. Lightwave Commun. 1991. **1**. P. 133. [5] Исаев С. К., Корниенко Л. С., Кравцов Н. В. и др.//ЖЭТФ. 1980. **79**. С. 1239. [6] Выслоух В. А., Чередник И. В.//ТМФ. 1987. **71**. С. 13. [7] Afanasyev V. V., Serkin V. N., Vysloukh V. A.//«Technical Digest. Nonlinear Guided Wave Phenomena». Cambridge. UK, 1991. P. 186. [8] Херман И., Вильгельми Б. Лазеры сверхкоротких световых импульсов. М., 1986.

Поступила в редакцию
15.04.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1993. Т. 34, № 3

ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 523.034.43

ГРАВИТАЦИОННО-ВОЛНОВОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ В ФОНОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ли Фан Юй *)
(ГАИШ)

Методом комплексных операторов рассматривается гравитационно-волновое возмущение фононного пространства с неоднородным модулем сдвига. Вычислена эквивалентная возмущающая сила и конкретизирована соответствующая фононная модель.

В работах [1, 2] Е. М. Серебряный предложил фононную модель для упругой среды со спиральной дислокацией и дисклинацией. Как было показано в [2], эта модель дает новое топологическое описание

*) Китай.

взаимодействия фонона с дефектом кристалла. Если спиральные дислокации и дисклинации распределены в упругой среде симметрично, то пространственная кристаллическая решетка такой среды будет частично скручена и искривлена (кручение и искривление вызываются соответственно дислокациями и дисклинациями).

С точки зрения размерности физического пространства этот случай означает, что нарушена однородность упругой среды (т. е. у модуля сдвига появляется локальный разрыв). С другой стороны, если упругая среда однородна и изотропна, то отсутствует взаимодействие гравитационной волны с этой средой, поскольку гравитационная волна в неограниченной среде взаимодействует только с нерегулярностями модуля сдвига [3, 4].

В этой статье используется метод комплексных дифференциальных операторов в системе кристаллической решетки [2] и рассчитываются фононные возмущения, создаваемые гравитационной волной в среде, в которой модуль сдвига имеет центрально-радиальную неоднородность (аналог спиральной дислокации). Результаты показывают, что рассмотренная модель сходна с предложенной в [2].

1. Фононные уравнения для кристаллической решетки в поле гравитационной волны

В работе [2] комплексные базисные векторы в координатной системе кристаллической решетки в общем случае с дислокационными нарушениями определяются следующей формулой:

$$\mathbf{e}_{\pm}=\mathbf{e}_{\rho}\pm i\mathbf{e}_{\varphi}, \tag{1}$$

где $\mathbf{e}_{\rho}$, $\mathbf{e}_{\varphi}$ являются базисными полярными векторами цилиндрической системы координат пространственной кристаллической решетки, а вектор смещения фононов может быть записан как

$$\mathbf{u}=\mathbf{e}_z u^z+\mathbf{e}_+ u^+ + \mathbf{e}_- u^- = \mathbf{e}_z u^z + \mathbf{e}_\rho u^\rho + \mathbf{e}_\varphi u^\varphi. \tag{2}$$

Из (1), (2) имеем

$$u^+ + u^- = u^\rho,\ u^+ - u^- = -iu^\varphi, \tag{3}$$

$$u^+ = \frac{1}{2}(u^\rho - iu^\varphi),\ u^- = \frac{1}{2}(u^\rho + iu^\varphi), \tag{4}$$

$$[\mathbf{e}_+ \times \mathbf{e}_-) = [\mathbf{e}_- \times \mathbf{e}_+] = 0,\ (\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_+) = (\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_+) = 2. \tag{5}$$

Соответствующий комплексный дифференциальный оператор

$$\nabla = \mathbf{e}_z \partial_z + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_+ \partial_- + \mathbf{e}_- \partial_+), \tag{6}$$

где

$$\partial_\pm = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial\rho} \pm i\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - L\frac{\partial}{\partial z}\right) \text{ (для скалярных величин)}, \tag{7}$$

$$\partial_- \mathbf{e}_\pm = \mp\frac{H}{\rho}\mathbf{e}_\pm,\ \partial_+ \mathbf{e}_\pm = \pm\frac{H}{\rho}\mathbf{e}_\pm \text{ (для базисных векторов)}, \tag{8}$$

$L=\mathbf{b}/2\pi$, $\mathbf{b}$ есть вектор Бюргерса.

Если дислокация отсутствует, то $L=0$, при отсутствии дисклинации $H=1$. Легко показать, что при отсутствии и дислокации, и дисклинации оператор, определенный формулой (6), имеет тот же вид, что и обыч-

ный дифференциальный оператор. Уравнения фононов в координатной системе кристаллической решетки [2]:

$$-\omega^2\mathbf{u}=V_T^2[\nabla\nabla\mathbf{u}+\nabla\nabla\mathbf{u}]+(V_L^2-2V_T^2)\nabla\nabla\mathbf{u}, \tag{9}$$

здесь

$$\nabla\mathbf{u}=\left(\partial_-+\frac{1}{\rho}\right)u^-+\left(\partial_++\frac{1}{\rho}\right)u^++\partial_z u^z. \tag{10}$$

Полное выражение для $\mathbf{u}$ имеет вид

$$\mathbf{u}=[\mathbf{e}_z u^z(\rho)+\mathbf{e}_+u^+(\rho)+\mathbf{e}_-u^-(\rho)]\exp\{i(n\varphi+\kappa z-\omega t)\}, \tag{11}$$

где κ есть волновой вектор фонона, V_T, V_L — соответственно поперечная и продольная локальные скорости звука в среде.

Когда гравитационная волна взаимодействует с упругой средой, в уравнение (9) необходимо добавить члены взаимодействия. В соответствии с линеаризованной теорией гравитации, лагранжиан взаимодействия между гравитационной волной и упругой средой есть [3]

$$\mathscr{L}_{\text{int}}=\mu h_j^i\frac{\partial u^j}{\partial x^i}, \tag{12}$$

соответствующая полная функция действия будет

$$S=\int(\mathscr{L}_{\text{pn}}+\mathscr{L}_{\text{int}})\sqrt{g}\,d^3x. \tag{13}$$

Используя принцип наименьшего действия ($\delta S=0$), получим

$$-\rho_M\omega^2u^j=\lambda\Delta^j(\nabla_\kappa u^\kappa)+\mu[\nabla_l(\Delta^l u^j)+\nabla_l(\nabla^j u^l)]-\eta^{j\kappa}\frac{\partial(\mu h_\kappa^l)}{\partial x^l}, \tag{14}$$

где $\eta^{j\kappa}=(1,\ 1,\ 1)$ — пространственные компоненты метрического тензора Минковского. Положим далее

$$f^j=\frac{\eta^{j\kappa}}{\rho_M}h_\kappa^l\left(\frac{\partial\mu}{\partial x^l}\right), \tag{15}$$

т. е. f^j будет j-й компонентой силы, индуцированной гравитационной волной. Очевидно, что если $\mu=\text{const}$, то $\mathbf{f}=0$, следовательно, интересно рассмотреть случай $\mathbf{f}\neq0$, т. е. $\mu\neq\text{const}$ при $L=0$, $H=1$.

Используя (2), (6), (7), (8) и вводя условие $V_T\approx V_L=V$, можно преобразовать (14):

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2u^z}{d(p\rho)^2}+\frac{1}{p\rho}\frac{du^z}{d(p\rho)}+\left[1-\frac{n^2}{p^2\rho^2}\right]u^z=\frac{f^z}{V^2p^2},\\
&\frac{d^2u^+}{d(p\rho)^2}+\frac{1}{p\rho}\frac{du}{d(p\rho)}+\left[1-\frac{(n-1)^2}{p^2\rho^2}\right]u^+=\frac{f^+}{V^2p^2},\\
&\frac{d^2u^-}{d(p\rho)^2}+\frac{1}{p\rho}\frac{du^-}{d(p\rho)}+\left[1-\frac{(n+1)^2}{p^2\rho^2}\right]u^-=\frac{f^-}{V^2p^2},
\end{aligned} \tag{16}$$

где $p^2=p_L^2=\dfrac{\omega^2}{V_L^2}-\kappa^2\approx\dfrac{\omega^2}{V_T^2}-\kappa^2=p_T^2$,

$$\begin{aligned}
&f^+=\frac{1}{2}(f^\rho-if^\varphi)=\frac{1}{2}[f^1\cos\varphi+f^2\sin\varphi-i(-f^1\sin\varphi+f^2\cos\varphi)],\\
&f^-=\frac{1}{2}(f^\rho+if^\varphi)=\frac{1}{2}[f^1\cos\varphi+f^2\sin\varphi+i(-f^1\sin\varphi+f^2\cos\varphi)]
\end{aligned} \tag{17}$$

(см. (4)).

2. Фононные возмущения, вызываемые гравитационной волной

Мы рассмотрим только простой случай радиально-симметричного неоднородного распределения модуля сдвига: $\mu=\mu_0/\rho$ ($\rho_0<\rho<\infty$, $\rho_0>0$, $\mu=\text{const}$). Из (15), используя $\mu=\rho_M V^2$, получим

$$f^l=-\frac{V^2}{\rho}\eta^{i\kappa}h^l_\kappa\frac{\partial\rho}{\partial x^l}. \tag{18}$$

1) Возмущения, индуцированнные гравитационной волной, распространяющейся параллельно оси симметрии кристалла (z-ось). В соответствии с условиями TT-калибровки, неисчезающие компоненты метрики, переносимой волной, записываются в виде [5]

$$h^1_1=-h^2_2,\ h^2_1=h^1_2=h^j_\kappa=a^j_\kappa\exp\{i(k^\mu x_\mu)\}=a^j_\kappa\exp\{i(kz-\omega t)\}, \tag{19}$$

где k есть волновой вектор гравитационной волны. Подставляя (19) и (17) в (16), получим фононные решения. С целью упрощения записи введем следующие обозначения:

$$\sum\nolimits_n=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}(p\rho)^{2m+1}}{2^{m+3}p\cos(n\pi/2)\cdot\Gamma(m+n/2+3/2)\cdot\Gamma(m-n/2+3/2)},$$

$$F_n=\frac{1}{2p}\left[\frac{1}{p\rho}+\frac{1}{(p\rho)^3}(n^2-1)+\frac{1}{(p\rho)^5}(n^2-1)(n^2-3)+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{2^{n-1}\Gamma(n)}{(p\rho)^n}\right],$$

$$\gamma=\exp\{i(n\varphi-\kappa z-\omega t)\}. \tag{20}$$

Тогда можем записать:

$$a^z(t,\ \varphi,\ z)\,u^z(p\rho)=[A_1J_n(p\rho)+B_1N_n(p\rho)]\cdot\gamma, \tag{21}$$

$$a^+(t,\ \varphi,\ z)\,u^+(p\rho)=\Big[A_2J_{n-1}(p\rho)+B_2N_{n-1}(p\rho)+$$

$$+\sum\nolimits_{n-1}(h^1_1-ih^1_2)\exp\{2i\varphi\}\Big]\cdot\gamma, \tag{22}$$

если $n-1$ — четное число, и

$$a^+(t,\ \varphi,\ z)\,u^+(p\rho)=[A^2J_{n-1}(p\rho)+B_3N_{n-1}(p\rho)-$$

$$-F_{n-1}(p\rho)(h^1_1-ih^1_2)\exp\{2i\varphi\}]\cdot\gamma \tag{23}$$

для нечетных значений $n-1$.

В формулах (21)—(23) A_i, B_i — постоянные интегрирования, $J_n(x)$ и $N_n(x)$ — функции Бесселя и Неймана n-го порядка соответственно.

Совершенно аналогично для четных и нечетных значений $n+1$ получим

$$a^-(t,\ \varphi,\ z)\,u^-(p\rho)=\Big[A_4J_{n+1}(p\rho)+B_4N_{n+1}(p\rho)+$$

$$+\sum\nolimits_{n+1}(h^1_1-ih^1_2)\exp\{2i\varphi\}\Big]\cdot\gamma, \tag{24}$$

$$a^-(t,\ \varphi,\ z)\,u^-(p\rho)=[A_5J_{n+1}(p\rho)+B_5N_{n+1}(p\rho)-$$

$$-F_{n-1}(p\rho)\,(h_1^1+ih_2^1)\exp\{-2i\varphi\}]\cdot\gamma \tag{25}$$

соответственно.

2) Возмущения, индуцированные гравитационной волной, распространяющейся перпендикулярно оси симметрии. Для этого случая не обращающиеся в нуль компоненты гравитационной волны равны:

$$h_2^2=-h_3^3,\ \ h_3^2=h_2^3,\ \ h_\kappa^j=a_\kappa^j\exp\{i\,(k^\mu x_\mu)\}=a_\kappa^j\exp\{i\,(kx-\omega t)\}. \tag{26}$$

Используя метод, примененный в предыдущем случае, получим для четных n:

$$a^z(t,\ \varphi,\ z)\,u^z(p\rho)=\left[A_0J_n(p\rho)+B_6N_n(p\rho)+\sum\nolimits_n h_3^2\sin\varphi\right]\cdot\gamma; \tag{27}$$

для нечетных n:

$$a^z(t,\ \varphi,\ z)\,u^z(p\rho)=[A_7J_n(p\rho)+B_7N_n(p\rho)-2F_n(p\rho)\,h_3^2\sin\varphi]\cdot\gamma. \tag{28}$$

Далее, для четных и нечетных $(n-1)$ имеем:

$$a^+(t,\ \varphi,\ z)\,u^+(p\rho)=\Big[A_8J_{n-1}(p\rho)+B_8N_{n-1}(p\rho)+$$

$$+\sum\nolimits_{n-1} h_3^3\sin\varphi\,(\sin\varphi+2i\cos\varphi)\Big]\cdot\gamma, \tag{29}$$

$$a^+(t,\ \varphi,\ z)\,u^+(p\rho)=[A_9J_{n-1}(p\rho)+B_9N_{n-1}(p\rho)-$$

$$-F_{n-1}(p\rho)\,ih_3^3\sin\varphi\exp\{i\varphi\}]\cdot\gamma \tag{30}$$

соответственно.

Совершенно аналогично получим:

для четных $(n+1)$:

$$a^-(t,\ \varphi,\ z)\,u^-(p\rho)=\Big[A_{10}J_{n+1}(p\rho)+B_{10}N_{n+1}(p\rho)+$$

$$+\sum\nolimits_{n+1} h_3^3\sin\varphi\,(\sin\varphi+2i\cos\varphi)\Big]\cdot\gamma, \tag{31}$$

для нечетных $(n+1)$:

$$a^-(t,\ \varphi,\ z)\,u^-(p\rho)=[A_{11}J_{n+1}(p\rho)+B_{11}N_{n+1}(p\rho)+$$

$$+iF_{n+1}(p\rho)\,h_3^3\exp\{-i\varphi\}]\cdot\gamma. \tag{32}$$

Формулы (21)—(32) позволяют определить компоненты возмущений u^z, u^ρ и u^φ:

$$u^z=a^z(t,\ \varphi,\ z)\,u^z(p\rho),$$

$$u^\rho=a^+(t,\ \varphi,\ z)\,u^+(p\rho)+a^-(t,\ \varphi,\ z)\,u^-(p\rho),$$

$$u^\varphi=[a^+(t,\ \varphi,\ z)\,u^+(p\rho)-a^-(t,\ \varphi,\ z)\,u^-(p\rho)]\,i.$$

Заключение

В полученных формулах (21)—(32) члены, содержащие постоянные интегрирования A_i, B_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ 11)$, описывают фононы в отсутст-

вие гравитационной волны; остальные коэффициенты описывают фононные возмущения, индуцированные исключительно гравитационной волной.

Поскольку $\rho_0 < \rho < \infty$, $\rho_0 > 0$ для всех решений, то наша фононная модель несингулярна. В области $\rho \to \rho_0$, $|f^z|$, $|f^+|$, $|f^-| \to |f^z|_{max}$, $|f^+_{max}|$, $|f^-|_{max}$ фононное поле, индуцированное гравитационной волной, характеризуется максимальной константой связи.

Выше мы рассматривали неограниченную среду. Для прикладных целей интересно обратиться к ограниченному объему цилиндрической формы: $0 \leqslant z \leqslant l$, $0 \leqslant \rho \leqslant R$ (или $R_1 \leqslant \rho \leqslant R_2$) (модель гравитационного детектора). Однородный цилиндр уже был рассчитан в работе [6]. Наши расчеты позволяют перейти к анализу той же задачи с учетом неоднородностей такого гравитационного детектора, в частности связанных с возможным наличием спиральных дислокаций и дисклинаций.

Автор выражает благодарность Д. В. Гальцову и В. Н. Руденко за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Серебряный Е. М.//ТМФ. 1990. **83**, № 3. С. 428. [2] Серебряный Е. М.//ТМФ. 1991. **86**, № 1. С. 81. [3] Dyson F. J.//Astrophys. J. 1969. **156**. P. 529. [4] Esposito F. P.//Ibid. 1970. **165—170**. P. 165. [5] Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A. Gravitation. San Francisco, 1973. [6] Paik H. J., Wagoner R. U.//Phys. Rev. 1976. **D13**. P. 2694.

Поступила в редакцию
15.04.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1993. Т. 34, № 3

УДК 548.732

ТОНКАЯ СТРУКТУРА РЕНТГЕНОВСКИХ ПУЧКОВ НА ВЫХОДЕ ЛЕНТООБРАЗНОГО ВОЛНОВОДА

В. А. Бушуев, М. Н. Оруджалиев
(кафедра физики твердого тела)

В рамках волнового подхода и приближения геометрической оптики исследованы особенности формирования тонкой структуры рентгеновских пучков на выходе лентообразного волновода. Показано удовлетворительное согласие с известными экспериментальными результатами Мингазина и др.

Целый ряд прикладных задач требует создания рентгеновских волноводов, основанных на явлении многократного полного внешнего отражения (ПВО) и позволяющих осуществлять коллимацию и транспортировку жесткого рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda \sim 1$ Å [1].

В работах [2, 3] предложен метод получения узких малорасходящихся рентгеновских пучков с помощью бесщелевого коллиматора (БК), состоящего из двух пластин, прижатых друг к другу полированными поверхностями. Такой коллиматор представляет собой частный случай лентообразного волновода (ЛВ) с эффективной шириной канала $2d \sim 0{,}2$—1 мкм, определяемой при контактировании реальных поверхностей величиной макро- и микронеровностей. В работе [4] показана возможность распространения ограниченного числа ($n \sim 1$—5) ло-