КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 621.372.2.01

РАСЧЕТ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ СО СЛОЖНОЙ ФОРМОЙ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

А. Н. Боголюбов, Т. В. Едакина
(кафедра математики)

Предложен алгоритм расчета диэлектрических волноводов со сложной формой поперечного сечения на основе вариационно-разностного метода.

Диэлектрические волноводы со сложной формой поперечного сечения находят широкое применение в различных системах техники СВЧ и интегральной оптики. Для их расчета применяются приближенные и численные методы. Среди последних широкое применение находят вариационные методы, где строятся функционалы, стационарные значения которых являются решениями исходных задач. Особый интерес представляют вариационно-разностные методы, позволяющие рассчитывать диэлектрические волноводы с произвольной формой поперечного сечения и произвольным профилем функции диэлектрической проницаемости [1].

Рассмотрим однородный вдоль оси z диэлектрический волновод с произвольной формой поперечного сечения и произвольным законом изменения относительной диэлектрической проницаемости ε_1, помещенный в однородную изотропную среду с диэлектрической проницаемостью ε_2. Для простоты будем рассматривать изотропные диэлектрические волноводы, для которых $\varepsilon_1(x, y)$ — скалярная функция поперечных координат. Будем изучать распространяющиеся волны, зависимость которых от времени и координаты z возьмем в виде $\exp\{-i(\omega t-\beta z)\}$, где β — постоянная распространения.

Из системы уравнений Максвелла можно получить уравнение для напряженности магнитного поля бегущей волны:

$$\operatorname{rot}(\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{H})-\omega^2\mathbf{H}=0. \tag{1}$$

Из вариационного принципа следует, что (1) является уравнением Эйлера для функционала

$$\Phi=\int\limits_S(\operatorname{rot}\mathbf{H})^*\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{H}d\sigma-\omega^2\int\limits_S\mathbf{H}^*\mathbf{H}d\sigma, \tag{2}$$

где S — вся бесконечная плоскость поперечного сечения $z=\mathrm{const}$.

Однако такая постановка задачи приводит к появлению фиктивных решений, так называемых «духов» [1]. Чтобы исключить появление фиктивных решений, воспользуемся методом штрафных функций [2] и перепишем функционал (2) в виде

$$F=\Phi+p^2\int\limits_S(\operatorname{div}\mathbf{H})^*\operatorname{div}\mathbf{H}d\sigma, \tag{3}$$

где p — штрафной коэффициент.

Величина параметра p влияет на степень вытеснения фиктивных мод: чем больше p, тем меньше фиктивных решений, однако с увеличением p ухудшается точность расчета характеристик истинных мод. Значение $p=1$ обеспечивает отсутствие «духов» среди первых нескольких мод и гарантирует удовлетворительную точность вычислений. Поскольку мы будем заниматься расчетом основных мод конкретных диэлектрических волноводов, то используем функционал (3) при $p=1$.

Для применения вариационно-разностного метода необходимо ограничить область, в которой ищется решение, для чего введем виртуальную стенку, поле на которой положим равным нулю. Расстояние до стенки — параметр, подбираемый экспериментально.

Запишем функционал (3) в декартовых координатах, разобъем ограниченную область на прямоугольные ячейки, где будем считать ε=const, и представим функционал (3) в виде суммы функционалов по всем ячейкам. Вычисляя интегралы численно по формуле трапеций, получим приближенные алгебраические выражения для каждого функционала по отдельной ячейке, суммируя которые, получим приближенное алгебраическое выражение для функционала (3). Пусть M — общее число узлов сетки, покрывающей ограниченную область, где ищется решение. Тогда для нахождения стационарного значения функционала (3) приближенное алгебраическое выражение нужно продифференцировать по $3M$ переменным — значениям трех компонент магнитного поля в каждом узле. В результате приходим к системе $3M$ линейных алгебраических уравнений, которая может быть записана в виде задачи на собственные значения:

$$A\mathbf{X}=\beta^2 B\mathbf{X}, \tag{4}$$

где A — эрмитова ленточная матрица, B — диагональная матрица, $\mathbf{X}$ — вектор-столбец решений. Оказывается, что при определенной нумерации узлов сетки матрица A принимает блочно-диагональную структуру, причем на диагонали расположены квадратные матрицы порядка M и $2M$, что дает значительную экономию вычислений.

Предложенный алгоритм расчета характеристик диэлектрических волноводов реализован в виде комплекса программ, написанных на языке FORTRAN-77. Основной является программа TATA, в которой обработка матриц осуществляется методом Ланцоша [3].

На рис. 1—3 приведены примеры расчета поперечных магнитных компонент и постоянных распространения основных мод П-образного, крестообразного и Г-об-

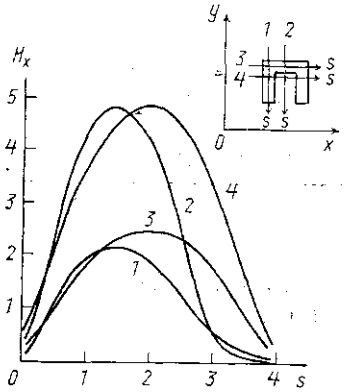

Рис. 1. Распределение H_x-компоненты основной моды П-образного диэлектрического волновода вдоль выделенных направлений $s1$—$s4$: номер кривой k соответствует направлению sk, k=1—4. Одно деление по оси s равно толщине перекладинок и боковинок. Постоянная распространения β=1,4805

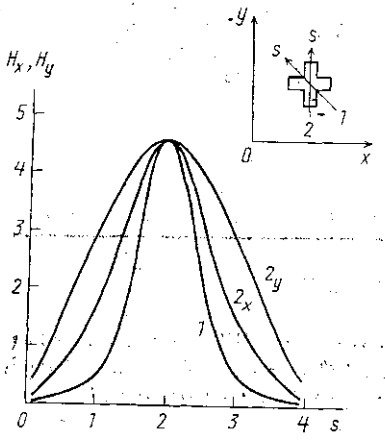

Рис. 2. Распределение H_x, H_y-компонент основной моды крестообразного диэлектрического волновода вдоль выделенных направлений $s1$ и $s2$ (обозначения кривых — как на рис. 1). Индекс «x» соответствует H_x-компоненте, индекс «y» — H_y-компоненте. Одно деление по оси s равно толщине крестовины. Постоянная распространения β=1,3079

разного диэлектрических волноводов. Волноводы рассматриваются однородные с ε_1=2,5, помещенные в воздухе с ε_2=1,0. Максимальный размер сечения равен 10 мкм, волновое число k_0=1 мкм$^{-1}$. Расчет проводился для последовательности сгущающихся сеток, при максимальном числе узлов M=225. Гарантированная точ-

ность — три знака после запятой. С такой же точностью подбиралось расстояние до виртуальной стенки.

В заключение отметим, что программа TATA позволяет рассчитывать диэлектрические волноводы не только с кусочно-постоянной, но и с непрерывной формой профиля функции ε. После незначительных изменений она может быть использована для расчета анизотропных диэлектрических волноводов, в частности для исследования одной из актуальных задач волоконной оптики — явления двулучепреломления в световодах.

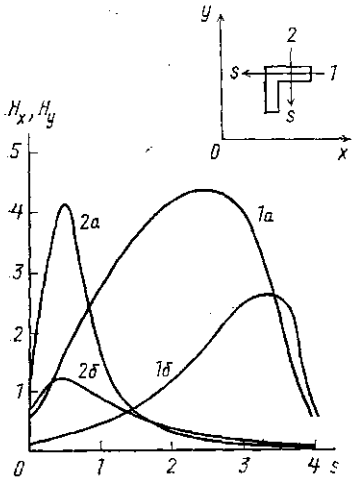

Рис. 3. Распределение H_x, H_y-компонент основной моды Г-образного диэлектрического волновода вдоль выделенных направления $s1$ и $s2$ (обозначения кривых — как на рис. 1). Индекс «x» соответствует H_x-компоненте, индекс «y» — H_y-компоненте. Одно деление вдоль оси s равно толщине элементов сечения. Постоянная распространения $\beta=1{,}2176$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Боголюбов А. Н., Едакина Т. В.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. 32, № 2. С. 6. [2] Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981. [3] Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М., 1984.

Поступила в редакцию
29.06.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1993. Т. 34, № 3

УДК 530.12:531.51

КЛАСС СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ФИНСЛЕРОВЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ИНДИКАТРИСОЙ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Г. С. Асанов

(кафедра теоретической физики)

Указан широкий класс точных решений финслеровых уравнений в статическом сферически симметричном случае в предположении, что слои являются пространствами постоянной кривизны.

В работах [1, 2] были выведены уравнения, объединяющие гравитационное поле и янг-миллсовское калибровочное поле на основе геометрии расслоенного финслерова подхода. В [2] было показано, как можно находить точные решения таких уравнений в случае статистического сферически симметричного гравитационного поля с помощью метода разделения переменных, относящихся к базовому пространству к касательному пространству (играющему роль слоя). Выполненные в [2] расчеты показали, что вполне конструктивным является предположение, что индикатриса слоя является пространством постоянной кривизны. В настоящей работе указан широкий класс решений для финслеровых метрических функций $F(x, y)$, удовлетворяющих этому предположению и соответствующих условию, что пространство является статическим и сферически симметричным. Этот класс решений имеет следующий вид: $F(x, y)=y^0V$ с

$$V^2 = C_2Q \exp\{-2u^{1/2}(\nu C^{1/2}+u^{1/2})^{-1}\}, \qquad (1)$$