ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1993. Т. 34, № 4

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12:550.831

ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

А. А. Логунов
(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

В рамках специальной теории относительности на основании принципа геометризации получены основные уравнения для гравитационного поля, которые с необходимостью содержат массу гравитона. Согласно этим уравнениям однородная и изотропная Вселенная развивается циклически и может быть только «плоской». В такой Вселенной предсказывается существование большой «скрытой» массы вещества. Теория исключает существование «черных дыр».

Введение

Общая теория относительности (ОТО) Эйнштейна, основные уравнения которой были построены Гильбертом и Эйнштейном в 1915 г., открыла новый этап в изучении гравитационных явлений. Однако эта теория почти с момента рождения наряду с успехами имеет и принципиальные трудности в определении физических характеристик гравитационного поля и, как следствие, в формулировке законов сохранения энергии-импульса.

Ниже мы увидим, что в рамках специальной теории относительности, которая описывает явления как в инерциальных, так и в неинерциальных системах отсчета, с помощью принципа геометризации, отражающего универсальность гравитационного взаимодействия поля с веществом, вводя массу гравитона, можно объединить идею Пуанкаре о гравитационном поле [1] (как физическом поле в духе Фарадея—Максвелла) с идеей Эйнштейна о римановой геометрии пространства-времени. Этот путь привел к релятивистской теории гравитации (РТГ) [2], обладающей всеми законами сохранения, как это имеет место во всех других физических теориях.

1. Основные положения РТГ

Переходя к построению теории гравитационного поля, мы будем исходить из следующих основных положений.

1°. В основе РТГ лежит специальная теория относительности, и поэтому пространство Минковского (псевдоевклидова геометрия пространства-времени) есть фундаментальное пространство для всех физических полей, в том числе и для гравитационного. Это положение является необходимым и достаточным, чтобы имели место законы сохранения как энергии-импульса, так и момента количества движения для вещества и гравитационного поля, вместе взятых. Иными словами, пространство Минковского отражает динамические свойства, общие для всех форм материи, и, следовательно, существуют единые физические характеристики, которые позволяют количественно описать превращение одних форм материи в другие. Пространство Минковского нельзя считать априорно существующим, поскольку оно отражает свойства материи, а следовательно, оно неотделимо от нее. Пространство Минковского имеет глубокое физическое содержание, так как оно определяет универсальные свойства материи, такие как энергия, импульс, момент количества движения.

Гравитационное поле описывается симметрическим тензором второго ранга $\Phi^{\mu\nu}$ и является реальным физическим полем, обладающим плотностью энергии-импульса, массой покоя m и поляризационными состояниями, соответствующими спинам 2 и 0 в силу уравнений

$$D_\mu \Phi^{\mu\nu}=0, \tag{1}$$

где D_μ — ковариантная производная в пространстве Минковского.

Уравнение (1), помимо исключения нефизических состояний поля, вводит в теорию метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского, что позволяет отделить силы инерции от сил, обусловленных действием гравитационного поля. Выбором диагональной метрики $\gamma_{\mu\nu}$ можно полностью исключить действие сил инерции. Метрика пространства Минковского позволяет ввести понятия эталонной длины и промежутка времени при отсутствии гравитационного поля. Далее мы увидим, что взаимодействие тензорного гравитационного поля с веществом можно ввести таким образом, чтобы оно как бы деформировало пространство Минковского, изменяя метрические свойства и не нарушая причинности.

2°. Поскольку гравитационное поле описывается симметрическим тензором второго ранга $\Phi^{\mu\nu}$, а его взаимодействие с другими полями можно считать универсальным, открывается уникальная возможность в плотности лагранжиана вещества «подключить» это поле непосредственно к тензору $\gamma^{\mu\nu}$ по правилу

$$L_M(\tilde{\gamma}^{\mu\nu}, \Phi_A) \to L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Phi_A), \tag{2}$$

где

$$\tilde{g}^{\mu\nu}=\tilde{\gamma}^{\mu\nu}+\tilde{\Phi}^{\mu\nu},\ \tilde{g}^{\mu\nu}=\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu},\ \tilde{\gamma}^{\mu\nu}=\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{\mu\nu},\ \tilde{\Phi}^{\mu\nu}=\sqrt{-\gamma}\,\Phi^{\mu\nu}, \tag{3}$$

Φ_A — поля вещества, $g=\det g_{\mu\nu}$, $\gamma=\det\gamma_{\mu\nu}$, $\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{g}_{\nu\sigma}=\delta^\mu_\sigma$. Подъем и опускание индексов у тензора $\Phi^{\mu\nu}$ осуществляется с помощью $\gamma_{\mu\nu}$, а у тензора $g^{\mu\nu}$ — с помощью метрического тензора риманова пространства. Под веществом мы понимаем все формы материи, за исключением гравитационного поля.

Такой вид взаимодействия гравитационного поля с веществом приводит к понятию эффективного риманова пространства, в котором происходит движение вещества, и к принципу геометризации. Согласно принципу геометризации движение вещества под действием гравитационного поля $\Phi^{\mu\nu}$ в пространстве Минковского с метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}$ тождественно его движению в эффективном римановом пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}$. Эффективное риманово пространство имеет в таком подходе полевое происхождение, обязанное присутствию гравитационного поля $\Phi^{\mu\nu}$. Поскольку метрические свойства при наличии гравитационного поля определяются тензором эффективного риманова пространства, а без гравитационного поля — тензором $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского, то РТГ способна дать ответ на вопрос, как изменяются размеры тела и ход часов при действии гравитационного поля. Если теория не содержит тензор $\gamma_{\mu\nu}$ в уравнениях поля, то она в принципе не может ответить на такие вопросы.

В ОТО гравитационное поле характеризуется метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, в нашей теории оно определяется тензорной величиной $\Phi^{\mu\nu}$, а эффективное риманово пространство строится с помощью поля $\Phi^{\mu\nu}$, а также метрического тензора $\gamma^{\mu\nu}$ пространства Минковского, фиксирующего определенный выбор системы координат.

В нашей теории существуют галилеевы (инерциальные) системы координат, а поэтому ускорение имеет абсолютный характер. Движение пробного тела в эффективном римановом пространстве происходит по геодезической линии этого пространства, но оно не является свободным, поскольку вызвано действием гравитационного поля. Если бы пробное тело было заряженным, то оно излучало бы электромагнитные волны, поскольку в общем случае его движение в поле происходило бы с переменным ускорением. Так как эффективное риманово пространство создается гравитационным полем $\Phi^{\mu\nu}$, находящемся в пространстве Минковского, то оно всегда может быть задано (и это очень важно) в одной системе координат. Это означает, что мы будем иметь дело только с такими римановыми пространствами, которые задаются в одной карте. С нашей точки зрения, полностью исключаются римановы пространства со сложной топологией, поскольку они не полевого происхождения.

Следует отметить, что, поскольку вещество движется в эффективном римановом пространстве, в уравнения движения вещества не войдет метрический тензор пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}$. Пространство Минковского будет сказываться на движении вещества только через метрический тензор риманова пространства $g_{\mu\nu}$, определяемый из уравнений, в которые входит метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$.

2. Калибровочная группа преобразований

Поскольку плотность лагранжиана вещества имеет вид

$$L_M(\tilde{g}^{\mu\nu},\ \Phi_A), \tag{4}$$

то легко найти калибровочную группу преобразований, при которых плотность лагранжиана вещества меняется только на 4-дивергенцию. Для этой цели воспользуемся инвариантностью действия

$$S_M = \int L_M(\tilde{g}^{\mu\nu},\ \Phi_A)\, d^4x \tag{5}$$

при произвольном бесконечно малом изменении координат

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x), \tag{6}$$

где ξ^{α} — бесконечно малый 4-вектор смещения.

При этих координатных преобразованиях полевые функции $\tilde{g}^{\mu\nu}$, Φ_A изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{g}'^{\mu\nu}(x') &= \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \delta_\xi \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \xi^{\alpha}(x)\, D_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}(x), \\ \Phi'_A(x') &= \Phi_A(x) + \delta_\xi \Phi_A(x) + \xi^{\alpha}(x)\, D_\alpha \Phi_A(x), \end{aligned} \tag{7}$$

где выражения

$$\begin{aligned} \delta_\xi \tilde{g}^{\mu\nu}(x) &= \tilde{g}^{\mu\alpha} D_\alpha \xi^{\nu}(x) + \tilde{g}^{\nu\alpha} D_\alpha \xi^{\mu}(x) - D_\alpha(\xi^{\alpha} \tilde{g}^{\mu\nu}), \\ \delta_\xi \Phi_A(x) &= -\xi^{\alpha}(x)\, D_\alpha \Phi_A(x) + F^{B;\alpha}_{A;\beta} \Phi_B(x)\, D_\alpha \xi^{\beta}(x) \end{aligned} \tag{8}$$

являются вариациями Ли.

Операторы δ_ξ удовлетворяют условиям алгебры Ли, т. е. коммутационному соотношению

$$[\delta_{\xi_1},\ \delta_{\xi_2}](\cdot) = \delta_{\xi_3}(\cdot) \tag{9}$$

и тождеству Якоби

$$[\delta_{\xi_1}, [\delta_{\xi_2}, \delta_{\xi_3}]] + [\delta_{\xi_3}, [\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}]] + [\delta_{\xi_2}, [\delta_{\xi_3}, \delta_{\xi_1}]] = 0,$$

где

$$\xi_3^\nu = \xi_1^\mu D_\mu \xi_2^\nu - \xi_2^\mu D_\mu \xi_1^\nu = \xi_1^\mu \partial_\mu \xi_2^\nu - \xi_2^\mu \partial_\mu \xi_1^\nu. \tag{10}$$

Для того чтобы имело место (9), необходимо выполнение следующих условий:

$$F_{A;\nu}^{B;\mu} F_{B;\beta}^{C;\alpha} - F_{A;\beta}^{B;\alpha} F_{B;\nu}^{C;\mu} = f_{\nu\beta;\sigma}^{\mu\alpha;\tau} F_{A;\tau}^{C;\sigma}, \tag{11}$$

где структурные постоянные f равны

$$f_{\nu\beta;\sigma}^{\mu\alpha;\tau} = \delta_\beta^\mu \delta_\sigma^\alpha \delta_\nu^\tau - \delta_\nu^\alpha \delta_\sigma^\mu \delta_\beta^\tau. \tag{12}$$

Легко убедиться, что они удовлетворяют тождеству Якоби

$$f_{\beta\mu;\tau}^{\alpha\nu;\sigma} f_{\sigma\varepsilon;s}^{\tau\rho;\omega} + f_{\mu\varepsilon;\tau}^{\nu\rho;\sigma} f_{\sigma\beta;s}^{\tau\alpha;\omega} + f_{\varepsilon\beta;\tau}^{\rho\alpha;\sigma} f_{\sigma\mu;s}^{\tau\nu;\omega} = 0 \tag{13}$$

и обладают свойством антисимметрии:

$$f_{\beta\mu;\sigma}^{\alpha\nu;\rho} = -f_{\mu\beta;\sigma}^{\nu\alpha;\rho}.$$

При координатном преобразовании (6) вариация действия равна нулю:

$$\delta_C S_M = \int_{\Omega'} L_M'(x')\, d^4x' - \int_{\Omega} L_M(x)\, d^4x = 0. \tag{14}$$

Первый интеграл в (14) можно записать в виде

$$\int_{\Omega'} L_M'(x')\, d^4x' = \int_{\Omega} J L_M'(x')\, d^4x,$$

где

$$J = \det\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\right).$$

В первом порядке по ξ^α детерминант J равен

$$J = 1 + \partial_\alpha \xi^\alpha(x). \tag{15}$$

Учитывая разложение

$$L_M'(x') = L_M'(x) + \xi^\alpha(x) \frac{\partial L_M}{\partial x^\alpha},$$

а также (15), выражение для вариации можно представить в форме

$$\delta_C S_M = \int_{\Omega} [\delta L_M(x) + \partial_\alpha(\xi^\alpha L_M(x))]\, d^4x = 0.$$

В силу произвольности объема интегрирования Ω имеем тождество

$$\delta L_M(x) = -\partial_\alpha(\xi^\alpha(x) L_M(x)), \tag{16}$$

где вариация Ли δL_M равна

$$\delta L_M(x) = \frac{\partial L_M}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}} \delta \tilde{g}^{\mu\nu} + \frac{\partial L_M}{\partial(\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu})} \delta(\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}) + \frac{\partial L_M}{\partial \Phi_A} \delta\Phi_A + \frac{\partial L_M}{\partial(\partial_\alpha \Phi_A)} \delta(\partial_\alpha \Phi_A). \tag{17}$$

Отсюда, в частности, следует, что если скалярная плотность зависит только от $\tilde{g}^{\mu\nu}$ и ее производных $\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}$, то при преобразовании (8) она также изменится только на 4-дивергенцию

$$\delta L(\tilde{g}^{\mu\nu}(x)) = -\partial_\alpha(\xi^\alpha(x) L(\tilde{g}^{\mu\nu}(x))), \tag{16a}$$

где вариация Ли δL равна

$$\delta L(\tilde{g}^{\mu\nu}(x)) = \frac{\partial L}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}} \delta \tilde{g}^{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu})} \delta(\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}). \tag{17a}$$

Вариации Ли (8) были установлены как следствие координатных преобразований (6). Однако можно встать и на другую точку зрения, согласно которой преобразования (8) можно рассматривать как калибровочные. В этом случае произвольный бесконечно малый 4-вектор $\xi^\alpha(x)$ будет уже калибровочным вектором, а не вектором смещения координат. В дальнейшем, чтобы подчеркнуть отличие калибровочной группы от группы координатных преобразований, для группового параметра мы будем использовать обозначение $\varepsilon^\alpha(x)$, а преобразование полевых функций

$$\begin{aligned} &\tilde{g}^{\mu\nu}(x) \to \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \delta\tilde{g}^{\mu\nu}(x), \\ &\Phi_A(x) \to \Phi_A(x) + \delta\Phi_A(x) \end{aligned} \tag{18}$$

с приращениями

$$\begin{aligned} &\delta_\varepsilon \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \tilde{g}^{\mu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\nu(x) + \tilde{g}^{\nu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\mu(x) - D_\alpha(\varepsilon^\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}), \\ &\delta_\varepsilon \Phi_A(x) = -\varepsilon^\alpha(x) D_\alpha \Phi_A(x) + F^{B;\alpha}_{A;\beta} \Phi_B(x) D_\alpha \varepsilon^\beta(x) \end{aligned} \tag{19}$$

будем называть калибровочными преобразованиями.

В полном соответствии с формулами (9) и (10) операторы удовлетворяют той же алгебре Ли, т. е. коммутационному соотношению

$$[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}](\cdot) = \delta_{\varepsilon_3}(\cdot) \tag{20}$$

и тождеству Якоби

$$[\delta_{\varepsilon_1}, [\delta_{\varepsilon_2}, \delta_{\varepsilon_3}]] + [\delta_{\varepsilon_3}, [\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}]] + [\delta_{\varepsilon_2}, [\delta_{\varepsilon_3}, \delta_{\varepsilon_1}]] = 0. \tag{21}$$

Здесь аналогично (10) имеем

$$\varepsilon_3^\nu = \varepsilon_1^\mu D_\mu \varepsilon_2^\nu - \varepsilon_2^\mu D_\mu \varepsilon_1^\nu = \varepsilon_1^\mu \partial_\mu \varepsilon_2^\nu - \varepsilon_2^\mu \partial_\mu \varepsilon_1^\nu.$$

Калибровочная группа возникла из геометризованной структуры скалярной плотности лагранжиана вещества $L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Phi_A)$, которая в силу тождества (16) изменяется только на дивергенцию при калибровочных преобразованиях (19).

Таким образом, принцип геометризации, который определил универсальный характер взаимодействия вещества и гравитационного поля, дал нам возможность сформулировать некоммутативную бесконечномерную калибровочную группу (19).

Существенная разница между калибровочными и координатными преобразованиями проявится в теории в решающем месте, при построении скалярной плотности лагранжиана собственно гравитационного поля. Разница возникает из-за того, что при калибровочном преобразовании метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ не изменяется, следовательно, в силу (3) имеем

$$\delta_\varepsilon \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \delta_\varepsilon \tilde{\Phi}^{\mu\nu}(x).$$

На основании (19) следует преобразование для поля:

$$\delta_\varepsilon \widetilde{\Phi}^{\mu\nu}(x) = \widetilde{g}^{\mu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\nu(x) + \widetilde{g}^{\nu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\mu(x) - D_\alpha(\varepsilon^\alpha \widetilde{g}^{\mu\nu}),$$

но это преобразование для поля существенно отличается от его преобразования при смещении координат:

$$\delta_\xi \widetilde{\Phi}^{\mu\nu}(x) = \widetilde{\Phi}^{\mu\alpha} D_\alpha \xi^\nu(x) + \widetilde{\Phi}^{\nu\alpha} D_\alpha \xi^\mu(x) - D_\alpha(\xi^\alpha \widetilde{\Phi}^{\mu\nu}).$$

При калибровочных преобразованиях (19) уравнения движения для вещества не изменяются, поскольку при любых таких преобразованиях плотность лагранжиана вещества изменяется только на дивергенцию.

3. Плотность лагранжиана и уравнения движения для собственно гравитационного поля

Как известно, используя только тензор $g_{\mu\nu}$, невозможно построить скалярную плотность лагранжиана собственно гравитационного поля относительно произвольных координатных преобразований в виде квадратичной формы производных не выше первого порядка. Поэтому в такую плотность лагранжиана будет обязательно входить наряду с метрикой $g_{\mu\nu}$ также и метрика $\gamma_{\mu\nu}$. Но при калибровочном преобразовании (19) метрика $\gamma_{\mu\nu}$ не изменяется, следовательно, чтобы при этом преобразовании плотность лагранжиана собственно гравитационного поля изменялась только на дивергенцию, должны быть сильные ограничения на ее структуру. Именно здесь и возникает принципиальная разница между калибровочным и координатным преобразованиями. В то время как координатные преобразования не накладывают почти никаких ограничений на структуру скалярной плотности лагранжиана собственно гравитационного поля, калибровочные преобразования позволят нам найти плотность лагранжиана. Прямой общий метод построения лагранжиана приведен в монографии [2].

Здесь мы изберем более простой метод построения лагранжиана. На основании (16а) заключаем, что простейшие скалярные плотности $\sqrt{-g}$ и $\widetilde{R} = \sqrt{-g}R$, где R — скалярная кривизна эффективного риманова пространства, при калибровочном преобразовании (19) изменяются следующим образом:

$$\sqrt{-g} \to \sqrt{-g} - D_\nu(\varepsilon^\nu \sqrt{-g}), \tag{22}$$

$$\widetilde{R} \to \widetilde{R} - D_\nu(\varepsilon^\nu \widetilde{R}). \tag{23}$$

Скалярная плотность $\widetilde{R}$ выражается через символы Кристоффеля

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \tag{24}$$

следующим образом:

$$\widetilde{R} = -\widetilde{g}^{\mu\nu}(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}) - \partial_\nu(\widetilde{g}^{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\sigma} - \widetilde{g}^{\mu\sigma}\Gamma^\nu_{\mu\sigma}). \tag{25}$$

Поскольку символы Кристоффеля не являются тензорными величинами, каждое слагаемое в (25) не является скалярной плотностью. Однако если ввести тензорные величины $G^\lambda_{\mu\nu}$:

$$G^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(D_\mu g_{\sigma\nu} + D_\nu g_{\sigma\mu} - D_\sigma g_{\mu\nu}), \tag{26}$$

то скалярную плотность можно записать в виде

$$\widetilde{R} = -\widetilde{g}^{\mu\nu}(G^{\lambda}_{\mu\nu}G^{\sigma}_{\lambda\sigma} - G^{\lambda}_{\mu\sigma}G^{\sigma}_{\nu\lambda}) - D_{\nu}(\widetilde{g}^{\mu\nu}G^{\sigma}_{\mu\sigma} - \widetilde{g}^{\mu\sigma}G^{\nu}_{\mu\sigma}). \tag{27}$$

Заметим, что в (27) каждое слагаемое в отдельности ведет себя при произвольных координатных преобразованиях как скалярная плотность. Учитывая (22) и (23), можно заключить, что выражение

$$\lambda_1(\widetilde{R} + D_{\nu}Q^{\nu}) + \lambda_2\sqrt{-g} \tag{28}$$

при произвольных калибровочных преобразованиях изменяется только на дивергенцию. Выбирая векторную плотность Q^{ν} равной

$$Q^{\nu} = \widetilde{g}^{\mu\nu}G^{\sigma}_{\mu\sigma} - \widetilde{g}^{\mu\sigma}G^{\nu}_{\mu\sigma},$$

мы исключим из предыдущего выражения члены с производными выше первого порядка и получим следующую плотность лагранжиана:

$$-\lambda_1\widetilde{g}^{\mu\nu}(G^{\lambda}_{\mu\nu}G^{\sigma}_{\lambda\sigma} - G^{\lambda}_{\mu\sigma}G^{\sigma}_{\lambda\nu}) + \lambda_2\sqrt{-g}. \tag{29}$$

Таким образом, мы видим, что требование, чтобы плотность лагранжиана собственно гравитационного поля при калибровочном преобразовании (19) изменялась только на дивергенцию, однозначно определяет структуру плотности лагранжиана (29). Но если ограничиться только этой плотностью, тогда уравнения гравитационного поля будут калибровочно инвариантными, а метрика пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}$ не войдет в систему уравнений, определяемых плотностью лагранжиана (29). Поскольку в таком подходе исчезает метрика пространства Минковского, то и исключается возможность представления гравитационного поля (как физического поля типа Фарадея—Максвелла) в пространстве Минковского. При плотности лагранжиана (29) введение метрики $\gamma_{\mu\nu}$ с помощью уравнений (1) не спасает положение, поскольку физические величины: интервал и тензор кривизны риманова пространства, а также тензор $t_g^{\mu\nu}$ гравитационного поля будут зависеть от выбора калибровки, что физически недопустимо.

Для того чтобы сохранить представления о поле в пространстве Минковского и исключить такую неоднозначность, необходимо добавить в плотность лагранжиана гравитационного поля член, нарушающий калибровочную группу. На первый взгляд может показаться, что здесь возникает большой произвол в выборе плотности лагранжиана гравитационного поля, так как нарушить группу можно весьма различными способами. Однако оказывается, что это не так, поскольку наше физическое требование, налагаемое уравнениями (1) на поляризационные свойства гравитационного поля как поля со спинами 2 и 0, приводит к тому, что член, нарушающий группу (19), должен быть выбран таким образом, чтобы уравнения (1) являлись следствиями системы уравнений для гравитационного поля и полей вещества, ибо только в этом случае у нас не возникнет переопределенная система дифференциальных уравнений.

Для этой цели в скалярную плотность лагранжиана гравитационного поля введем член вида

$$\gamma_{\mu\nu}\widetilde{g}^{\mu\nu}, \tag{30}$$

который при наличии условий (1) и при преобразованиях (19) изменяется также на дивергенцию, но только на классе векторов, удовлетворяющих условию

$$g^{\mu\nu}D_{\mu}D_{\nu}\varepsilon^{\sigma}(x) = 0. \tag{31}$$

Почти аналогичная ситуация имеет место в электродинамике с массой покоя фотона, отличной от нуля. Учитывая (28)—(30), для общей скалярной плотности лагранжиана можно записать

$$L_g = -\lambda_1 \tilde{g}^{\mu\nu} (G^{\lambda}_{\mu\nu} G^{\sigma}_{\lambda\sigma} - G^{\lambda}_{\mu\sigma} G^{\sigma}_{\nu\lambda}) + \lambda_2 \sqrt{-g} + \lambda_3 \gamma_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} + \lambda_4 \sqrt{-\gamma}. \qquad (32)$$

Последний постоянный член в (32) мы ввели, чтобы с его помощью обратить в нуль плотность лагранжиана при отсутствии гравитационного поля. Сужение класса калибровочных векторов из-за введения члена (30) автоматически приводит к тому, что уравнения (1) будут следствиями уравнений гравитационного поля. В этом мы непосредственно убедимся ниже.

Согласно принципу наименьшего действия уравнения для собственно гравитационного поля имеют вид

$$\frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \lambda_1 R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \lambda_2 g_{\mu\nu} + \lambda_3 \gamma_{\mu\nu} = 0, \qquad (33)$$

где $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи — запишем в форме

$$R_{\mu\nu} = D_\lambda G^{\lambda}_{\mu\nu} - D_\mu G^{\lambda}_{\nu\lambda} + G^{\sigma}_{\mu\nu} G^{\lambda}_{\sigma\lambda} - G^{\sigma}_{\mu\lambda} G^{\lambda}_{\nu\sigma}. \qquad (34)$$

Поскольку в случае отсутствия гравитационного поля уравнения (33) должны тождественно выполняться, то

$$\lambda_2 = -2\lambda_3. \qquad (35)$$

Найдем теперь плотность тензора энергии-импульса гравитационного поля в пространстве Минковского:

$$t_g^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta L_g}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = 2 \sqrt{-\gamma} \left(\gamma^{\mu\alpha} \gamma^{\nu\beta} - \frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta} \right) \frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} + \lambda_1 J^{\mu\nu} -$$

$$- 2\lambda_3 \tilde{g}^{\mu\nu} - \lambda_4 \tilde{\gamma}^{\mu\nu}, \qquad (36)$$

где

$$J^{\mu\nu} = D_\alpha D_\beta (\gamma^{\alpha\mu} \tilde{g}^{\beta\nu} + \gamma^{\nu\alpha} \tilde{g}^{\beta\mu} - \gamma^{\alpha\beta} \tilde{g}^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta}). \qquad (37)$$

Если в выражении (36) учесть динамические уравнения (33), то мы получим уравнения для собственно гравитационного поля в форме

$$\lambda_1 J^{\mu\nu} - 2\lambda_3 \tilde{g}^{\mu\nu} - \lambda_4 \tilde{\gamma}^{\mu\nu} = t_g^{\mu\nu}. \qquad (38)$$

Для того чтобы это уравнение в случае отсутствия гравитационного поля удовлетворялось тождественно, необходимо положить

$$\lambda_4 = -2\lambda_3. \qquad (39)$$

Поскольку для собственно гравитационного поля всегда имеет место равенство

$$D_\mu t_g^{\mu\nu} = 0, \qquad (40)$$

из уравнения (38) следует

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \qquad (41)$$

Таким образом, уравнения (1), определяющие поляризационные состояния поля, непосредственно следуют из уравнений (38). С учетом уравнений (41) полевые уравнения (38) можно записать в виде

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\Phi}^{\mu\nu} - \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \tilde{\Phi}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\lambda_1} t_g^{\mu\nu}. \qquad (42)$$

В галилеевых координатах это уравнение имеет простой вид:

$$\Box\widetilde{\Phi}^{\mu\nu}-\frac{\lambda_4}{\lambda_1}\widetilde{\Phi}^{\mu\nu}=-\frac{1}{\lambda_1}t_g^{\mu\nu}. \tag{43}$$

Числовому фактору $-\lambda_4/\lambda_1$ естественно придать смысл квадрата массы гравитона m^2, а значение $-1/\lambda_1$ согласно принципу соответствия необходимо взять равным 16π. Таким образом, все неизвестные постоянные, входящие в плотность лагранжиана, определены:

$$\lambda_1=-\frac{1}{16\pi},\quad \lambda_2=\lambda_4=-2\lambda_3=\frac{m^2}{16\pi}. \tag{44}$$

Построенная скалярная плотность лагранжиана собственно гравитационного поля будет иметь вид

$$L_g=\frac{1}{16\pi}\widetilde{g}^{\mu\nu}(G^{\lambda}_{\mu\nu}G^{\sigma}_{\lambda\sigma}-G^{\lambda}_{\mu\sigma}G^{\sigma}_{\nu\lambda})-\frac{m^2}{16\pi}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\widetilde{g}^{\mu\nu}-\sqrt{-g}-\sqrt{-\gamma}\right). \tag{45}$$

Соответствующие ей динамические уравнения для собственно гравитационного поля могут быть записаны в форме

$$J^{\mu\nu}-m^2\widetilde{\Phi}^{\mu\nu}=-16\pi t_g^{\mu\nu} \tag{46}$$

или

$$R^{\mu\nu}-\frac{m^2}{2}(g^{\mu\nu}-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\gamma_{\alpha\beta})=0. \tag{47}$$

Эти уравнения существенно ограничивают класс калибровочных преобразований, оставляя лишь тривиальные, удовлетворяющие условиям Киллинга. Такие преобразования являются следствием лоренцевой инвариантности и имеют место в любой теории.

Построенная выше плотность лагранжиана приводит к уравнениям (47), из которых следуют уравнения (41), а поэтому вне вещества мы будем иметь десять уравнений для десяти неизвестных полевых функций. С помощью уравнений (41) неизвестные полевые функции $\Phi^{0\alpha}$ легко выражаются через полевые функции Φ^{ik}, где индексы i и k пробегают значения 1, 2, 3. Таким образом, в плотности лагранжиана собственно гравитационного поля структура массового члена, нарушающего калибровочную группу, однозначно определяется поляризационными свойствами гравитационного поля.

4. Уравнения движения для гравитационного поля и вещества

Полная плотность лагранжиана вещества и гравитационного поля равна

$$L=L_g+L_M(\widetilde{g}^{\mu\nu},\ \Phi_A), \tag{48}$$

где L_g определяется выражением (45).

На основании (48) с помощью принципа наименьшего действия получим полную систему уравнений для вещества и гравитационного поля:

$$\frac{\delta L}{\delta\widetilde{g}^{\mu\nu}}=0, \tag{49}$$

$$\frac{\delta L_M}{\delta\Phi_A}=0. \tag{50}$$

Поскольку при произвольном бесконечно малом изменении координат вариация действия δS_M равна нулю,

$$\delta S_M = \delta \int L_M (\tilde{g}^{\mu\nu}, \Phi_A)\, d^4x = 0,$$

отсюда можно получить тождество в форме [2]

$$g_{\mu\nu} \nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = -D_\nu \left(\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} F^{B;\nu}_{A;\mu} \Phi_B(x) \right) - \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} D_\mu \Phi_A(x). \tag{51}$$

Здесь $T^{\lambda\nu} = -2\delta L_M / \delta g_{\lambda\nu}$ — тензор вещества в римановом пространстве; ∇_λ — ковариантная производная в этом пространстве с метрикой $g_{\lambda\nu}$.

Из тождества (51) следует, что если выполняются уравнения движения вещества (50), то имеет место уравнение

$$\nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = 0. \tag{52}$$

В том случае, если число уравнений (50) для вещества равно четырем, вместо них можно использовать эквивалентные им уравнения (52). Поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело только с такими уравнениями для вещества, всегда будем пользоваться уравнениями для вещества в форме (52).

Таким образом, полная система уравнений для вещества и гравитационного поля будет иметь вид

$$\frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = 0, \tag{53}$$

$$\nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = 0. \tag{54}$$

Вещество будет описываться: скоростью $\mathbf{v}$, плотностью вещества ρ и давлением p. Гравитационное поле определяется десятью компонентами тензора $\Phi^{\mu\nu}$. Итак, мы имеем 15 неизвестных. Для их определения необходимо к 14 уравнениям (53)—(54) добавить уравнение состояния вещества. Если принять во внимание соотношения

$$\frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = -\frac{1}{16\pi} R_{\mu\nu} + \frac{m^2}{32\pi} (g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}), \tag{55}$$

$$\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \tag{56}$$

то систему уравнений (53) и (54) можно представить в форме

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) + \frac{m^2}{2} \left[g^{\mu\nu} + \left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \right) \gamma_{\alpha\beta} \right] = \frac{8\pi}{\sqrt{-g}} T^{\mu\nu}, \tag{57}$$

$$\nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = 0. \tag{58}$$

В силу тождества Бьянки,

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0,$$

из уравнений (57) имеем

$$m^2 \sqrt{-g} \left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \right) \nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} = 16\pi \nabla_\mu T^{\mu\nu}. \tag{59}$$

Учитывая выражение

$$\Delta_\mu \gamma_{\alpha\beta} = -G^\sigma_{\mu\alpha} \gamma_{\sigma\beta} - G^\sigma_{\mu\beta} \gamma_{\sigma\alpha}, \tag{60}$$

где $G^{\sigma}_{\mu\alpha}$ определено формулой (26), найдем

$$\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)\nabla_{\mu}\gamma_{\alpha\beta}=\gamma_{\mu\lambda}g^{\mu\nu}(D_{\sigma}g^{\sigma\lambda}+G^{\beta}_{\alpha\beta}g^{\alpha\lambda}), \tag{61}$$

но так как

$$\sqrt{-g}\,(D_{\sigma}g^{\sigma\lambda}+G^{\beta}_{\alpha\beta}g^{\alpha\lambda})=D_{\sigma}\widetilde{g}^{\lambda\sigma}, \tag{62}$$

выражение (61) принимает вид

$$\sqrt{-g}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)\nabla_{\mu}\gamma_{\alpha\beta}=\gamma_{\mu\lambda}g^{\mu\nu}D_{\sigma}\widetilde{g}^{\lambda\sigma}. \tag{63}$$

Используя (63), выражение (59) можно представить в форме

$$m^2\gamma_{\mu\lambda}g^{\mu\nu}D_{\sigma}\widetilde{g}^{\lambda\sigma}=16\pi\nabla_{\mu}T^{\mu\nu}.$$

Это выражение можно переписать в виде

$$m^2D_{\sigma}\widetilde{g}^{\lambda\sigma}=16\pi\gamma^{\lambda\nu}\nabla_{\mu}T^{\mu}_{\nu}. \tag{64}$$

С помощью соотношения (64) уравнение (58) можно заменить уравнением

$$D_{\sigma}\widetilde{g}^{\nu\sigma}=0. \tag{65}$$

Поэтому система уравнений (57) и (58) сводится к системе гравитационных уравнений в виде

$$\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)+\frac{m^2}{2}\left[g^{\mu\nu}+\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)\gamma_{\alpha\beta}\right]=\frac{8\pi}{\sqrt{-g}}T^{\mu\nu}, \tag{66}$$

$$D_{\mu}\widetilde{g}^{\mu\nu}=0. \tag{67}$$

Если ввести тензор

$$N^{\mu\nu}=R^{\mu\nu}-\frac{m^2}{2}\left[g^{\mu\nu}-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\gamma_{\alpha\beta}\right],\quad N=N^{\mu\nu}g_{\mu\nu},$$

то систему уравнений (66) и (67) можно записать в форме

$$N^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}N=\frac{8\pi}{\sqrt{-g}}T^{\mu\nu}, \tag{66a}$$

$$D_{\mu}\widetilde{g}^{\mu\nu}=0. \tag{67a}$$

Она может быть представлена также в виде

$$N^{\mu\nu}=\frac{8\pi}{\sqrt{-g}}\left(T^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}T\right), \tag{68}$$

$$D_{\mu}\widetilde{g}^{\mu\nu}=0 \tag{69}$$

или

$$N_{\mu\nu}=\frac{8\pi}{\sqrt{-g}}\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right), \tag{68a}$$

$$D_{\mu}\widetilde{g}^{\mu\nu}=0. \tag{69a}$$

Следует особо подчеркнуть, что как в систему (68), так и в систему уравнений (69) входит метрический тензор пространства Минковского.

Преобразования координат, которые оставляют метрику пространства Минковского форминвариантной, связывают физически эквивалентные системы отсчета. Простейшими из них будут инерциальные системы. Поэтому возможные калибровочные преобразования, удовлетворяющие условиям Киллинга:

$$D_\mu \varepsilon_\nu + D_\nu \varepsilon_\mu = 0,$$

не выводят нас из класса физически эквивалентных систем отсчета. Если мысленно допустить возможность экспериментального измерения характеристик риманова пространства и движения вещества со сколь угодно большой точностью, то на основании уравнений (68а) и (69а) мы можем определить метрику пространства Минковского и найти галилеевы (инерциальные) системы координат. Таким образом, пространство Минковского является в принципе наблюдаемым.

Существование пространства Минковского находит отражение в законах сохранения, а поэтому проверка их в физических явлениях является в то же время проверкой структуры пространства-времени.

Системе гравитационных уравнений можно придать и другую эквивалентную форму:

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \widetilde{\Phi}^{\mu\nu} + m^2 \widetilde{\Phi}^{\mu\nu} = 16\pi t^{\mu\nu}, \tag{70}$$

$$D_\mu \widetilde{\Phi}^{\mu\nu} = 0, \tag{71}$$

где $t^{\mu\nu} = -2\delta L/\delta\gamma_{\mu\nu}$ — плотность тензора энергии-импульса вещества и гравитационного поля в пространстве Минковского. Такая форма уравнений по виду напоминает уравнения электродинамики с массой фотона μ при отсутствии гравитации:

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta A^\nu + \mu^2 A^\nu = 4\pi j^\nu, \tag{72}$$

$$D_\nu A^\nu = 0. \tag{73}$$

Если в электродинамике источником векторного поля A^ν является сохраняющийся электромагнитный ток j^ν, создаваемый заряженными телами, то в РТГ источником тензорного поля является сохраняющийся полный тензор энергии-импульса вещества и гравитационного поля. Поэтому гравитационные уравнения будут нелинейными даже для собственно гравитационного поля.

Особо отметим, что в уравнениях (66) наряду с известным космологическим членом возник еще член, содержащий метрику $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского, причем оба этих члена вошли с общей постоянной, которая совпадает с массой гравитона, а потому она крайне мала. Второй массовый член в уравнениях (66), содержащий метрику $\gamma_{\mu\nu}$, приводит к возникновению сил отталкивания, которые весьма велики в сильных гравитационных полях. Это обстоятельство изменяет характер коллапса и развития Вселенной. Как мы видели ранее, наличие массы покоя гравитона имеет принципиальное значение для построения полевой теории гравитационного поля. Именно благодаря наличию массы гравитона из теории следует, что однородная и изотропная Вселенная может быть только плоской.

5. Принцип причинности в РТГ

РТГ построена в рамках специальной теории относительности подобно теориям других физических полей. Согласно специальной теории относительности любое движение какого-либо точечного пробного

тела всегда происходит внутри светового конуса причинности пространства Минковского. Следовательно, неинерциальные системы отсчета, реализуемые пробными телами, также должны находиться внутри конуса причинности псевдоевклидова пространства-времени. Этим самым определяется весь класс возможных неинерциальных систем отсчета. Локальная эквивалентность инерции и гравитации при действии на материальную точку будет иметь место, если световой конус эффективного риманова пространства не выходит за пределы светового конуса причинности пространства Минковского. Именно только в этом случае гравитационное поле, действующее на пробное тело, можно локально исключить, перейдя в допустимую неинерциальную систему отсчета, связанную с этим телом.

Если бы световой конус эффективного риманова пространства выходил за пределы светового конуса причинности пространства Минковского, то это бы означало, что для такого «гравитационного поля» не существует допустимой неинерциальной системы отсчета, в которой это «поле» при действии на материальную точку можно было бы исключить. Иными словами, локальная «эквивалентность» инерции и гравитации возможна лишь тогда, когда гравитационное поле как физическое поле, воздействуя на частицы, не выводит их мировые линии за пределы конуса причинности псевдоевклидова пространства-времени.

Данное условие следует рассматривать или как принцип причинности, или как принцип эквивалентности, позволяющий отбирать решения системы уравнений (66) и (67), которые имеют физический смысл и соответствуют гравитационным полям. Принцип причинности не выполняется автоматически. Это связано с тем, что гравитационное взаимодействие входит в коэффициенты при вторых производных в уравнениях поля, т. е. изменяет исходную геометрию пространства-времени. Эта особенность присуща только гравитационному полю. Взаимодействие всех других известных физических полей обычно не затрагивает вторых производных уравнений поля и поэтому не изменяет исходную псевдоевклидову геометрию пространства-времени.

Дадим теперь аналитическую формулировку принципа причинности в РТГ. Поскольку в РТГ движение вещества под действием гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве-времени эквивалентно движению вещества в соответствующем эффективном римановом пространстве-времени, то для причинно-связанных событий (мировых линий частиц и света), с одной стороны, мы должны иметь условие

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \geqslant 0, \tag{74}$$

а с другой стороны, для таких событий должно обязательно выполняться неравенство

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \geqslant 0. \tag{75}$$

Для выбранной системы отсчета, реализуемой физическими телами, имеет место условие

$$\gamma_{00} > 0. \tag{76}$$

В выражении (75) мы выделим времени- и пространственноподобные части:

$$d\sigma^2 = \left(\sqrt{\gamma_{00}}\, dt + \frac{\gamma_{0i}\, dx^i}{\sqrt{\gamma_{00}}}\right)^2 - S_{ik}\, dx^i\, dx^k. \tag{77}$$

Здесь латинские индексы i, k пробегают значения 1, 2, 3,

$$S_{ik} = -\gamma_{ik} + \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}}, \tag{78}$$

S_{ik} является метрическим тензором трехмерного пространства в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве-времени.

Квадрат пространственного расстояния определяется выражением

$$dl^2 = S_{ik}\, dx^i\, dx^k. \tag{79}$$

Представим скорость $v^i = dx^i/dt$ в виде $v^i = ve^i$, где v — величина скорости, e^i — произвольный единичный вектор в трехмерном пространстве:

$$S_{ik}e^ie^k = 1. \tag{80}$$

При отсутствии гравитационного поля скорость света в выбранной системе координат легко определяется из выражения (77), если положить его равным нулю:

$$\left(\sqrt{\gamma_{00}}\, dt + \frac{\gamma_{0i}\, dx^i}{\sqrt{\gamma_{00}}}\right)^2 = S_{ik}\, dx^i\, dx^k.$$

Отсюда находим

$$v = \sqrt{\gamma_{00}} \Big/ \left(1 - \frac{\gamma_{0i}e^i}{\sqrt{\gamma_{00}}}\right). \tag{81}$$

Таким образом, произвольный четырехмерный изотропный вектор в пространстве Минковского u^ν равен

$$u^\nu = (1,\ ve^i). \tag{82}$$

Для одновременного выполнения условий (74) и (75) необходимо и достаточно, чтобы для любого изотропного вектора

$$\gamma_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 0 \tag{83}$$

выполнялось условие причинности

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \leqslant 0, \tag{84}$$

которое и означает, что световой конус эффективного риманова пространства не выходит за пределы светового конуса причинности псевдоевклидова пространства-времени.

Условия причинности можно записать в следующей форме:

$$g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 0, \tag{83a}$$

$$\gamma_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geqslant 0. \tag{84a}$$

В ОТО физический смысл имеют такие решения уравнений Гильберта—Эйнштейна, которые удовлетворяют в каждой точке пространства-времени неравенству

$$g < 0,$$

а также требованию, называемому условием энергодоминантности, которое формулируется следующим образом: для любого времениподобного вектора K_ν должно выполняться неравенство

$$T^{\mu\nu}K_\mu K_\nu \geqslant 0,$$

а величина $T^{\mu\nu}K_\nu$ для данного вектора K_ν должна образовывать не пространственноподобный вектор.

В нашей теории физический смысл имеют такие решения уравнений (68а) и (69а), которые наряду с этими требованиями должны также удовлетворять условиям причинности (83а) и (84а). Последнее на основании уравнения (68а) можно записать в следующей форме:

$$R_{\mu\nu}K^{\mu}K^{\nu} \leqslant \frac{8\pi}{\sqrt{-g}}\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)K^{\mu}K^{\nu}+\frac{m^2}{2}g_{\mu\nu}K^{\mu}K^{\nu}. \tag{85}$$

В заключение данного параграфа отметим, что, хотя гравитационные уравнения (66) и (67) с массой гравитона были нами получены еще несколько лет назад, постепенно логика нашего построения привела к выводу о существовании массы покоя гравитона, поскольку именно только она позволяет построить теорию тензорного поля в пространстве Минковского, которая приводит к эффективной римановой геометрии пространства-времени.

6. Некоторые физические выводы РТГ

Система уравнений РТГ (66) и (67) приводит к совершенно другим качественно новым физическим выводам по сравнению с ОТО. Так, например, совершенно меняется представление о коллапсе. Оказывается, что при коллапсе сферически симметричного тела произвольной массы процесс сжатия в области, близкой к сфере Шварцшильда, останавливается и сменяется последующим расширением. Это означает, что в природе наряду с сжимающимися должны существовать и расширяющиеся объекты. Таким образом, согласно РТГ существование в природе «черных дыр» (объектов, не имеющих материальных границ и «отрезанных» от внешнего мира) полностью исключается.

Другой важный физический вывод относится к развитию однородной и изотропной Вселенной. Из уравнений (66) и (67), а также условий причинности (83) и (84) следует, что однородная и изотропная Вселенная существует бесконечное время и ее трехмерная геометрия является евклидовой. Развитие Вселенной идет циклически от максимальной конечной плотности до минимальной, затем опять до максимальной (в случае отсутствия диссипации) и т. д. Теория предсказывает существование во Вселенной большой «скрытой» массы вещества, так как, согласно уравнениям (66) и (67), полная плотность вещества в настоящее время равна

$$\rho=\rho_c+\frac{1}{16\pi G}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2. \tag{86}$$

Отсюда видно, что плотность вещества даже для достаточно малой массы гравитона близка к критической плотности ρ_c, определяемой постоянной Хаббла H:

$$\rho_c=\frac{3H^2}{8\pi G}. \tag{87}$$

РТГ объясняет все известные гравитационные эксперименты в Солнечной системе и позволяет, как мы видели ранее, ввести для гравитационного поля, так же, как это имеет место для других физических полей, понятие тензора энергии-импульса. Тензор энергии-импульса $-2\delta L_g/\delta g_{\mu\nu}$ гравитационного поля в римановом пространстве вне вещества согласно уравнениям (66) равен нулю. Однако это не означает отсутствия гравитационного излучения, поскольку гравитационная волна, переносящая энергию, движется на эффективном гравитационном фоне.

Что касается гравитационного излучения массивных гравитонов, то этот вопрос рассмотрен в статье [3], в которой показано, что проводившиеся ранее расчеты основывались на некорректно полученном общем выражении для интенсивности (т. е. при его выводе не учитывался тот важный факт, что в действительности гравитоны распространяются не в пространстве Минковского, а в эффективном римановом пространстве). Учет этого обстоятельства привел автора [3] к утверждению, что интенсивность гравитационного излучения массивных гравитонов является положительно-определенной величиной.

Система гравитационных уравнений РТГ (66) и (67) открывает новые возможности для исследований как в принципиальном плане, так и в конкретном при изучении тех или иных гравитационных явлений.

В заключение можно сделать важные замечания. Можно ли положить массу гравитона равной нулю? Поскольку масса гравитона в нашей теории снимает вырождение по калибровочной группе, полагать ее равной нулю непосредственно в уравнениях (66) и (67) некорректно. В нашей теории она не должна быть равной нулю. Система гравитационных уравнений (66) и (67) является гиперболической, причем принцип причинности обеспечивает существование во всем пространстве пространственноподобной поверхности, которую каждая не пространственноподобная кривая в римановом пространстве пересекает только один раз, т. е., иначе говоря, существует глобальная поверхность Коши, на которой и задаются для той или иной задачи начальные физические условия.

Пенроузом и Хокингом [4] доказаны теоремы о существовании при определенных общих условиях сингулярности в ОТО. Поскольку на основании уравнений (68а) вне вещества для изотропных векторов риманова пространства в силу условий причинности (85) имеет место неравенство

$$R_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu}\leqslant 0, \tag{88}$$

то условия теорем о существовании сингулярности в РТГ не выполняются, следовательно, и их утверждения для РТГ неприменимы. В данной теории пространственноподобные события в отсутствие гравитационного поля никогда не могут стать под действием гравитационного поля времениподобными. В силу принципа причинности эффективное риманово пространство-время в РТГ будет обладать изотропной и времениподобной геодезической полнотой.

На основании всего изложенного выше можно сделать следующий общий вывод. Если в силу универсальности гравитации принять, что источником гравитационного поля в пространстве Минковского является сохраняющийся тензор энергии-импульса вещества и массивного гравитационного поля, то само это поле будет проявляться как тензорное поле второго ранга. По аналогии с электродинамикой уравнения поля естественно записать в следующем виде:

$$\Box\Phi^{\mu\nu}+m^2\Phi^{\mu\nu}=\lambda t^{\mu\nu},\ \partial_{\mu}\Phi^{\mu\nu}=0.$$

Но такая система уравнений следует из лагранжева формализма только в том случае, если взаимодействие вещества и гравитационного поля осуществляется согласно принципу геометризации, который и сводит действие этого поля к эффективной геометрии пространства-времени.

Таким образом, принятие сохраняющегося тензора энергии-импульса материи как универсального источника гравитационного поля с не-

обходимостью приводит к эффективной римановой геометрии. Поскольку полевая теория гравитации требует введения массы гравитона, а по структуре она близка к электродинамике, то вполне вероятно, что масса покоя фотона также не равна нулю.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Poincare H.//Bulletin des Sciences Mathematiques. 1904. 28. Ser. 2. P. 302; Poincare H.//Compt. Rend. Akad. Sci. (Paris). 1905. **140**. P. 1504; Poincare H.// Rend. Circ. Math. (Palermo). 1906. **21**. P. 129. [2] Logunov A. A., Mestvirishvili M. A. The Relativistic Theory of Gravitation. Moscow, 1989; Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Релятивистская теория гравитации. М., 1989; Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Основы релятивистской теории гравитации. М., 1986. [3] Лоскутов Ю. М.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. **32**, № 4. С. 49. [4] Penrose R.//Phys. Rev. Lett. 1965. **14**. P. 57; Hawking S. W., Penrose R.//Proc. Roy. Soc. (London). 1970. **A314**. P. 529; Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. М., 1977.

Поступила в редакцию
29.12.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1993. Т. 34, № 4

УДК 517.93

О ДИНАМИКЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

А. Ю. Лоскутов, С. Д. Рыбалко
(кафедра физики низких температур)

Рассматривается стандартное синусное отображение окружности, эффективно описывающее переход от квазипериодического движения к хаосу в нелинейных системах. Для ряда значений параметров, соответствующих хаотической динамике такого отображения, рассчитаны инвариантные распределения. Показано, что определенные параметрические воздействия на отображение окружности, находящееся в хаотическом режиме, приводят к подавлению хаоса — параметрической дестохастизации.

1. Введение

При анализе многих физических систем часто прибегают к построению соответствующих математических моделей. Такое моделирование призвано помочь исследованию и объяснению наблюдаемых явлений. Любая математическая модель, естественно, не является полностью адекватной реальному объекту, поскольку при ее построении, как правило, прибегают к разнообразным физическим приближениям и допущениям. Это, например, почти всегда приводит к неточному заданию необходимых коэффициентов в уравнениях. Если система является хаотической, то эти приближения могут оказаться весьма существенными и неожиданно сильно отразиться на динамике, так что поведение модели будет *качественно* не согласовываться с оригиналом. В частности, при численном моделировании вследствие конечного представления числа может оказаться, что модель демонстрирует регулярные свойства, в то время как оригинал проявляет хаос, или наоборот [1].

Цель данной работы — показать, что определенные малые аддитивные и даже чисто параметрические возмущения, вносимые в систему с хаотическим поведением, могут привести к *дестохастизации* — подавлению хаоса. Ранее такая возможность уже была показана на