

обходимостью приводит к эффективной римановой геометрии. Поскольку полевая теория гравитации требует введения массы гравитона, а по структуре она близка к электродинамике, то вполне вероятно, что масса покоя фотона также не равна нулю.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Poincaré H.//Bulletin des Sciences Mathematiques. 1904. 28. Ser. 2. P. 302; Poincaré H.//Compt. Rend. Akad. Sci. (Paris). 1905. 140. P. 1504; Poincaré H.//Rend. Circ. Math. (Palermo). 1906. 21. P. 129. [2] Logunov A. A., Mestvirishvili M. A. The Relativistic Theory of Gravitation. Moscow, 1989; Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Релятивистская теория гравитации. М., 1989; Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Основы релятивистской теории гравитации. М., 1986. [3] Лоскутов Ю. М.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. 32, № 4. С. 49. [4] Penrose R.//Phys. Rev. Lett. 1965. 14. P. 57; Hawking S. W., Penrose R.//Proc. Roy. Soc. (London). 1970. A314. P. 529; Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. М., 1977.

Поступила в редакцию
29.12.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1993. Т. 34, № 4

УДК 517.93

О ДИНАМИКЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

А. Ю. Лоскутов, С. Д. Рыбалко
(кафедра физики низких температур)

Рассматривается стандартное синусное отображение окружности, эффективно описывающее переход от квазипериодического движения к хаосу в нелинейных системах. Для ряда значений параметров, соответствующих хаотической динамике такого отображения, рассчитаны инвариантные распределения. Показано, что определенные параметрические воздействия на отображение окружности, находящееся в хаотическом режиме, приводят к подавлению хаоса — параметрической дестохастизации.

1. Введение

При анализе многих физических систем часто прибегают к построению соответствующих математических моделей. Такое моделирование призвано помочь исследованию и объяснению наблюдаемых явлений. Любая математическая модель, естественно, не является полностью адекватной реальному объекту, поскольку при ее построении, как правило, прибегают к разнообразным физическим приближениям и допущениям. Это, например, почти всегда приводит к неточному заданию необходимых коэффициентов в уравнениях. Если система является хаотической, то эти приближения могут оказаться весьма существенными и неожиданно сильно отразиться на динамике, так что поведение модели будет *качественно* не согласовываться с оригиналом. В частности, при численном моделировании вследствие конечного представления числа может оказаться, что модель демонстрирует регулярные свойства, в то время как оригинал проявляет хаос, или наоборот [1].

Цель данной работы — показать, что определенные малые аддитивные и даже чисто параметрические возмущения, вносимые в систему с хаотическим поведением, могут привести к *дестохастизации* — подавлению хаоса. Ранее такая возможность уже была показана на

некоторых примерах [2—7]. Однако представляется интересным изучить феномен дестохастизации на достаточно общих системах (отображениях), которые эффективно описывают определенный сценарий развития хаоса [8].

Явление дестохастизации видится особенно важным с двух точек зрения. Во-первых, появляется возможность детерминированно предсказывать эволюцию систем, демонстрирующих хаотическое поведение. Во-вторых, для подавления хаоса параметрическим способом в отличие от силового воздействия [9—12] требуется значительно меньше энергетических затрат, что может быть использовано для создания эффективных нейронных сетей [13—15].

2. Динамическая система при параметрическом воздействии

При математическом моделировании обычно строится динамическая система с непрерывным или дискретным временем. В первом случае объектом исследований являются дифференциальные уравнения (потоки), во втором — отображения (каскады). Переход от потоков к каскадам достаточно хорошо известен и осуществляется при помощи построения сечения последования (или отображения Пуанкаре). Суть такого перехода заключается в следующем. В фазовом пространстве динамической системы выбирается секущая гиперповерхность S координатности 1 трансверсально траекториям движения. Траектории будут общим образом пересекать гиперповерхность. Отметим только такие точки пересечения, которые образуются при протыкании гиперповерхности S траекториями лишь в одном направлении. Тогда изучение поведения системы сводится к анализу полученных точек пересечения: Вводя на S локальные координаты, найдем, что такие пересечения можно рассматривать как последовательные преобразования некоторой области на S в себя:

$$y_{n+1} = f(y_n, \mu), \quad (1)$$

где $y_n = \{y_n^1, \dots, y_n^k\}$ — координаты n -й точки пересечения фазовой траектории с гиперповерхностью S , n — номер пересечения, $f = \{f_1, \dots, f_k\}$ — закон преобразования точки в точку на поверхности S , μ — параметр.

Существует и обратная конструкция, позволяющая перейти от отображений к потокам [16].

Часто в качестве математической модели рассматривают одномерное отображение, т. е. отображение (1), в котором $k=1$:

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu). \quad (2)$$

К описанию с помощью отображений (2) прибегают также, когда диссипация в системе достаточно велика. В этом случае точки пересечения фазовой траектории и секущей S будут ложиться на почти одномерную кривую, а такую кривую естественно описывать одномерным преобразованием. Однако одномерные отображения естественно возникают и вне всякой связи с дифференциальными уравнениями. Например, динамика численности популяций [17—19], некоторые нелинейные системы с периодическим возбуждением [20—21] и ряд других систем [22—23] хорошо описываются при помощи (2).

Всякая динамическая система почти всегда подвержена воздействию разнообразных источников. В качестве таких источников могут выступать окружающая среда, другие системы и т. п. В свою очередь, внешнее воздействие может быть как аддитивным, так и мультиплика-

тивными. В первом случае при описании посредством отображения (2) в правую часть необходимо добавить определенную величину ξ_n , отвечающую внешнему воздействию:

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu) + \xi_n. \quad (3)$$

Если функция f включает параметр μ аддитивным образом, то иногда такое воздействие может быть рассмотрено как изменение в зависимости от n аддитивного параметра: $\mu = \mu(n) \equiv \mu_n$. Тогда отображение (3) запишется как

$$x_{n+1} = F(x_n, \mu_n), \quad (4a)$$

где, подчеркнем, параметр μ_n входит в функцию F аддитивно.

Во втором случае систему часто описывают с помощью уравнений или отображений с переменными коэффициентами:

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu_n), \quad \mu_n \equiv \mu(n), \quad (4б)$$

где параметр μ_n уже не аддитивно включается в функцию f , а входит мультипликативно. Очевидно, отображения (4a) и (4б) не сводимы друг к другу.

Важное приложение отображений в (3) и (4a, б) возникает при рассмотрении k -мерной ($k \geq 1$) сети одномерных отображений (2). Когда взаимодействие (сцепление) в сети происходит параметрически, то для некоторых задач динамику такой системы описывают в приближении одного отображения (4a, б) из сети и постоянно действующего параметрического фона, образованного остальными отображениями. При сцеплении общим образом рассматривается отображение (3) или комбинация (3) и (4a, б).

Изменение параметра μ_n от итерации к итерации в отображениях (4a) и (4б) можно интерпретировать как воздействие окружающей среды. Если это воздействие неперiodическое, то μ_n в общем случае будет изменяться тоже неперiodически. Когда воздействие перiodическое, то последовательность значений μ_n будет образована совокупностью подпоследовательностей некоторой длины m : $\mu_{n+m} = \mu_n$, $\mu_{n+k} \neq \mu_n$, $1 \leq k < m$.

Ниже мы рассмотрим только перiodическое изменение μ_n . Какой тогда может быть динамика отображений (4)? Ответ на этот вопрос зависит от того, какие значения принимают параметры μ_1, \dots, μ_m . Если каждый из них соответствует регулярному поведению отображения (2), то следует ожидать, что и отображения (4a, б) будут демонстрировать регулярную динамику, во всяком случае численные исследования однозначно указывают на это.

Пусть теперь $\mu_i \in [\mu', \mu'']$, $i=1, \dots, m$, где всюду на интервале $[\mu', \mu'']$ отображение (2) имеет хаотический режим эволюции. На первый взгляд кажется очевидным, что и отображения (4a) и (4б) тоже будут проявлять хаотические свойства и характеризоваться положительным показателем Ляпунова. Однако в общем случае это не так. Известно [2—7], что при параметрическом воздействии на системы дифференциальных уравнений с квазистохастическим аттрактором он вырождается в устойчивый предельный цикл. При этом возмущаемый параметр всегда оставался в области, отвечающей существованию такого аттрактора [2—3]. Для отображений оказывается справедливым аналогичный результат. При определенных значениях параметров (которые мы обозначим как μ_i^d , $i=1, \dots, m$, индекс « d » — от слова «де-

стохастизация»), удовлетворяющих условию $\mu^d \in [\mu', \mu'']$; отображения (4а) и (4б) будут иметь регулярное поведение.

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим конкретное отображение — отображение окружности, которое часто используется при описании перехода системы от квазипериодических колебаний к хаотическим.

3. Параметрические возмущения отображения окружности

Во многих случаях динамика системы, описывающей тот или иной процесс, может быть представлена как движение по инвариантному тору с собственными частотами ω_1 и ω_2 . Если эти частоты соизмеримы, т. е. $\omega_1/\omega_2 = k/m$, где k и m — взаимно простые числа, то фазовая траектория замыкается, совершив k обращений по координате φ и m обращений по координате ψ на торе (рис. 1, а). В этом случае динамика системы является периодической, и отображение Пуанкаре (рис. 1, б) представляет собой конечный набор точек на секущей, при итерациях последовательно переходящих друг в друга. Когда частоты ω_1 и ω_2 являются несоизмеримыми, т. е. ω_1/ω_2 — иррациональное число, то фазовая траектория при $t \rightarrow \infty$ покрывает его всюду плотно. Динамика системы при этом будет квазипериодической, и в отображении Пуанкаре наблюдается инвариантная замкнутая кривая. Подходящим преобразованием эту инвариантную кривую можно превратить в

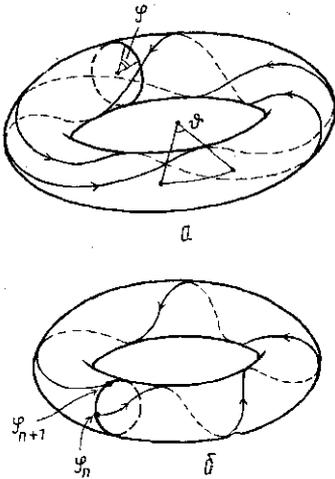


Рис. 1. Фазовая траектория на торе при $\omega_1/\omega_2 = 5/2$ (а) и отображение Пуанкаре как функция φ_{n+1} от φ_n (б)

окружность. Таким образом, поведение системы можно изучать при помощи отображения окружности.

К исследованию отображения окружности приводят многие задачи, например периодически возбуждаемый контакт Джозефсона [24], некоторые задачи химической кинетики [25] и др. [26—28].

Выберем в качестве координаты на торе угол φ (рис. 1, б). Тогда в общем случае в отображении Пуанкаре будем иметь

$$\varphi_{n+1} = f(\varphi_n, \mu) = \varphi_n + g(\varphi_n, \mu), \text{ mod } 2\pi, \quad (5)$$

где μ — параметр, $g(\cdot)$ — сдвиг по φ . Значение φ и функция g определяются с точностью до 2π . Если преобразование f является гладким, то g — гладкая периодическая функция, $g(\varphi + 2\pi, \mu) = g(\varphi, \mu)$.

Функция f может быть как монотонно возрастающей на $[0, 2\pi]$ (и потому взаимно-однозначной), так и имеющей максимум и минимум (т. е. не взаимно-однозначной). Для монотонной функции f характер динамики отображения (5) определяется значением числа вращения, которое можно записать как

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \frac{f^{(n)} - \varphi_0}{n}, \quad (6)$$

где $f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ раз}}$ — n -я итерация отображения. Если ρ является рациональным числом, $\rho = p/q$, то отображение окружности будет иметь

ражение (8) порождает устойчивые циклы конечного периода, т. е. имеет место дестохастизация.

С целью подробного анализа отображения (8) выберем для простоты $m=2$. Тогда величины $a_1, a_2 \in A_c$ образуют 2-цикл, а отображение (8) переписывается как

$$\begin{aligned} \varphi_{2n+1} &= \varphi_{2n} + a_1 + b \sin \varphi_{2n}, \\ \varphi_{2n+2} &= \varphi_{2n+1} + a_2 + b \sin \varphi_{2n+1}, \text{ mod } 2\pi. \end{aligned} \quad (9)$$

Критерием хаотичности и регулярности поведения отображений может служить показатель Ляпунова, который рассчитывается из формулы

$$\Lambda(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{df}{dx} \right|_{x_i}. \quad (10)$$

Если $\Lambda(x_0) > 0$, то отображение порождает при данных x_0 непериодические последовательности, не стремящиеся с увеличением итераций n к периодическим. Если же $\Lambda(x_0) < 0$, то отображение имеет периодическую динамику.

Прежде чем анализировать отображение (9) и искать параметры дестохастизации $a_{1,2}^d \in A_c$, $b = \text{const} > 1$, необходимо учесть ряд существенных замечаний, которые состоят в следующем. Допустим сначала, что отображение окружности (7) при $a=a_1$ имеет устойчивый k -цикл, а при $a=a_2$ — устойчивый l -цикл (при одном и том же значении $b = \text{const}$). Напомним, что для численного наблюдения цикла любой кратности необходимо произвести предварительные итерации (число которых в некоторых случаях может быть достаточно велико) для того, чтобы избежать переходных процессов. Обозначим через N_{\min} минимальное число итераций, необходимых для выхода отображения на цикл при фиксированных параметрах. Если подобрать начальное условие φ_0 так, чтобы итерации сразу попали на цикл, то $N_{\min} = 0$. Но практически выбрать так начальные условия для достаточно сложного цикла невозможно, а вероятность случайного попадания на него равна нулю. Следовательно, отображение (9) при не специально выбранных φ_0 может демонстрировать самое разное поведение, поскольку при $a=a_1$ для отображения (7) минимальное число итераций одно, равное $N_{\min}^{(1)}$, а при $a=a_2$, вообще говоря, — другое: $N_{\min}^{(2)}$. Изображающая точка в этом случае будет достаточно долго находиться в переходном состоянии, так что в целом динамика отображения (9) оказывается хотя и регулярной, но в некоторых случаях может быть очень сложной.

Допустим теперь, что отображение (7) демонстрирует хаотическую динамику и при $a=a_1$ и при $a=a_2$, $b = \text{const} > 1$. В этом случае также требуется определенное число предварительных итераций, $N_{\min}^{(1)}$ для $a=a_1$ и $N_{\min}^{(2)}$ для $a=a_2$, чтобы поведение системы установилось. Если опять выбрать начальные условия так, чтобы φ_n попала на хаотическую траекторию, то $N_{\min} = 0$. Когда значения a_1 и a_2 близки, то можно ожидать, что области, занятые хаотическими траекториями $\varphi_0^1, \varphi_1^1, \varphi_2^1, \dots, \varphi_n^1, \dots$ (для $a=a_1$) и $\varphi_0^2, \varphi_1^2, \varphi_2^2, \dots, \varphi_n^2, \dots$ (для $a=a_2$) при $n \rightarrow \infty$ будут перекрываться. Иными словами, в отображении окружности (7) найдутся одни и те же значения φ_0 , для которых и $N_{\min}^{(1)} = 0$ и $N_{\min}^{(2)} = 0$ при $a=a_1$ и $a=a_2$ соответственно.

Таким образом, для корректного перехода от невозмущенного отображения (7) к возмущенному (9) с условием $a_1, a_2 \in A_c$, необходимо в (9) так определить φ_0 , чтобы $N_{\min}^{(i)}|_{a=a_i} = 0$, $i = 1, 2$. То же относится

и к более сложному отображению (8). Выполнение этих условий гарантирует, что возмущенное отображение (9) или (8) не будет испытывать сложных переходных процессов, связанных с различными значениями $N_{\min}^{(i)}$, $i=1, 2, \dots, m$.

Для удовлетворения требования $N_{\min}^{(i)}|_{a=a_i} = 0$, $i=1, \dots, m$, необходимо рассчитать для каждого a_i , $i=1, \dots, m$, в отображении (7) распределение вероятности $P_i(\varphi)$ и найти значения φ , при которых P_i перекрываются. Распределение $P(\varphi)$ показывает, какова вероятность попадания в данную точку интервала $[0, 2\pi]$ изображающей точки отображения окружности при $n \rightarrow \infty$. Для устойчивых k -циклов распределение $P(\varphi)$ представляет собой суперпозицию δ -функций, расположенных в соответствующих этому циклу неподвижных точках. В случае хаотической динамики $P(\varphi)$ может иметь конечное значение в некоторых интервалах значений φ в диапазоне $[0, 2\pi]$.

Вернемся к отображению (9). Для удовлетворения условия $a_1, a_2 \in A_c$ легче всего выбрать дискретный шаг Δa по параметру a , $b = \text{const} > 1$ и определить дискретные интервалы хаотичности $D_i(\Delta a, b)$, в которых отображение (7) демонстрирует хаотическое поведение. Например, при $b=2,0$, $\Delta a=10^{-3}$ и $\varphi_0=5,0$ в области $2 \leq a \leq 5$ эти интервалы суть $D_1=[2,001; 2,033]$, $D_2=[2,035]$, $D_3=[2,037]$, $D_4=[2,039; 2,062]$, $D_5=[2,064; 2,109]$, $D_6=[2,111; 2,135]$, $D_7=[2,137; 2,158]$, $D_8=[2,160; 2,178]$, $D_9=[2,180]$, $D_{10}=[2,182; 2,241]$, $D_{11}=[2,243; 2,279]$, $D_{12}=[2,281; 2,342]$. Теперь для каждой из точек выбранного интервала (или интервалов) $D_j(\Delta a, b)$ необходимо посчитать распределения вероятности $P(\varphi)$, определить области их перекрытия по φ , выбрать значения φ_0 для отображения (9) и только потом отыскать величины $a_1^d, a_2^d \in A_c$, при которых в (9) выполняется $\Lambda(\varphi_0) < 0$. Нетрудно видеть, что описанный путь поиска параметров дестохастизации $a_{1,2}^d$ является весьма трудоемким. Если же в отображении (8) $m > 2$, то он становится вообще труднообозримым. Тем не менее для отображения (9) нам удалось численно отыскать множество значений $a_1^d, a_2^d \in A_c$, при которых это отображение порождает устойчивые циклы конечного периода.

Устойчивый цикл наименьшего периода (равного 6) в отображении (9) имеет место при $b=2,3$, $a_1^d=2,832$, $a_2^d=2,833$ и $\varphi_0=5,68$. Он формируется следующими неподвижными точками: $\varphi_1^*=0,4430$, $\varphi_2^*=0,8887$, $\varphi_3^*=4,2610$, $\varphi_4^*=5,0244$, $\varphi_5^*=5,5061$, $\varphi_6^*=5,6674$. Распределение вероятности $P(\varphi)$ для указанных значений параметров a_1, a_2 и b показано на рис. 2, а, б, откуда следует, что $P(\varphi)|_{a_1}$ и $P(\varphi)|_{a_2}$ имеют много общего и перекрываются по φ в нескольких местах.

Для $b=2,0$, $\Delta a=10^{-3}$ и дискретного интервала хаотичности $D(\Delta a, b)=D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ (см. выше) области дестохастизации отображения (9) в пространстве параметров (a_1, a_2) показаны на рис. 3.

При $m > 2$ исследование отображения (8) сильно усложняется. Однако явление дестохастизации в этом случае также имеет место. Нам удалось проследить за возможностью подавлять хаос вплоть до значения $m=8$. Дальнейшее увеличение m сопряжено со значительными техническими трудностями и поэтому не проводилось.

Таким образом, определенное изменение аддитивного параметра (которое можно рассматривать не только как параметрическое воздействие, но иногда как силовое, см. (4а)) приводит к вырождению хаотического поведения и переходу системы в режим устойчивых регулярных колебаний. Остановимся теперь на случае мультипликативного влияния на систему, соответствующем рассмотренному выше отображению (4б).

Пусть в отображении окружности (7) параметр b является управляющим, $b = b(n) \equiv b_n$, а параметр a остается постоянным. Тогда в отображении (8) необходимо положить $a_1 = a_2 = \dots = a_m = a$ и $b = b_n > 1$; $b_{m+n} = b_n$, $b_{k+n} \neq b_n$ для $1 \leq k < m$. Однако эти изменения, как следует из

численного анализа, не отразятся на основных выводах. Среди всевозможных значений $b_i \in B_c$, $i = 1, \dots, m$, $a = \text{const}$, при которых отображение окружности (7)

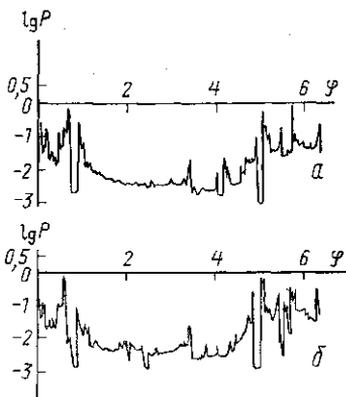


Рис. 2. Распределение вероятности для отображения (7) при $b = 2,3$ и $a = 2,832$ (а) и $a = 2,833$ (б)

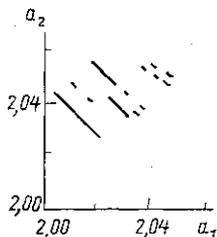


Рис. 3. Области дестохастизации отображения (9) в интервале $D = D_1 \cup \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$

проявляет хаотические свойства, имеются определенные величины $b_i^d \in B_c$, приводящие к переходу возмущаемого отображения (8) из режима установившихся хаотических колебаний на периодический режим. Здесь B_c — множество значений параметра $b > 1$, $a = \text{const}$, соответствующее хаотической динамике отображения (7). Этот переход, следуя описанному выше плану, нам удалось проследить для значений $2 < m \leq 5$. Например, при $m = 2$, $a = 2,8$, $b_1^d = 2,447$, $b_2^d = 2,454$ отображение (8) порождает устойчивый 6-цикл, формируемый точками $\varphi_1^* = 4,291781$, $\varphi_2^* = 4,851670$, $\varphi_3^* = 5,228366$, $\varphi_4^* = 5,893849$, $\varphi_5^* = 1,481846$, $\varphi_6^* = 0,442959$. Для $m = 3$, $a = 2,8$ и $b_1^d = 2,511$, $b_2^d = 2,512$, $b_3^d = 2,513$ становится устойчивым 16-цикл, для $m = 4$, $a = 2,8$ и $b_1^d = 2,438$, $b_2^d = 2,439$, $b_3^d = 2,460$, $b_4^d = 2,470$ будет устойчивым 12-цикл и т. д. Вообще говоря, при одних и тех же значениях m и a и различных b_1^d, \dots, b_m^d отображение (8) может порождать циклы различной кратности.

Таким образом, определенные возмущения параметра, входящего в систему мультипликативно, приводят к появлению порядка из хаоса, т. е. к дестохастизации.

4. Заключение

При математическом описании физических систем всегда неизбежны приближения. Такие приближения обычно не учитывают малых внешних воздействий. Как правило, считается, что их можно не рассматривать. Однако, как следует из изложенного, это не всегда допустимо. Малые внешние периодические изменения параметров, как бы эти параметры ни входили в уравнения, аддитивно или мультипликативно, могут привести к качественно неверному представлению о динамике моделируемой системы, и заранее неизвестно, включать такие периодические возмущения в математическую модель или ими можно

пренебречь. Поэтому при моделировании систем с хаотическим поведением следует с большой осторожностью относиться к результатам численных расчетов.

Сказанное относится и к системам, в которых хаос рождается путем бесконечной цепочки бифуркаций удвоения периода и эффективно описывается при помощи квадратичных отображений [34].

Другая важная сторона полученных результатов — явление самоорганизации. По-видимому, дестохастизация является неотъемлемым элементом процессов самоорганизации в различных системах, когда видимый порядок рождается из развитого хаоса. И хотя мы описали параметрическую дестохастизацию только в сосредоточенных системах, в распределенных средах, вероятно, может иметь место аналогичная ситуация: достигается пространственно-временное упорядочение. Предварительные численные исследования в этом направлении указывают, что определенное параметрическое воздействие на распределенные системы иногда приводит к образованию сложных упорядоченных пространственно-временных картин.

Работа частично поддерживалась факультетом прикладной математики Российского открытого университета.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Corless R. M., Essex C., Nerenberg M. A. H. // *Phys. Lett.* 1991. 157A. P. 29. [2] Алексеев В. В., Лоскутов А. Ю. // Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. Л., 1985. Т. 8. С. 175. [3] Лоскутов А. Ю. *Деп. ВИНТИ* № 4802-B87. М., 1987. [4] Грибков Д. А., Кузнецов Ю. И. // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* 1989. 30, № 1. С. 83. [5] Lima R., Pettini M. // *Phys. Rev.* 1990. A41. P. 726. [6] Ott E., Grebogi G., Yorke J. A. // *Phys. Rev. Lett.* 1990. 64. P. 196. [7] Hübler A. // *Helv. Phys. Acta.* 1989. 62. P. 343. [8] Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Введение в синергетику. М., 1990. [9] Неймарк Ю. И., Ланда П. С. *Стохастические и хаотические колебания*. М., 1987. [10] Dykman G. I., Landa P. S., Neymark Yu. I. // *Chaos, Solitons & Fractals*. 1991. 1. P. 339. [11] Jackson E. A., Kodogeorgiou A. // *Physica D*. 1992. 54. P. 253. [12] Jackson E. A., Hübler A. // *Physica D*. 1990. 44. P. 407. [13] Loskutov A. Yu., Tereshko V. M. // *Proc. IJCNN'91 on Neural Networks*. Singapore, World Sci, 1992. [14] Basti G. et al. // *Neurocomputers and Attention*. N. Y., 1991. V. 1. P. 151. [15] Loskutov A. Yu., Tereshko V. M. // *Artificial Neural Networks II* / Eds. I. Aleksander, J. Taylor. Brighton, UK, 1992. [16] Смейл С. // *УМН*. 1970. 25. С. 113. [17] Шапиро А. П., Луппов С. П. *Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии*. М., 1983. [18] Varley G., Gradwell G., Hassell M. *Insect Population Ecology*. Berkeley. Univ. California Press. 1973. [19] Остер Г., Гукенхеймер Дж. // В кн.: Марсен Дж., Мак Кракен М. *Бифуркации рождения цикла и ее приложения*. М., 1980. С. 254. [20] Perez R., Glass L. // *Phys. Lett.* 1982. 90A. P. 441. [21] Hescheler J., Speicher R. // *Eur. Biophys. J.* 1989. 17. P. 273. [22] Feiglold M., Gonzales D. L., Piro O., Vitturo H. // *Phys. Rev.* 1988. A37. P. 4060. [23] Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В. *Динамика одномерных отображений*. Киев, 1989. [24] Bak P., Bohr T., Jensen M. H. // *Directions in Chaos II* / Ed. B. L. Hao. Singapore, 1988. [25] Dolnik M., Schreiber I., Marek M. // *Phys. Lett.* 100A. P. 316. [26] Mandel P., Kapral P. // *Opt. Commun.* 1983. 47. P. 151. [27] Glass L. // *Chaos*. 1991. 1. P. 13. [28] Гласс Л., Мэки М. *От часов к хаосу. Ритмы жизни*. М., 1991. [29] Арнольд В. И. // *Изв. АН СССР, сер. матем.* 1961. 25. С. 21. [30] Синай Я. Г., Ханин К. М. // *УМН*. 1989. 44. С. 57. [31] Guevara M. R., Glass L. // *J. Math. Biol.* 1982. 14. P. 1. [32] Zeng W.-Z., Glass L. // *Physica D*. 1989. 40. P. 218. [33] Boyland P. L. // *Comm. Math. Phys.* 1986. 106. P. 353. [34] Лоскутов А. Ю. // *Биофизика*. 1992. 37. С. 133.