ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1993. Т. 34, № 5

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 532.517:621.373

ХАОС И ДЕСТОХАСТИЗАЦИЯ В ДВУМЕРНОЙ СЕТИ СВЯЗАННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. Ю. Лоскутов, Г. Э. Томас
(кафедра физики низких температур)

Рассматривается двумерная решетка квадратичных отображений с диффузионным и параметрическим взаимодействиями между элементами и ее приближенная модель, состоящая из единственного (выделенного) элемента из этой решетки и флуктуирующей среды. Показано, что определенное воздействие флуктуирующей среды может привести к дестохастизации — подавлению хаоса в выделенном элементе. Найден верхний порог диффузии, при котором это явление еще сохраняется.

1. Введение

Описание различных физических систем при помощи нелинейных отображений является одним из наиболее удобных и наглядных путей изучения сложного многомерного движения. Преимущество такого подхода заключается в относительной простоте и универсальности отображений. Например, при помощи одномерных отображений для целого класса нелинейных динамических систем удалось универсальным образом описать переход к хаотическому поведению [1, 2]. Наиболее полезным применение отображений оказалось в теории систем, близких к интегрируемым, где было доказано свойство сохранения квазипериодического движения при его малых возмущениях [3—5]. В последнее время с нелинейными отображениями связывается возможность создания систем обработки информации [6, 7].

Если рассматривать не одно, а совокупность, например цепочку или решетку (сеть), тем или иным способом связанных отображений, то можно описывать самые разнообразные явления и понять процессы, происходящие в распределенных средах. В самом деле, распределенную среду можно представить как дискретную решетку с большим числом взаимодействующих элементов, расположенных в узлах этой решетки. Так, простейшую распределенную систему — одномерную струну — можно представить как цепочку последовательно связанных друг с другом элементов (например осцилляторов), каждый из которых описывается отображением. Тогда, изучив динамику отдельного элемента, можно перейти к рассмотрению системы из сцепленных элементов, а затем к распределенной среде из этих элементов и анализу волновых процессов. Более сложные, чем одномерная струна, распределенные среды можно аналогично попытаться разбить на совокупность дискретных элементов (в соответствии с размерностью среды — двумерную или трехмерную решетку) и затем изучать полученную систему в предположении, что число элементов достаточно велико. При таком подходе в определенных случаях можно ожидать, что динамика исходной распределенной среды окажется сходной с динамикой аппроксимирующей ее дискретизованной системы [8].

Допустим, что отдельно взятое отображение имеет вид

$$x_{n+1}=\varphi(x_n,\ \gamma), \qquad (1)$$

где φ — некоторая функция и γ — параметр. Теперь, если из таких отображений составить k-мерную решетку ($k \geqslant 1$), то связь в зависимости от решаемой задачи может быть введена различными способами. Самый известный из них и широко исследуемый (см., напр., [9—11]) — диффузионный способ. В этом случае для двумерной ($k=2$) решетки, состоящей из N отображений вида (1), эволюция каждого (i, j)-го элемента будет определяться соотношением

$$x_{n+1}^{i,j}=\varphi(x_n^{i,j}, \gamma)+d_1[\varphi(x_n^{i-1,j}, \gamma)-2\varphi(x_n^{i,j}, \gamma)+\varphi(x_n^{i+1,j}, \gamma)]+$$
$$+d_2[\varphi(x_n^{i,j-1}, \gamma)-2\varphi(x_n^{i,j}, \gamma)+\varphi(x_n^{i,j+1}, \gamma)], \qquad (2)$$

где $i=1,2,\ldots,N$, $j=1,2,\ldots,N$, d_1 и d_2 — коэффициенты диффузии вдоль горизонтали и вдоль вертикали решетки. Часто, чтобы не вводить граничных условий, рассматривается сцепление на торе, т. е. индексы i и j определяются по $\mathrm{mod}\, N$. Связь типа (2) характерна тем, что состояние каждого элемента как бы сглаживается действием окружающих его соседей, и это сглаживание тем сильнее, чем больше коэффициенты d_1, d_2.

Другой способ введения связи — параметрический [12]. Для $k=2$ динамика (i, j)-го элемента может быть записана как

$$x_{n+1}^{i,j}=\varphi(x_n^{i,j}, \gamma_n^{i,j}), \qquad (3а)$$

где

$$\gamma_n^{i,j}=\gamma+d_1(x_n^{i+1}-2x_n^i+x_n^{i-1})+d_2(x_n^{j+1}-2x_n^j+x_n^{j-1}). \qquad (3б)$$

Параметрическое сцепление отображений вида (3 а, б) замечательно тем, что значение управляющего параметра γ отображения (1) зависит от состояния элементов, соседних с выделенным, в предыдущий момент времени n. Решетку из отображений вида (3) можно трактовать как взаимодействие выделенного элемента и некоторой окружающей его среды (состоящей из таких же элементов), и эта среда действует на выделенный элемент параметрически.

При исследовании сети связанных отображений (2) и (3) естественным образом возникают следующие вопросы. Какой может быть динамика некоторого элемента, выделенного из сети, и динамика всей решетки в целом? Если значение параметра γ отображения (1) соответствует его хаотическому поведению, то будут ли в этом случае решетки (2) и (3) также проявлять хаотические свойства? Данная работа посвящена ответам на эти вопросы.

2. Дестохастизация в сети параметрически связанных отображений

Рассмотрим в качестве элемента (1) в решетке (3) отображение вида

$$x_{n+1}=\varphi(x_n, \gamma)=\gamma x_n(1-x_n). \qquad (4)$$

Это отображение определено для всех $x \in \mathbf{R}^1$. Если $\gamma \in [0, 4]$, то преобразование φ переводит отрезок $[0, 1]$ в себя. Хорошо известным свойством отображения (4) являются бифуркации удвоения периода. При увеличении значения параметра γ в интервале $1<\gamma<\gamma_\infty=3{,}569945672\ldots$ в отображении (4), последовательно сменяя друг друга, возникают устойчивые циклы периодов 2^k, $k=1, 2, 3, \ldots$ Если $\gamma=\gamma_\infty$, то все эти циклы являются неустойчивыми, а единственным устойчивым циклом будет цикл периода 2^∞. За предельной величиной γ_∞, т. е. при $\gamma>\gamma_\infty$, имеются такие значения параметра γ, при которых отображение (4) обладает хаотической динамикой. Наиболее ярко выраженные хаотические свойства это отображение проявляет при $\gamma\equiv\gamma_{\max}=4$ (см. [13]).

Таким образом, значение $\gamma=\gamma_\infty$ дает начало хаотическому поведению отображения (4).

Рассмотрим решетку (3), составленную из отображений (4). Выделим из нее один элемент, например элемент с номером (i, j), а остальные аппроксимируем флуктуирующей средой. При таком приближении индексы i, j в выражении (3 а) можно опустить, а отображение (3)—(4) записать в виде

$$x_{n+1}=\varphi(x_n,\ \gamma_n)=\gamma_n x_n(1-x_n). \tag{5}$$

Как окружающая флуктуирующая среда, т. е. колебание γ_n с течением времени n, может повлиять на поведение отображения (5)? Если допустить, что параметр γ_n изменяется периодически с периодом m, $\gamma_{n+m}=\gamma_n$, $\gamma_{n+i}\neq\gamma_n$ для $1\leqslant i<m$, то в этом случае удается получить ряд строгих аналитических результатов.

Пусть Γ_c — множество значений параметра γ, при которых отображение (4) имеет хаотическое поведение. Дополним множество Γ_c значением γ_∞ и обозначим его как $\overline{\Gamma}_c$. Перепишем отображение (5) в более наглядной форме:

$$\begin{aligned}
&x_{mn+1}=\varphi_1(x_{mn},\ \gamma_1),\\
&x_{mn+2}=\varphi_2(x_{mn+1},\ \gamma_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&x_{mn+m}=\varphi_m(x_{mn+m-1},\ \gamma_m),\\
&x_{mn+m+1}=\varphi_1(x_{mn+m},\ \gamma_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{6}$$

Предположим, что флуктуирующая среда действует так, что в отображении (6) выполняется условие $\gamma_i\in\overline{\Gamma}_c$, $i=1, 2, \ldots, m$. Тогда можно было бы ожидать, что динамика отображения (6) будет хаотической. Однако это не всегда так. При определенных $\gamma_i\equiv\gamma_i^d\in\overline{\Gamma}_c$, $i=1,\ 2, \ldots, m$ (индекс d происходит от слова «дестохастизация»), хаотическая динамика отображения (6) сменяется регулярной. Более точно, справедлива следующая

Теорема. *Допустим, что в отображении* (6) $m=2$ *и выполняется условие* $\gamma_1, \gamma_2\in\overline{\Gamma}_c$. *Тогда множество* $\overline{\Gamma}_c$ *содержит подмножество* Γ_d, *состоящее из таких пар* $\gamma_i^j\equiv\gamma_i^{d_j}\in\Gamma_d$, $i=1,\ 2,\ j=1,\ 2,\ 3, \ldots$, *что отображение* (6) *с параметрами* $\gamma_1=\gamma_1^{d_j}$, $\gamma_2=\gamma_2^{d_j}$, $j=1,\ 2,\ 3, \ldots$, *обладает устойчивыми циклами конечного периода.*

Кратко поясним смысл этой теоремы. В общем случае если $\gamma_1, \gamma_2\in\overline{\Gamma}_c$, то отображение (6) (или (5)) будет порождать полностью апериодические последовательности, не стремящиеся с увеличением n ни к какому из циклов конечного периода. Однако теорема утверждает, что $\overline{\Gamma}_c$ содержит такие пары $\gamma_1^{d_j}$, $\gamma_2^{d_j}$, $j=1,\ 2, \ldots$, которые приводят к возникновению в отображении (6) устойчивых периодических режимов. Таким образом, теорема гарантирует, что хаотическое поведение выделенного квадратичного отображения в решетке (3), (4), аппроксимируемого отображением (5), может быть стабилизировано соседними с ним элементами и выведено на регулярный режим.

Доказательство. Очевидно, что для доказательства достаточно найти хотя бы одну пару γ_1^d, γ_2^d из множества $\overline{\Gamma}_c$, удовлетворяющую утверждению теоремы. Для $m=2$ отображение (6) перепишется в виде

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= \varphi_1(x_{2n},\ \gamma_1) = \gamma_1 x_{2n}(1-x_{2n}), \\ x_{2n+2} &= \varphi_2(x_{2n+1},\ \gamma_2) = \gamma_2 x_{2n+1}(1-x_{2n+1}),\ \gamma_1,\ \gamma_2 \in \overline{\Gamma}_c. \end{aligned} \tag{7}$$

В зависимости от начального условия x_0 это отображение с ростом n порождает последовательность

$$\begin{aligned} &x_1 = \varphi_1(x_0,\ \gamma_1),\ x_2 = \varphi_2(\varphi_1(x_0,\ \gamma_1),\ \gamma_2), \\ &x_3 = \varphi_1(\varphi_2(\varphi_1(x_0,\ \gamma_1),\ \gamma_2),\ \gamma_1), \ldots . \end{aligned} \tag{8}$$

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\begin{aligned} F_1(x,\ \gamma_1,\ \gamma_2) &= \varphi_1(\varphi_2) = \gamma_1\gamma_2 x(1-x)[1-\gamma_2 x(1-x)], \\ F_2(x,\ \gamma_1,\ \gamma_2) &= \varphi_2(\varphi_1) = \gamma_1\gamma_2 x(1-x)[1-\gamma_1 x(1-x)]. \end{aligned} \tag{9}$$

Используя их, задавая x_0 и определяя $x_1=\varphi_1(x_0, \gamma_1)$, отображение (7) можно записать как

$$x_{2n+1} = F_1(x_{2n-1},\ \gamma_1,\ \gamma_2), \tag{10 а}$$

$$x_{2n+2} = F_2(x_{2n},\ \gamma_1,\ \gamma_2),\ \gamma_1,\ \gamma_2 \in \overline{\Gamma}_c. \tag{10 б}$$

Действительно, функция F_2 соответствует четным номерам последовательности (8), а функция F_1 — нечетным ее номерам. Отображения (10 а) и (10 б) замечательны тем, что действуют независимо друг от друга; их итерации, за исключением значений x_0 и x_1, никак не связаны между собой.

Далее, для произвольного отображения $f(x)$ любой из циклов периода k является одновременно неподвижными точками $\tilde{x}_p$, $p=1, 2, \ldots, k$, отображения $f^{(k)}(x) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{k\ \text{раз}}(x)\ldots))$. Обратное утверждение, вообще говоря, верно не всегда, так как не только k-циклы, т. е. циклы периода k, но также и j-циклы ($j=k/i$, $i=2, 3, \ldots, k$, j — целое число) отображения $f(x)$ являются неподвижными точками отображения $f^{(k)}(x)$. Для исключения таких точек достаточно рассмотреть корни полинома $[f^{(k)}(\tilde{x})-\tilde{x}]/[f^{(j)}(\tilde{x})-\tilde{x}]$, $j=k/i$, $i=2,\ 3, \ldots, k$.

Учитывая эти замечания, исследуем функции F_1, F_2 и отображение (10).

Если отображение (7) имеет $2k$-цикл, то этот цикл будет также и $2k$-циклом отображения (10). В свою очередь каждый $2k$-цикл отображения (10) является одновременно неподвижными точками $\tilde{x}_m^1$, $m=1, 2, \ldots, k$, отображения $F_1^{(k)}$ и неподвижными точками $\tilde{x}_m^2$, $m=1, 2, \ldots, k$, отображения $F_2^{(k)}$. Обратно, если $F_1^{(k)}$ и $F_2^{(k)}$ имеют неподвижные точки, то в общем случае таких точек может быть больше, чем $2k$, либо они могут не соответствовать $2k$-циклу отображения (7). Последнее означает, что цикл периода $2k$ в отображении (7) отсутствует. Для того, чтобы исключить лишние точки отображений $F_1^{(k)}$, $F_2^{(k)}$ и убедиться в существовании цикла периода $2k$ отображения (7), достаточно определить корни полиномов

$$[F_1^{(k)}(\tilde{x}^1, \gamma_1, \gamma_2) - \tilde{x}^1]/[F_1^{(j)}(\tilde{x}^1, \gamma_1, \gamma_2) - \tilde{x}^1] = 0,$$
$$[F_2^{(k)}(\tilde{x}^2, \gamma_1, \gamma_2) - \tilde{x}^2]/[F_2^{(j)}(\tilde{x}^2, \gamma_1, \gamma_2) - \tilde{x}^2] = 0 \qquad (11)$$

для всех $j=k/i$, $i=2, 3, \ldots, k$. Если эти уравнения имеют $2k$ решений, каждое по числу k, то отображения F_1 и F_2 будут иметь цикл периода k, а отображения (7) и (10) — цикл периода $2k$.

Отображение (7), имеющее хаотическое поведение, обладает только неустойчивыми циклами и неустойчивыми неподвижными точками. Поэтому появление при любом $k>0$ устойчивых неподвижных точек $\tilde{x}_m^1$, $\tilde{x}_m^2$, $m=1, 2, \ldots$, у отображений соответственно $F_1^{(k)}$ и $F_2^{(k)}$ всегда означает существование для определенных x_0 регулярной динамики отображения (10), обусловленной циклом одного из периодов $j=2k/i$, $i=1, 2, \ldots, k$. Если дополнительно к этому значения $\tilde{x}_m^1$, $\tilde{x}_m^2$, $m=1, 2, \ldots$, удовлетворяют уравнениям (11), то это обстоятельство гарантирует, что отображение (10) обладает устойчивым $2k$-циклом.

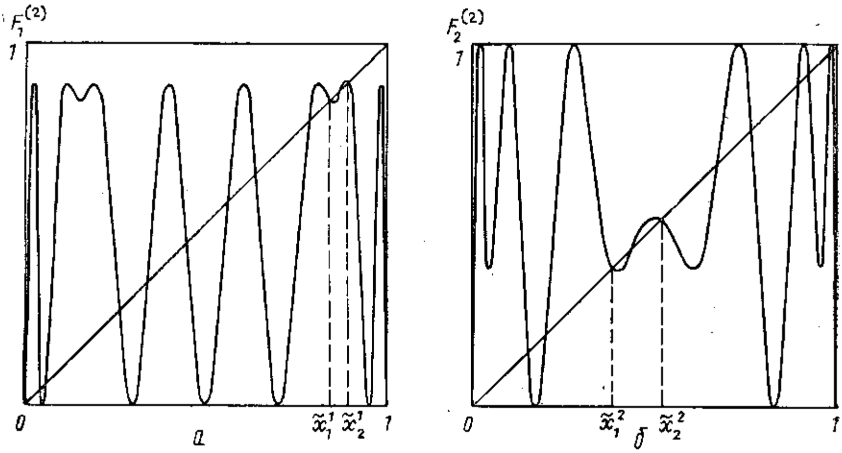


Рис. 1. Устойчивые неподвижные точки $\tilde{x}_1^1 = 0{,}84719885\ldots$, $\tilde{x}_2^1 = 0{,}89135379\ldots$ отображения $F_1^{(2)}$ (*а*) и $\tilde{x}_1^2 = 0{,}38736883\ldots$, $\tilde{x}_2^2 = 0{,}51781183\ldots$ отображения $F_2^{(2)}$ (*б*) при $\gamma_1=4$, $\gamma_2=3{,}56994567$

Таким образом, необходимо найти хотя бы одну пару параметров $\gamma_1 = \gamma_1^d \in \overline{\Gamma}_c$, $\gamma_2 = \gamma_2^d \in \overline{\Gamma}_c$, такую, чтобы отображения $F_1^{(k)}$ и $F_2^{(k)}$ для определенного $k<\infty$ имели устойчивые неподвижные точки $\tilde{x}_m^1$ и $\tilde{x}_m^2$ соответственно.

Выберем в качестве параметров γ_1 и γ_2 значения $\gamma_1 = \gamma_{max} = 4$, $\gamma_2 = \gamma_\infty$. По определению, $\gamma_\infty \in \overline{\Gamma}_c$. Кроме того (см. выше), $\gamma_{max} \in \overline{\Gamma}_c$. Подставим теперь γ_∞, γ_{max} в уравнения

$$F_1^{(k)}(\tilde{x}^1, \gamma_{max}, \gamma_\infty) = \tilde{x}^1, \; F_2^{(k)}(\tilde{x}^2, \gamma_{max}, \gamma_\infty) = \tilde{x}^2.$$

Тогда нетрудно убедиться, что для $k=2$ у отображений $F_1^{(k)}$, $F_2^{(k)}$ имеются такие неподвижные точки (рис. 1), которые являются устойчивыми. Других устойчивых точек при данных значениях параметров отображения $F_1^{(k)}$ и $F_2^{(k)}$ не имеют при любом $k>2$. Найденные точки образуют устойчивый цикл периода 4 (рис. 2). Следовательно, $\gamma_\infty = \gamma_1^d$, $\gamma_{max} = \gamma_2^d$. Отметим, что, хотя график функций $F_1^{(2)}$ и $F_2^{(2)}$ построен для рационального значения γ_2, при иррациональном γ_∞ он изменится мало: небольшие вариации ($\sim 10^{-6}$) параметра γ_2 не влияют на устойчивость неподвижных точек.

Теорема доказана.

Замечание 1. Помимо приведенных величин γ_∞, $\gamma_{\max}$ можно путем численного исследования обнаружить ряд других значений γ_1^d, γ_2^d, удовлетворяющих условию теоремы.

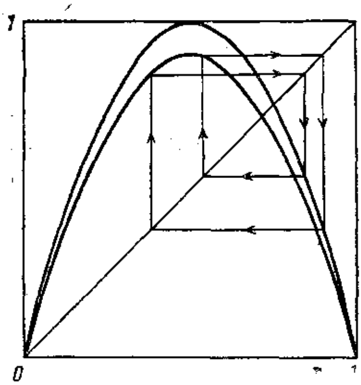


Рис. 2. Устойчивый цикл периода 4 отображения (7)

Замечание 2. Утверждение теоремы можно значительно усилить, если рассмотреть только множество Γ_c. В этом случае основная трудность состоит в том, чтобы доказать, что $\gamma_1^d \in \Gamma_c$, $\gamma_2^d \in \Gamma_c$. Однако теорема Огнева—Мисюревича [14] существенно облегчает эту процедуру.

Замечание 3. Расширение теоремы на случай $m>2$ несколько усложняет рассмотрение. Но численное исследование делает поиски параметров $\gamma_1^{d_i}$, $\gamma_2^{d_i}, \ldots, \gamma_m^{d_i}$, $i=1, 2, \ldots,$ элементарными.

3. Хаос и порядок в сети диффузионно связанных отображений при параметрическом воздействии

Перейдем теперь к изучению решеток вида (2).

Допустим, что один, несколько или все элементы искусственно подвержены дестохастизации. Иными словами, предположим, что в решетке (2), (4) ряд элементов имеет вид (6) с $\gamma_1=\gamma_1^d \in \Gamma_c$, $\gamma_2=\gamma_2^d \in \Gamma_c, \ldots, \gamma_m=\gamma_m^d \in \Gamma_c$, а остальные — вид (1) с $\gamma \in \Gamma_c$. Таким образом, в отсутствие диффузии, $d_1=d_2=0$, выбранные элементы будут проявлять регулярную динамику, а остальные элементы в решетке — хаос. Как при $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$ изменится заданная пространственная картина? Будет ли распространяться в результате диффузии порядок на соседние элементы или же хаос подавит регулярное поведение?

Рассмотрим сначала ситуацию, когда только один элемент (i, j) в решетке (2), (7) подвержен дестохастизации. Перепишем выражение (2), (7) в виде

$$\begin{aligned} x_{2n+1}^{i,j} &= \varphi_1(x_{2n}^{i,j}, \gamma_1^d)\,[1-2(d_1+d_2)] + \{d_1[\varphi(x_{2n}^{i-1,j}, \gamma) + \\ &+ \varphi(x_{2n}^{i+1,j}, \gamma)] + d_2[\varphi(x_{2n}^{i,j-1}, \gamma) + \varphi(x_{2n}^{i,j+1}, \gamma)]\}, \\ x_{2n+2}^{i,j} &= \varphi_2(x_{2n+1}^{i,j}, \gamma_2^d)\,[1-2(d_1+d_2)] + \{d_1[\varphi(x_{2n+1}^{i-1,j}, \gamma) + \\ &+ \varphi(x_{2n+1}^{i+1,j}, \gamma)] + d_2[\varphi(x_{2n+1}^{i,j-1}, \gamma) + \varphi(x_{2n+1}^{i,j+1}, \gamma)]\}. \end{aligned} \qquad (12)$$

Первое слагаемое в отображении (12) зависит лишь от состояния выделенного элемента в предыдущий момент времени и суммы коэффициентов диффузии. Второе слагаемое зависит от состояния соседних элементов и не зависит от состояния выделенного элемента. Следовательно, можно вновь применить описанный выше «локальный» подход и рассмотреть динамику только выделенного элемента, не интересуясь деталями эволюции соседей, а заменяя их флуктуирующей средой.

Рассматриваемое отображение φ (см. (4)) в выражении (12) является хаотическим и переводит отрезок [0, 1] в себя. Поэтому вполне допустимым приближением соотношения (12) является замена второго слагаемого случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $[0, d]$, где $d=2(d_1+d_2)$. Следовательно, отображение (12) можно приблизительно записать в виде

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= (1-d)\,\varphi_1(x_{2n}, \gamma_1^d) + \xi_{2n}^1, \\ x_{2n+2} &= (1-d)\,\varphi_2(x_{2n+1}, \gamma_2^d) + \xi_{2n+1}^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Дальнейшее изучение отображения (13) проводилось численно. Критерием хаотичности и регулярности служил показатель Ляпунова, рассчитываемый из соотношения $\lambda=(1/L)\sum\limits_{=}^{L} \ln|f'(x_i)|$, где L — число итераций. Значения параметров были выбраны следующими: $\gamma_1^d=3{,}978$, $\gamma_2^d=4$. Очевидно, что $\gamma_2^d \in \Gamma_c$. Параметр γ_1^d также входит в множество Γ_c, поскольку показатель Ляпунова для отображения (4) с $\gamma=\gamma_1{}^d$ положителен, $\lambda\approx 0{,}600$. В свою очередь отображение (7) с $\gamma_1=\gamma_1{}^d$ и $\gamma_2=\gamma_2{}^d$ обладает устойчивым циклом периода 12.

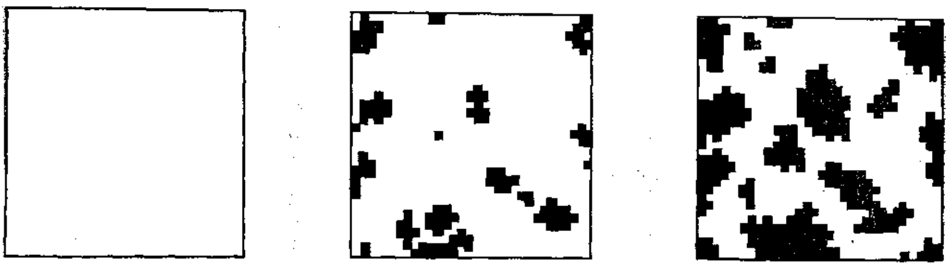
Детальный анализ позволил заключить, что для значения коэффициента $d<(6{,}00\pm0{,}05)\,10^{-6}$ выполняется неравенство $\lambda<0$; это гарантирует существование регулярной динамики отображения (13). Иными словами, при величине диффузии, удовлетворяющей соотношению d_1+ $+d_2<(3{,}00\pm0{,}05)\,10^{-6}$, устойчивый цикл в выделенном элементе решетки из диффузионно связанных отображений сохраняется. Если же $d>(6{,}00\pm0{,}05)\,10^{-6}$, то показатель Ляпунова становится положительным, и периодическое поведение выделенного элемента должно диффузионно подавляться соседними с ним хаотическими элементами.

Таким образом, на основе изучения аппроксимационной модели (13) мы получаем пороговую оценку суммы коэффициентов диффузии. При $d_1+d_2<(3{,}00\pm0{,}05)\,10^{-6}$ взаимодействие элементов в двумерной решетке диффузионно связанных квадратичных отображений не должно приводить к разрушению периодической динамики выделенного элемента, возникшей в результате дестохастизации. Если $d_1=d_2$, то пороговое значение для каждого из коэффициентов равно $d_c\approx 1{,}5\cdot10^{-6}$.

Характерно, что, когда диффузия лишь слегка превышает пороговое значение, разрушение периодической динамики выделенного элемента происходит по сценарию, близкому к сценарию рождения хаоса через перемежаемость [8]. Именно: спустя определенное число итераций (зависящее от d) изображающая точка покидает окрестность теряющего устойчивость цикла. Сделав несколько нерегулярных колебаний вдали от этого цикла (число которых может быть велико по сравнению с периодом цикла), эта точка вновь попадает в его окрестность, и динамика опять становится почти периодической. И так далее.

Для более полного изучения поведения элементов в сети (2) предположим, что в решетке (2), (7) взаимодействуют 32×32 элемента, расположенных на торе. Пусть каждый из этих элементов подвержен дестохастизации (т. е. для всех $i, j=1, 2, \ldots, 32$, $\gamma_1=\gamma_1{}^d=3{,}978$, $\gamma_2=\gamma_2{}^d=$ $=4$), а начальные условия для них выбраны случайными и равномерно распределенными на отрезке [0, 1]. Интуитивно ясно, что при малой диффузии наведенный регулярный режим в такой сети будет сохраняться. Какое максимальное (пороговое) значение d_c' имеют коэффициенты d_1 и d_2 в соотношении (12), при котором хаотическая динамика еще отсутствует? Будет ли это значение совпадать с оценкой d_c, полученной при помощи локального подхода (13)? Численные исследования приводят к следующим выводам.

Для визуализации динамики решетки на развертке тора (рис. 3) черным цветом отмечались те элементы, поведение которых было хаотическим; элементы же с регулярным движением оставлялись белыми. В качестве критерия хаотичности и регулярности использовалась величина экспоненциального разбегания траекторий [13]. При $d_1=d_2<$



а б в

Рис. 3. Развертка решетки, состоящей из 1024 подверженных дестохастизации элементов, расположенных на торе: $d_1=d_2<d_c'=(3{,}80\pm0{,}05)\cdot10^{-6}$ (*а*), $d_1=d_2=4{,}2\cdot10^{-6}$ (*б*), $d_1=d_2=4{,}7\cdot10^{-6}$ (*в*)

$<(3{,}80\pm0{,}05)\,10^{-6}$ вся решетка проявляла регулярные свойства, т. е. пространственный порядок сохранялся (рис. 3, *а*). В случае $d_1=d_2>$ $>(3{,}90\pm0{,}05)\,10^{-6}$ в некоторых местах тора возникали элементы с хаотической динамикой (рис. 3, *б*). Следовательно, критическое значение коэффициентов диффузии равно $d_c'\approx3{,}85\cdot10^{-6}$. С дальнейшим увеличением d_1, d_2 число элементов, проявляющих хаотический режим эволюции, увеличивалось (рис. 3, *в*). При последующем росте коэффициентов d_1 и d_2 преобладающими в решетке становились элементы с хаотическим поведением.

Таким образом, оценка порогового значения d_c, вытекающая из анализа соотношения (13), оказывается того же порядка, но несколько ниже величины d_c', полученной непосредственно из численного исследования целой решетки. По-

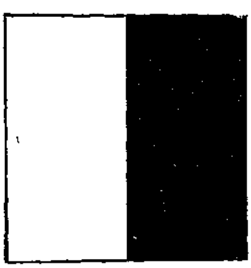


Рис. 4. Дестохастизация 512 элементов решетки при $d_1=d_2=2{,}2\cdot10^{-6}$

видимому, это связано с тем, что в некоторых пределах диффузионная связь как бы стабилизирует, или сглаживает, динамику элементов решетки.

Наконец, рассмотрим случай, когда параметрической дестохастизации подвержены не все элементы тора, а только часть из них. Предположим, что они образуют определенную пространственную структуру, например кольцо (рис. 4). Из анализа, проведенного выше, следует ожидать, что при $d_1=d_2<d_c$ пространственная картина решетки (2) будет сохраняться: динамика элементов вида (7) останется регулярной, а динамика элементов вида (4) — хаотической. С другой стороны, при $d_1=d_2>d_c'$ даже среди элементов вида (7) в решетке (2) найдутся элементы с хаотическим поведением. В этом случае, очевидно, пространственная картина будет разрушаться. Какое поведение проявит решетка, если $d_c<d_1=d_2<d_c'$? Численные исследования показывают, что хаотически эволюционирующие элементы при этих ограничениях на d_1 и d_2 разрушают регулярную динамику лишь своих ближайших соседей: полоса на рис. 4 только немного расширяется.

4. Заключение

Исследованные в данной работе системы являются аппроксимациями некоторых распределенных сред, интенсивно изучаемых в последнее время [15—16]. Основной результат первой части работы состоит в том, что взаимное влияние отдельных элементов таких сред, проявляющих турбулентное поведение, может привести к образованию определенных когерентных структур. Другой важный результат — найден порог чувствительности наведенного из хаоса порядка к диффузионному воздействию. Если диффузия достаточно мала, то заданная пространственная картина в решетке будет сохраняться. Однако с ростом диффузии происходит качественная перестройка: пространственный порядок начинает искажаться, в решетке появляются случайным образом разбросанные элементы как с регулярной, так и с хаотической динамикой. С дальнейшим увеличением диффузии поведение решетки в целом становится хаотическим. Порядок поглощается хаосом.

Работа частично поддерживалась ИПМ им. М. В. Келдыша Российского открытого университета.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Фейгенбаум М.//УФН. 1983. **141**. С. 343. [2] Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М., 1988. [3] Колмогоров А. Н.//ДАН СССР. 1954. **98**. С. 527. [4] Арнольд В. И.//УМН. 1963. **18**. С. 13. [5] Мозер Ю.//Сб. перев. Математика. 1963. **7**, № 6. С. 51. [6] Basti G. et al.//Neurocomputer and Attention. V. I. Manchester Univ. Press. Manchester & N. Y., 1991. P. 151. [7] Loskutov A. Yu., Tereshko V. M.//Proc. Int. Conf. on Artifitial Neural Networks. Brighton, UK, 4—7 Sept. 1992. North-Holland Publ., Amsterdam, 1992. [8] Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Введение в синергетику. М., 1990. [9] Kaneko K.//Physica D. 1989. **34**. P. 1. [10] Kaneko K.//Physica D. 1991. **54**. P. 5. [11] Schreiber T.//J. Phys. A. 1990. **23**. P. L393. [12] Druzhinin O. A., Mikhailov A. S.//Phys. Lett. 1990. **148A**. P. 429. [13] Mikhailov A. S., Loskutov A. Yu. Foundations of Synergetics II. Complex Patterns. Springer, Berlin. 1991. [14] Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М.//УМН. 1984. **39**. С. 3. [15] Гапонов-Грехов А. В., Ломов А. С., Осипов Г. В., Рабинович М. И. Нелинейные волны. Динамика и эволюция/Ред. М. И. Рабинович и А. В. Гапонов-Грехов. М., 1989. С. 61. [16] Gaponov-Grekhov A. V., Rabinovich M. I.//Selforganization by Nonlinear Irreversible Processes/Eds. by W. Ebeling. H. Ulbrich. Springer, Berlin, 1984. P. 37.

Поступила в редакцию
30.09.92