УДК 530.145

О СОСТОЯНИЯХ С МИНИМАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

А. А. Кулага

(кафедра молекулярной физики и физических измерений)

Проанализированы различные подходы к нахождению состояний с минимальной неопределенностью. Получено уравнение для состояний с минимальной неопределенностью, которое является более общим, чем используемые ранее. Изложенный подход проиллюстрирован на примере соотношения неопределенностей фаза — число квантов для гармонического осциллятора.

1. Формулировка проблемы

Со времени возникновения квантовой механики физиков интересовал вопрос о нахождении состояний «настолько классических, насколько это возможно», т. е. состояний с минимальной неопределенностью двух некоммутирующих наблюдаемых. Этот вопрос так интересен потому, что именно соотношение неопределенностей определяет «странное» поведение квантового объекта. А знание состояний с минимальной неопределенностью позволяет нам оценивать, насколько «классически» будет себя вести система и как много мы можем о ней знать. Кроме того, состояния с минимальной неопределенностью позволяют нам «получить больше за меньшую плату». Так, в гравитационно-волновом эксперименте актуальным для точного определения положения пробного тела является умение создавать состояния электромагнитного излучения с минимальной неопределенностью фазы при ограниченной сверху энергии (числе квантов).

Стандартное соотношение неопределенностей, которое приводится во всех учебниках квантовой механики, имеет следующий вид:

$$\text{если } [\mathbf{A}, \mathbf{B}]=i\mathbf{C}, \text{ то } \Delta\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B} \geqslant (1/2)\,|\langle\mathbf{C}\rangle|. \tag{1}$$

Это соотношение выполняется всегда, т. е. для всех физически реализуемых состояний. Основным достоинством этого неравенства является его простота. Однако оно сразу порождает несколько вопросов.

1) Существуют ли нормируемые состояния, которые обращают это неравенство в равенство?

2) Если такие состояния существуют, то как получить их явный вид?

3) Если таких состояний не существует, то как найти «самые хорошие» состояния, т. е. состояния, ближе всех приближающиеся к границе, заданной соотношением неопределенностей?

Эти вопросы исследовали многие авторы. В некотором роде итоговой является работа Джакива [1], в которой было получено уравнение для состояний, минимизирующих произведение неопределенностей $\Delta\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B}$. Общим в подходе всех этих авторов является поиск минимума именно *произведения* неопределенностей. По-видимому, желание минимизировать именно произведение неопределенностей является следствием неравенства (1). Гораздо более физически естественной выглядит следующая постановка задачи: нам задано $\Delta\mathbf{B}$ (например, возможностями прибора), и мы хотим найти минимум $\Delta\mathbf{A}$ при заданном $\Delta\mathbf{B}$. Или вообще: найти минимум $\Delta\mathbf{A}$ при заданных значениях наблюдаемых, характеризующих нашу систему (например, $\Delta\mathbf{B}$, $\langle\mathbf{B}\rangle$, $\langle\mathbf{A}\rangle$).

Рассмотрим, чем отличается минимизация произведения неопределенностей $\Delta\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B}$ от минимизации $\Delta\mathbf{A}$ при заданном $\Delta\mathbf{B}$.

2. Уравнение для состояний с минимальной неопределенностью

Договоримся о следующих обозначениях:
обычные числа: $a, b, c, d, l\ldots$;
для гильбертова пространства:
1) элементы (состояния): $\psi, \varphi, \chi, \xi\ldots$;
2) операторы: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\ldots$;
3) скалярное произведение: (φ, ψ), $(\xi, \mathbf{A}\xi)\ldots$;
$\langle\mathbf{A}\rangle\equiv(\xi, \mathbf{A}\xi)$, $(\Delta\mathbf{A})^2\equiv(\xi, \mathbf{A}^2\xi)-(\xi, \mathbf{A}\xi)^2=\langle\mathbf{A}^2\rangle-\langle\mathbf{A}\rangle^2$.

Пусть ψ — состояние, минимизирующее произведение неопределенностей $\Delta\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B}$ при дополнительном условии нормировки $(\psi, \psi)=1$. Тогда если мы добавим к ψ маленькую добавку $\delta\psi$ (так, конечно, чтобы условие нормировки продолжало бы выполняться), то величина $\Delta\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B}$, вычисленная для состояния $\psi+\delta\psi$, не должна уменьшиться, какое бы $\delta\psi$ мы ни прибавили. А если мы минимизируем $\Delta\mathbf{A}$ при заданном $\Delta\mathbf{B}$, то $\Delta\mathbf{A}$ не должно уменьшиться не для всех $\delta\psi$, а только для тех, которые удовлетворяют условию $\Delta\mathbf{B}=\mathrm{const}$. Поэтому, минимизируя $\Delta\mathbf{A}$ при различных заданных $\Delta\mathbf{B}$, мы обязательно найдем решения, минимизирующие $\Delta\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B}$. Таким образом, изменив постановку задачи, мы не только делаем ее более физически естественной, но и получаем решения, которые не могли бы найти, минимизируя произведение неопределенностей. Ситуация аналогична разнице между условным и безусловным экстремумами в случае функции нескольких переменных: так, функция x^2+y^2 не имеет экстремума в области $x<0$, а с дополнительным условием $x=\mathrm{const}$ — имеет.

Рассмотрим теперь, как эта разница в подходах отражается на уравнениях. Уравнение Джакива для состояний, минимизирующих $\Delta\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B}$, имеет следующий вид:

$$\left[\left(\frac{\mathbf{A}-a}{c}\right)^2+\left(\frac{\mathbf{B}-b}{d}\right)^2-2\right]\psi=0. \tag{2}$$

Здесь четыре числа a, b, c, d связаны с решением уравнения (2) условием самосогласованности: $a=\langle\mathbf{A}\rangle$, $b=\langle\mathbf{B}\rangle$, $c=\Delta\mathbf{A}$, $d=\Delta\mathbf{B}$, где все средние вычисляются для состояния ψ, которое является решением уравнения (2) с параметрами a, b, c, d.

Будем искать минимум $\Delta\mathbf{A}$ при заданных $\langle\mathbf{A}\rangle$, $\langle\mathbf{B}\rangle$, $\Delta\mathbf{B}$, т. е. фактически минимум $\langle\mathbf{A}^2\rangle$ при заданных $\langle\mathbf{A}\rangle$, $\langle\mathbf{B}^2\rangle$, $\langle\mathbf{B}\rangle$ плюс условие нормировки. Следуя методу множителей Лагранжа, будем искать точки возможного экстремума функционала

$$U=(\xi, \mathbf{A}^2\xi)+l_1\cdot(\xi, \mathbf{A}\xi)+l_2\cdot(\xi, \mathbf{B}^2\xi)+l_3\cdot(\xi, \mathbf{B}\xi)+l_4\cdot(\xi, \xi)$$

(l_1, l_2, l_3, l_4 — множители Лагранжа). Исходя из условия $\delta U=0$ и варьируя ξ ($\xi\to\xi+\delta\xi$), после выделения линейных по $\delta\xi$ членов получим уравнение

$$(\mathbf{A}^2+l_1\mathbf{A}+l_2\mathbf{B}^2+l_3\mathbf{B}+l_4)\xi=0. \tag{3}$$

Теперь мы видим связь между уравнениями (2) и (3) — и там и здесь уравнение имеет вид $\mathbf{C}\xi=0$, где $\mathbf{C}$ — полином второй степени от операторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$. Уравнение (3) можно переписать в виде

$$\left[\left(\frac{\mathbf{A}-a}{c}\right)^2+\left(\frac{\mathbf{B}-b}{d}\right)^2-2\right]\xi=0. \tag{4}$$

Но здесь, в отличие от уравнения (2), параметры a, b, c, d — множители Лагранжа, которые подбираются так, чтобы решение удовлетворяло дополнительным условиям. Поэтому для некоторых значений $\langle \mathbf{A} \rangle$, $\langle \mathbf{B} \rangle$, $\Delta\mathbf{B}$ может быть $a \neq \langle \mathbf{A} \rangle$, $b \neq \langle \mathbf{B} \rangle$, $c \neq \Delta\mathbf{A}$, $d \neq \Delta\mathbf{B}$ (не выполняется условие самосогласованности, обязательное в уравнении (2)). При этих значениях наблюдаемых уравнение (4) имеет решения, минимизирующие $\Delta\mathbf{A}$, которых не имеет уравнение (2).

3. Случай соотношения неопределенностей фаза—число квантов

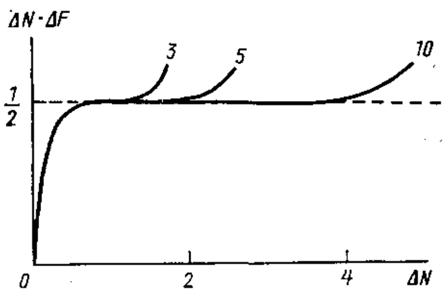
Проиллюстрируем все сказанное на примере соотношения неопределенностей фаза — число квантов для гармонического осциллятора. Обычно используемое неравенство имеет следующий вид:

$$\Delta\mathbf{N} \cdot \Delta\mathbf{F} \geqslant 1/2.$$

Используя самосопряженный оператор фазы $\mathbf{F}$, введенный в работе [2], получим уравнение для состояний, минимизирующих $\Delta\mathbf{F}$ при заданных $\Delta\mathbf{N}$, $\langle \mathbf{N} \rangle$ (так как всегда можно выбрать начало отсчета фазы так, что $\langle \mathbf{F} \rangle$ будет равно нулю, будем минимизировать $\langle \mathbf{F}^2 \rangle$, и параметр a в уравнении (3) пропадает):

$$\left[\left(\frac{\mathbf{F}}{c}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{N}-b}{d}\right)^2 - 2\right]\xi = 0. \qquad (6)$$

Это уравнение было решено численно, и получено семейство кривых $\Delta\mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{N} = f(\langle \mathbf{N} \rangle, \Delta\mathbf{N})$. На рисунке показаны такие кривые для $\langle \mathbf{N} \rangle = 10, 5, 3$. Видно, что для каждого значения $\langle \mathbf{N} \rangle$ существуют области значений $\Delta\mathbf{N}$, в которых соотношение $\Delta\mathbf{N} \cdot \Delta\mathbf{F} = 1/2$ для состояний с минимальной неопределенностью нарушается. Эти области соответствуют физически интересным состояниям — хорошо определенному числу квантов (при малых $\Delta\mathbf{N}$) и хорошо определенной фазе (при больших $\Delta\mathbf{N}$). При малых $\Delta\mathbf{N}$ соотношение $\Delta\mathbf{N} \cdot \Delta\mathbf{F} = 1/2$ нарушается из-за того, что при $\Delta\mathbf{N} \to 0$ $\Delta\mathbf{F}$ ограничено величиной 2π. А при больших $\Delta\mathbf{N}$, когда $\Delta\mathbf{N}$ становится сравнимым с $\langle \mathbf{N} \rangle$, распределение по числу квантов теряет симметрию относительно $\langle \mathbf{N} \rangle$ (из-за ограниченности спектра оператора $\mathbf{N}$ только неотрицательными числами), и поэтому мы получаем большее значение $\Delta\mathbf{F}$, чем это следует из соотношения $\Delta\mathbf{N} \cdot \Delta\mathbf{F} = 1/2$.



Зависимость произведения неопределенностей $\Delta F \cdot \Delta N$ для состояний с минимальной неопределенностью фазы от заданного ΔN для $\langle N \rangle = 10$, 5, 3 (соответствующие цифры при кривых)

Следует отметить, что как раз в физически интересных областях с хорошо определенным числом квантов и хорошо определенной фазой уравнение Джакива (2) не имеет решений, т. е. при этих значениях наблюдаемых $\langle \mathbf{N} \rangle$, $\Delta\mathbf{N}$ в уравнении (6) $\langle \mathbf{N} \rangle \neq b$, $\Delta\mathbf{N} \neq d$, $\Delta\mathbf{F} \neq c$. Поэтому подход, при котором минимизируется $\Delta\mathbf{F}$ при заданных $\Delta\mathbf{N}$ и $\langle \mathbf{N} \rangle$, является более общим, чем когда минимизируется произведение неопределенностей $\Delta\mathbf{N} \cdot \Delta\mathbf{F}$.

4. Существование и единственность решения

Коснемся теперь вопроса о существовании и единственности решения задачи нахождения состояний с минимальной неопределенностью при заданных дополнительных условиях. Математически строго эта задача формулируется так: дополнительные условия задают нам множество $\mathbf{D}$ элементов гильбертова пространства, для которых все эти условия выполняются. Нужно найти элемент $\xi \in \mathbf{D}$, который минимизирует функционал $\mathbf{F} = (\Delta \mathbf{A})^2 = (\xi, \mathbf{A}^2 \xi) - (\xi, \mathbf{A}\xi)^2 = \langle \mathbf{A}^2 \rangle - \langle \mathbf{A} \rangle^2$. Вопрос о существовании и единственности этого элемента ξ является актуальным, так как если даже мы и найдем каким-либо способом решение уравнения (4), это еще не даст нам никакой гарантии, что не существует какой-нибудь другой элемент множества $\mathbf{D}$, который имеет дисперсию меньше, чем найденный нами. К сожалению, теорема о существовании и единственности минимума функционала $\mathbf{F}$ на множестве $\mathbf{D}$ доказывается только для выпуклых функционалов и выпуклых множеств. Из-за условия нормировки наше множество $\mathbf{D}$ не является выпуклым, поэтому эта теорема здесь неприменима.

Для описания любого реально существующего физического состояния всегда достаточно пространства большой, но конечной размерности. Также и в случае численного решения уравнения (4) мы аппроксимируем гильбертово пространство конечномерным линейным пространством, а операторы в гильбертовом пространстве — матрицами достаточно большого размера. Поэтому рассмотрим пространство комплексных векторов $\mathbf{z} = (z_1 \ldots z_N)$ размерности N. В этом случае вопрос о существовании и единственности решения становится существенно проще. Пусть мы хотим минимизировать величину $\Delta \mathbf{A}$ на множестве $\mathbf{D}$, которое задается ограничениями физических наблюдаемых:

$$\Phi_i(\mathbf{z}) \leqslant 0, \quad i = \overline{1, k}. \tag{7}$$

Например, ограничениям наблюдаемых $\langle \mathbf{B} \rangle = c_1$, $\Delta \mathbf{B} \leqslant c_2$ соответствует система неравенств $\langle \mathbf{B} \rangle - c_1 \leqslant 0$, $c_1 - \langle \mathbf{B} \rangle \leqslant 0$, $\Delta \mathbf{B} - c_2 \leqslant 0$. Тогда справедливо следующее утверждение: глобальный минимум величины $\Delta \mathbf{A}$ на множестве $\mathbf{D}$ находится либо среди решений уравнения (4), либо среди особых точек множества $\mathbf{D}$. Особой точкой множества $\mathbf{D}$ называется граничная точка, в которой градиенты функций ψ_i являются линейно зависимыми. Таким образом, нам достаточно найти все множители Лагранжа, при которых уравнение (4) имеет решения, удовлетворяющие дополнительным условиям, сами решения, особые точки множества $\mathbf{D}$, сосчитать дисперсию наблюдаемой $\mathbf{A}$ в каждой из найденных точек, а затем выбрать ту точку, в которой дисперсия минимальна. Но выполнить эту программу полностью удается очень редко из-за больших математических трудностей.

Назовем функцией Лагранжа функцию вида

$$\mathbf{L}(\mathbf{z}, \lambda) = (\Delta \mathbf{A})^2 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \Phi_i, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, k}.$$

Здесь $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$.

Справедливо следующее важное утверждение, доказательство которого можно найти в книге [3]:

для того чтобы вектор $\mathbf{z}^*$ обеспечивал минимум $(\Delta \mathbf{A})^2$ при ограничениях (7), достаточно, чтобы существовал такой набор $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots,$

$\ldots \lambda_k^*)$, что для всех $\mathbf{z}$ из нашего пространства размерности N и для всех $\lambda_i \geqslant 0$, $i=\overline{1, k}$, выполнялись бы неравенства

$$\mathbf{L}(\mathbf{z}^*, \lambda) \leqslant \mathbf{L}(\mathbf{z}^*, \lambda^*) \leqslant \mathbf{L}(\mathbf{z}, \lambda^*).$$

Пару $(\mathbf{z}^*, \lambda^*)$ принято при этом называть седловой точкой функции Лагранжа. Важно отметить, что множество, на котором ищется седловая точка функции Лагранжа, имеет простой вид: ограничения (7) в его описании не участвуют и выполняются для $\mathbf{z}$-компоненты седловой точки автоматически.

Это утверждение позволяет нам вместо всех решений уравнения (4) найти одну только седловую точку и при этом быть уверенным, что эта точка и есть состояние с минимально возможной дисперсией. При решении задачи поиска состояний с минимальной неопределенностью фазы седловая точка была найдена для каждого заданного $\langle \mathbf{N} \rangle$ и $\Delta\mathbf{N}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Jackiw R.//J. Math. Phys. 1968. 9. P. 339. [2] Garrison I., Wong J.// J. Math. Phys. 1970. 11. P. 8. [3] Карманов В. Г. Математическое программирование. М., 1975.

Поступила в редакцию
23.09.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1993. Т. 34, № 5

УДК 530.12;531.51;539.12.17

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ КОНСТАНТЫ В 6-МЕРНОЙ ЭВОЛЮЦИОНИРУЮЩЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

Ю. С. Владимиров, А. А. Пераса*)
(кафедра теоретической физики)

В рамках 6-мерной геометрической теории грави-электро-слабых взаимодействий рассмотрено возможное изменение фундаментальных физических констант в эволюционирующих однородных изотропных космологических моделях. В такой теории электрические заряды и массы зависят от времени, а космологическое смещение спектральных линий света обусловлено двумя факторами: доплеровским эффектом и изменением фундаментальных констант за время распространения света. Поскольку эти факторы усиливают друг друга, возраст Вселенной оказывается больше, нежели в стандартной модели Фридмана.

1. Современные исследования многомерных физических теорий развиваются по следующим трем основным направлениям: 1) геометризация физических взаимодействий и тем самым построение геометрической единой теории, включающей гравитацию; 2) описание возможного изменения физических констант, в частности объяснение известной гипотезы Дирака, реализация принципа Маха и других идей; 3) исследование теорий с суперсимметриями и супергравитации. В данной работе объединяются первые два из этих направлений.

Работа выполнена в рамках 6-мерной геометрической модели грави-электро-слабых взаимодействий [1], в которой обобщаются идеи

*) Стипендиат Национального совета по науке и технологии Мексики (CONACYT).