$\ldots\lambda_k^*)$, что для всех $\mathbf{z}$ из нашего пространства размерности N и для всех $\lambda_i \geqslant 0$, $i=\overline{1, k}$, выполнялись бы неравенства

$$\mathbf{L}(\mathbf{z}^*, \lambda) \leqslant \mathbf{L}(\mathbf{z}^*, \lambda^*) \leqslant \mathbf{L}(\mathbf{z}, \lambda^*).$$

Пару $(\mathbf{z}^*, \lambda^*)$ принято при этом называть седловой точкой функции Лагранжа. Важно отметить, что множество, на котором ищется седловая точка функции Лагранжа, имеет простой вид: ограничения (7) в его описании не участвуют и выполняются для $\mathbf{z}$-компоненты седловой точки автоматически.

Это утверждение позволяет нам вместо всех решений уравнения (4) найти одну только седловую точку и при этом быть уверенным, что эта точка и есть состояние с минимально возможной дисперсией. При решении задачи поиска состояний с минимальной неопределенностью фазы седловая точка была найдена для каждого заданного $\langle\mathbf{N}\rangle$ и $\Delta\mathbf{N}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Jackiw R.//J. Math. Phys. 1968. 9. P. 339. [2] Garrison I., Wong J.// J. Math. Phys. 1970. 11. P. 8. [3] Карманов В. Г. Математическое программирование. М., 1975.

Поступила в редакцию
23.09.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1993. Т. 34, № 5

УДК 530.12;531.51;539.12.17

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ КОНСТАНТЫ В 6-МЕРНОЙ ЭВОЛЮЦИОНИРУЮЩЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

Ю. С. Владимиров, А. А. Пераса*)
(кафедра теоретической физики)

В рамках 6-мерной геометрической теории грави-электро-слабых взаимодействий рассмотрено возможное изменение фундаментальных физических констант в эволюционирующих однородных изотропных космологических моделях. В такой теории электрические заряды и массы зависят от времени, а космологическое смещение спектральных линий света обусловлено двумя факторами: доплеровским эффектом и изменением фундаментальных констант за время распространения света. Поскольку эти факторы усиливают друг друга, возраст Вселенной оказывается больше, нежели в стандартной модели Фридмана.

1. Современные исследования многомерных физических теорий развиваются по следующим трем основным направлениям: 1) геометризация физических взаимодействий и тем самым построение геометрической единой теории, включающей гравитацию; 2) описание возможного изменения физических констант, в частности объяснение известной гипотезы Дирака, реализация принципа Маха и других идей; 3) исследование теорий с суперсимметриями и супергравитации. В данной работе объединяются первые два из этих направлений.

Работа выполнена в рамках 6-мерной геометрической модели грави-электро-слабых взаимодействий [1], в которой обобщаются идеи

*) Стипендиат Национального совета по науке и технологии Мексики (CONACYT).

5-мерной классической теории Калуцы [2]. В этой 6-мерной теории электромагнитное поле и поле Z-бозонов описываются компонентами $G_{\mu5}$ и $G_{\mu6}$ 6-мерной метрики, где $\mu=0, 1, 2, 3$. Заряженные W-бозоны обусловлены зависимостью этих компонент от дополнительных размерностей. Скалярные хиггсовские бозоны вводятся через конформный множитель в метрике. В настоящей теории использована топология тора, т. е. дополнительные размерности компактифицированы. Из этой 6-мерной теории как частные случаи следуют как эйнштейновская общая теории относительности, так и известная модель Вайнберга—Салама электрослабых взаимодействий.

2. Существенной для дальнейшего чертой этой 6-мерной теории является то, что в ней ряд фундаментальных физических констант выражается через компоненты метрики G_{55} и G_{66}. Так, для электрического заряда e, константы $\bar{g}$, характеризующей взаимодействие с Z-бозоном, угла Вайнберга θ_W и массы m_Z Z-бозона получены следующие выражения:

$$e=\frac{4\sqrt{k}\,\hbar\alpha}{c}\,\frac{\lambda^5\sigma^6}{\sqrt{(\sigma^6)^2+(\lambda^5)^2}},\quad \bar{g}=\frac{4\sqrt{k}\,\hbar\alpha}{c}\sqrt{(\sigma^6)^2+(\lambda^5)^2}, \tag{1}$$

$$\sin\theta_W=\frac{\lambda^5}{\sqrt{(\sigma^6)^2+(\lambda^5)^2}},\quad m_Z=\frac{4\sqrt{5}}{c}\,\hbar\,(b_0\eta_0)\,\alpha\sqrt{(\sigma^6)^2+(\lambda^5)^2},$$

где k — ньютоновская постоянная, $\hbar$ — постоянная Планка, α — параметр, характеризующий радиус компактификации дополнительных размерностей, $b_0\eta_0$ — массовый фактор, λ^N и σ^N — компоненты двух ортонормированных векторов, ортогональных метрике 4-мерного пространственно-временного сечения. Последние определяются $1+1+4$-расщеплением 6-мерной метрики

$$G_{MN}=g_{MN}-\lambda_M\lambda_N-\sigma_M\sigma_N, \tag{2}$$

где M, N принимают значения: 0, 1, 2, 3, 5, 6. В специальной калибровке, аналогичной 2-кратной хронометрической в общей теории относительности, компоненты λ^N и σ^N имеют следующий вид:

$$\lambda^N=\left\{0;\ 0;\ 0;\ 0;\ \frac{\sqrt{-G_{66}}}{\sqrt{G_{55}G_{66}-G_{56}^2}};\ \frac{G_{56}}{\sqrt{-G_{66}\,(G_{55}G_{66}-G_{56}^2)}}\right\}, \tag{3}$$

$$\sigma^N=\{0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 1/\sqrt{-G_{66}}\}.$$

3. В ряде предыдущих наших работ [3, 4] анализировалось возможное изменение фундаментальных физических констант (1) в рамках статических, цилиндрических по дополнительным координатам x^5 и x^6 и сферически-симметричных по трем классическим пространственным координатам решений 6-мерных уравнений Эйнштейна. В частности, обсуждались возможные эффекты скаляризма, обусловленные эллиптичностью земной орбиты.

4. В данной статье анализируются возможные следствия переменности физических констант в рамках 6-мерных однородных изотропных (в 3-мерном смысле) космологических моделей [5], полученных из решений 6-мерных уравнений Эйнштейна

$${}^6R_{MN}-(1/2)\,G_{MN}\,{}^6R=\varkappa T_{MN}, \tag{4}$$

где T_{MN} — 6-мерный тензор энергии-импульса негеометрической материи. Метрика искалась в виде

$$dI^2 = \varphi^2 \{a^2 [dx^{0^2} - dx'^2 - F^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] - dx^{5^2} - \psi^2 dx^{6^2}\}, \tag{5}$$

где $G_{55} = -\varphi^2$; $G_{66} = -\varphi^2\psi^2$ — дополнительные диагональные компоненты метрики; функция $F^2(x^1)$ может иметь три значения: $F^2 = \mathrm{sh}^2 x^1$ — для гиперболического пространственного сечения, $F^2 = x'^2$ для евклидова пространства и $F^2 = \sin^2 x^1$ — для 3-мерного риманова пространственного сечения. Из уравнений искались четыре функции временеподобной координаты x^0: $a(x^0)$, $\varphi(x^0)$, $\psi(x^0)$ и плотность $\mu(x^0)$ пылевидной материи. Был получен ряд точных решений для открытых космологических моделей. Особо подчеркнем, что компоненты G_{55} и G_{66} трактовались как квадраты потенциалов дополнительных (гипотетических) скалярных полей. Исходя из этого в [5] вакуумные решения (при $C_{(2)} = 2$) интерпретировались как нереалистические и полагались физически неприемлемыми третье и четвертое решения (при $C_{(2)} = 8/3$) в формулах (25) как соответствующие отрицательной плотности вещества.

Однако возможен принципиально иной взгляд на физический смысл дополнительных компонент G_{55} и G_{66} 6-мерной метрики — как на геометрический образ вещества, заполняющего Вселенную. В этом случае упомянутые выше решения приобретают реалистический характер, тогда как первое и второе решения в формулах (25) статьи [5] оказываются ложными.

В частности, рассмотрим третье из указанных в формулах (25) работы [5] решений, соответствующее открытой расширяющейся космологической модели,

$$a = a_0 e^{\sqrt{3}x^0}; \ \varphi = \varphi_0 e^{-x^0/\sqrt{3}}; \ \psi = \psi_0 = \mathrm{const}, \tag{6}$$

где a_0, φ_0, ψ_0 — константы интегрирования. Перенося в 6-мерных уравнениях Эйнштейна слагаемые, содержащие G_{55} и G_{66}, вправо и трактуя всю правую часть уравнений через эффективные плотность и давление вещества, заполняющего Вселенную, находим положительное значение для плотности вещества:

$$\mu_{ef} = 26/3\varkappa a^2 \varphi^2, \tag{7}$$

где $\varkappa$ — эйнштейновская гравитационная постоянная. Использованное в [5] условие $\dot\psi/\psi = 0$ теперь фактически соответствует заданию некоторого уравнения состояния среды (идеальной жидкости), заполняющей Вселенную. В данном конкретном случае $p < 0$. Однако получен ряд других точных решений, для которых уравнениям состояния среды соответствуют условия $(\tilde\alpha - 1)\dot\varphi/\varphi = \dot\psi/\psi$, где $\tilde\alpha$ — некоторый параметр.

5. В рамках всего класса охарактеризованных космологических моделей формулы (1) принимают вид

$$e = \frac{4\sqrt{k}\hbar\alpha}{c\sqrt{1+\psi_0^2}} \cdot \frac{1}{\varphi} \equiv \frac{e_0}{\varphi}; \ \bar g = \frac{4\sqrt{k}\hbar\alpha}{c} \frac{\sqrt{1+\psi_0^2}}{\psi_0} \cdot \frac{1}{\varphi} \equiv \frac{\bar g_0}{\varphi}; \tag{8}$$

$$\sin\theta_W = \frac{\psi_0}{\sqrt{1+\psi_0^2}} = \mathrm{const}; \ m_Z = m_{Z_0}/\varphi.$$

Отсюда следует, что угол Вайнберга θ_W остается постоянным, тогда как e, $\bar g$ и m_Z становятся зависящими от временеподобной координаты x^0, т. е. возрастают в расширяющейся космологической модели (6).

Следует подчеркнуть, что x^0 имеет смысл лишь временеподобного параметра, из которого физическое время τ получается, как и в модели Фридмана, с учетом масштабного фактора. Однако в 6-мерной теории имеются два варианта выбора времени. В первом варианте в качестве масштабного фактора выбирается величина a, тогда

$$d\tau = a(x^0)\,dx^0 \to \tau = \int a(x^0)\,dx^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,a_0\,(e^{\sqrt{3}x^0} - 1), \tag{9}$$

где константа интегрирования выбрана так, чтобы при $x^0=0$ было $\tau=0$. Подставляя (9) в (6), имеем

$$a = a_0 + \sqrt{3}\,\tau,\ \ \varphi = \varphi_0\,(1 + \sqrt{3}\,\tau/a_0)^{-1/3}. \tag{10}$$

Во втором варианте в качестве масштабного фактора выбирается величина $a(x^0)\varphi(x^0)$, тогда

$$d\tilde{\tau} = a(x^0)\,\varphi(x^0)\,dx^0 \to \tilde{\tau} = \int a\varphi dx^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a_0\varphi_0\,(e^{\frac{2}{\sqrt{3}}x^0} - 1) \tag{11}$$

при тех же соображениях относительно выбора константы интегрирования. В этом случае имеем

$$a = a_0\left(\frac{2\tilde{\tau}}{\sqrt{3}\,a_0\varphi_0} + 1\right)^{3/2};\ \ \varphi = \varphi_0\left(\frac{2\tilde{\tau}}{\sqrt{3}\,a_0\varphi_0} + 1\right)^{-1/2}. \tag{12}$$

Будем анализировать оба варианта.

6. Напомним, что в 4-мерной общей теории относительности эволюция Вселенной описывается решениями Фридмана. Из требования соответствия экспериментальным данным по хаббловскому красному смещению спектральных линий выбираются лишь те решения, которые описывают расширяющуюся Вселенную. Известно, что смещение линий определяется формулой

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{l}{c}\,H \simeq \frac{\Delta\tau}{\tau}, \tag{13}$$

где постоянная Хаббла

$$H = c\,\frac{1}{a^2}\,\frac{da}{dx^0}, \tag{14}$$

$\Delta\nu=\nu_1-\nu_2$ — разность частот испущенного (ν_1) и принятого (ν_2) излучения, $l=ca\Delta x^0$ — расстояние от приемника до излучателя. При этом неявно постулируется, что физические константы со временем не изменяются. В данном же случае 6-мерной теории этот постулат не имеет места и в интерпретацию наблюдаемого красного смещения должны быть внесены коррективы. Теперь в красное смещение дают вклад два фактора: во-первых, как и в эйнштейновской теории, доплеровский эффект разбегания галактик и, во-вторых, эффект изменения частот спектральных линий из-за разного значения физических констант в моменты испускания и поглощения фотонов.

7. Для оценки последнего эффекта воспользуемся известной формулой для значений энергетических уровней в водородоподобных атомах:

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2n^2\hbar^2}, \tag{15}$$

где $n=1, 2, 3, \ldots$ — главное квантовое число, m — приведенная масса, Z — заряд ядра. Предположим, что масса m изменяется по закону

(8), полученному для массы Z-бозона. Отдельно проанализируем эффект для двух упомянутых выше вариантов определения физического времени.

Первый вариант. Подставляя значения заряда и массы из (8) при определении τ и φ из (9) и (10) в (15), имеем

$$E_n = E_{n0}(1+\sqrt{3}\tau/a_0)^{5/3}, \tag{16}$$

где E_{n0} — не зависящая от τ величина. Отсюда получаем изменение энергетических уровней атомов за время $\Delta\tau$ распространения света от источника до поглотителя:

$$\Delta E_n = E_{n0}\frac{5\Delta\tau}{\sqrt{3}a_0}(1+\sqrt{3}\tau/a_0)^{2/3}. \tag{17}$$

Относительный сдвиг частот определяется выражением

$$\frac{\Delta E_n}{E_n} = \left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{\text{var.c}} = \frac{5\Delta\tau}{\sqrt{3}\,(a_0\,(1+\sqrt{3}\tau/a_0)}. \tag{18}$$

Ограничимся случаем, когда $\tau/a_0 \gg 1$, тогда

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{\text{var.c}} \approx \frac{5}{3}\frac{\Delta\tau}{\tau}, \tag{19}$$

и суммарный эффект изменения частот, обусловленный двумя факторами, описывается формулой

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{\Sigma} = \left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{D} + \left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{\text{var.c}} \approx \frac{\Delta\tau}{\tau} + \frac{5}{3}\frac{\Delta\tau}{\tau}, \tag{20}$$

т. е. оба вклада имеют одинаковый знак (усиливают друг друга). Заметим, что для сжимающихся космологических моделей имеет место аналогичная ситуация усиления фиолетового смещения.

Второй вариант. Подставим в (15) зависимость заряда и масс от $\tilde{\tau}$, даваемую формулами (11) и (12), тогда для энергетических уровней и относительного изменения частот находим

$$E_n = E_{n0}\left(1+\frac{2\tilde{\tau}}{\sqrt{3}a_0\varphi_0}\right)^{5/2}; \quad \left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{\text{var.c}} = \frac{5\Delta\tilde{\tau}}{\sqrt{3}a_0\varphi_0\,(1+2\tilde{\tau}/\sqrt{3}a_0\varphi_0)}. \tag{21}$$

Пусть опять $\tilde{\tau}/a_0\varphi_0 \gg 1$, тогда

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{\text{var.c}} \approx \frac{5}{2}\frac{\Delta\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}} \tag{22}$$

и суммарное красное смещение определяется формулой

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{\Sigma} \approx \frac{\Delta\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}} + \frac{5}{2}\frac{\Delta\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}}. \tag{23}$$

Таким образом, в рассмотренной здесь расширяющейся открытой космологической модели в обоих вариантах определения наблюдаемого физического времени вклады в красное смещение спектральных линий от двух эффектов (доплеровского эффекта из-за расширения Вселенной и от изменения фундаментальных физических констант) входят с одинаковыми знаками, т. е. усиливают друг друга. В настоящий момент возраст Вселенной оценивается исходя из предположения, что все красное смещение обусловлено исключительно одним доплеровским эффектом. Как известно, такие оценки приводят к недостаточно большому возрасту порядка времени существования земной коры. Если же учесть эффект изменения физических констант в 6-мерной теории, то возраст Вселенной должен быть увеличен. Можно показать, что подобная закономерность имеет место и в других вариантах 6-мерных однородных изотропных космологических решений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Владимиров Ю. С. Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий. М., 1987. [2] Калуца Т.//Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М., 1979. С. 529. [3] Владимиров Ю. С., Мишаков А. В.//Тез. междунар. симп. «Движение пробных тел в релятивистской теории гравитации». Вильнюс, 1990. С. 16. [4] Vladimirov Yu. S., Miroshnik A. O., Mishakov A. V.// Wissenschaftliche Zeitschrift Universität Jena. 1990. **39**, N 1. P. 128. [5] Владимиров Ю. С., Америко Пераса Альварес//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1992. **33**, № 6. С. 17.

Поступила в редакцию 26.02.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1993. Т. 34, № 5

УДК 539.143.43

МЕТОД ПРОЕКЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ТЕОРИИ ЯМР

В. С. Туманов
(кафедра радиофизики)

Предлагается метод проекционных операторов для расчета многоимпульсных и многоквантовых процессов ядерного магнитного резонанса. Рассмотрены применения метода в теории двойного резонанса и для расчета многоквантовой когерентности в системах с квадрупольным моментом и в системах со скалярной спин-спиновой связью.

1. Введение

Одним из наиболее интенсивно развивающихся направлений ядерного магнитного резонанса является изучение процессов, в основном многоквантовых, с помощью импульсных экспериментов (подробное изложение методов, их теории и практического применения можно найти, например, в обзорах [1, 2] и монографии [3], содержащих, в частности, подробную библиографию). Теория этих эффектов связана с решением уравнения для оператора плотности. И если в ранних работах решались системы уравнений в матричной форме, то впоследствии стали развиваться операторные методы, имеющие значительные преимущества. Операторный подход последовательно используется и в упомянутых выше работах.

Операторный подход сводится к поэтапному вычислению выражений для оператора плотности

$$\rho(t_2) = \exp\{-i\mathcal{H}(t_2-t_1)\}\rho(t_1)\exp\{i\mathcal{H}(t_2-t_1)\}$$

($\mathcal{H}$ — спиновый гамильтониан в частотных единицах), т. е. представлению их в виде сумм произведений спиновых операторов. В данной работе предлагается метод проекционных операторов, позволяющий эффективно проводить расчеты подобного типа в случае спинов произвольной величины. Это могут быть как спины отдельных ядер, так и