

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 533.951

СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОЙ И ФЕРМИЕВСКОЙ ПЛАЗМЕ

И. М. Алешин, Л. С. Кузьменков

(кафедра теоретической физики)

Рассмотрены волны произвольной амплитуды в фермиевской и ультрарелятивистской плазме. В отличие от линейной теории свойства волн конечной амплитуды в этих средах имеют существенные отличия.

Стационарные сильно нелинейные волны в холодной плазме были описаны в работах [1, 2]. Было показано, что амплитуда электрического поля и потенциала до-световых волн (фазовая скорость v_0 меньше скорости света c) ограничена, что связано с накоплением электронов в областях максимума потенциала. Это явление вновь привлекло внимание в связи с проблемой создания плазменных ускорителей [3] и получило название «прокидывание волны». Влияние теплового движения частиц на ограничение амплитуды электрического поля волны на основе модельной функции распределения «водяной мешок» рассмотрено в обзоре [4]. В работе [5] показано, что конечный тепловой разброс скоростей электронов в максвелловской плазме приводит к существенному изменению формы волны, когда ее амплитуда близка к экстремально большой.

В предлагаемой работе рассматриваются волны конечной амплитуды в ультрарелятивистской ($T \gg mc^2$) и вырожденной плазме. Хотя в обоих случаях равновесное распределение скоростей электронов близко к «ступенчатому», границей которого являются скорость света и фермиевская скорость v_F соответственно, релятивизм динамики электрона в ультрарелятивистской плазме приводит к качественно отличным свойствам этих волн, в частности к отсутствию ограничений на их амплитуду.

Исходим из стационарной системы Власова—Пуассона:

$$(1 - v/v_0) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \tau} + \frac{e}{mv_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \frac{\partial f_\alpha}{\partial p} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{v_0^2} \frac{d^2 \Phi}{d\tau^2} = 4\pi e \left(\int f_+ dp - \int f_e dp \right). \quad (2)$$

Здесь f_α — функция распределения частиц сорта α (индекс «e» обозначает электронную компоненту, «+» — положительно заряженные частицы), $\tau = t - z/v_0$, Φ — электрический потенциал. Для простоты будем рассматривать одномерное распределение частиц по скоростям. Обобщение на трехмерный случай не представляет труда и не приводит к качественным отличиям.

Рассмотрим сначала вырожденную плазму с неподвижными ионами. В этом случае $\rho = mv$ и $f_+ = n_0 \delta(v)$ (n_0 — плотность ионного фона). Вводя безразмерные величины $u = v/v_0$, $\theta = \omega\tau$, $\varphi = 2e\Phi/mv_0^2$, уравнения (1)–(2) можно преобразовать к виду

$$(1 - u) \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \frac{\partial f}{\partial u} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} = 2 \left(1 - \frac{1}{n_0} \int f(u, \varphi) du \right) \equiv 2(1 - N(\varphi)) \equiv G(\varphi). \quad (4)$$

Решением уравнения Власова (3) является произвольная функция $f(\sigma)$ первого интеграла

$$\sigma = (u-1)^2 + \varphi. \quad (5)$$

Явный вид функции $f(\sigma)$ определяем из требования ее перехода в одномерное фермиевское распределение при $\varphi \rightarrow 0$. Тогда

$$f(\sigma) = \frac{v_0}{2q} [\exp \{ \lambda ((1 \pm \sqrt{\sigma})^2 - q^2) \} + 1]^{-1}, \quad (6)$$

где $q = v_F/v_0$, $\lambda = mv_0^2/2T$, а знак « \pm » соответствует значениям u больше и меньше единицы. Подставив (6) в (4), после интегрирования по u получим для функции $\theta(\varphi)$ обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Для низких температур плазмы ($\lambda \gg 1$) интеграл в (4) можно оценить стандартным способом [6]. Тогда

$$N(\varphi) = \begin{cases} \sqrt{(1+q)^2 - \varphi} - \sqrt{(1-q)^2 - \varphi}, & \varphi < (1-q)^2, \\ \sqrt{(1+q)^2 - \varphi}, & (1-q)^2 < \varphi < (1+q)^2 + O(1/\lambda^2), \\ 0, & \varphi > (1+q)^2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что тепловое движение электронов в вырожденной плазме не оказывает существенного влияния на свойства плазменных волн.

График функции $G(\varphi)$ из (4) приведен на рис. 1. Наличие локального минимума этой функции в точке $\varphi = \varphi^* = (1-q)^2$ приводит к ряду характерных свойств изучаемых волн. Амплитуда потенциала в волне ограничена значением

$$\varphi_0 = 1 + 2q(1 - 3q/2) \approx \begin{cases} 1 + 2q, & q \ll 1, \\ 4(1 - q), & q \rightarrow 1 - 0, \end{cases} \quad (7)$$

которое является положительным корнем уравнения $G(\varphi) = 0$. В линейной теории волны с $v_0 \approx v_F$ получили название «электронный звук». Как показано в [7], такие

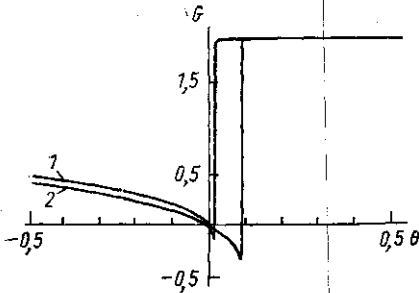


Рис. 1

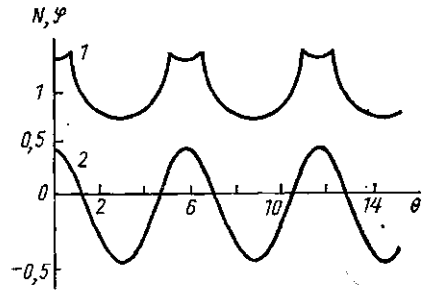


Рис. 2

Рис. 1. График функции $G(\varphi)$ из уравнения (4): $q=0,9$ (1) и $0,7$ (2)

Рис. 2. Решение уравнения (4) (2) и нормированная на n_0 плотность электронов (1) в вырожденной плазме; $q=0,5$

волны не могут распространяться из-за сильного бесстолкновительного затухания. Как следует из равенства (7), «стационарный нелинейный электронный звук» невозможен и в отсутствие резонансного взаимодействия волны с частицами.

Электронная плотность стационарной волны ограничена при любых амплитудах потенциала. Ее максимальное значение достигается при $\varphi = \varphi^*$ и равно $N_{\max} = q^{-1/2}$. Если амплитуда потенциала превышает φ^* , то взаимодействие электронов, как и в максвелловской плазме [5], приводит к раздвоению максимумов их плотности (рис. 2).

Рассмотрим теперь релятивистскую плазму, для которой $p = mv/(1 - v^2/c^2)$. Вводя 4-скорость $u_\alpha = p_\alpha/mc$ и безразмерные величины $\varphi = e\Phi/mc v_0$, $q = c/v_0$, вместо (3) — (4) имеем

$$(1 - qu_z/u_0) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta} + \frac{d\varphi}{d\theta} \frac{\partial f_\alpha}{\partial u_z} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} = \frac{1}{q} \left(\int f_+ du - \int f_e du \right) \equiv \frac{1}{q} (N_+ (\varphi) - N_e (\varphi)) \equiv G(\varphi). \quad (9)$$

Тогда (6) и (5) заменяются соответственно на

$$f_e = \frac{n_0 \lambda}{K_1(\lambda)} \exp(-\lambda(q\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 1 - q^2})),$$

$$\sigma(u_2\theta) = u_2 - qu_0 - \varphi(\theta), \quad \lambda = \frac{mc^2}{T}.$$

Интегрирование в выражении для $N_e(\varphi)$ из (9) можно выполнить в случае низких ($\lambda \gg 1$) и очень высоких ($\lambda \ll 1$) температур плазмы. В первом случае для вычисления $N_e(\varphi)$, как и в [8], используем асимптотический метод Лапласа, а во втором можно положить $u_0 = u$. Тогда

$$N_e(\varphi) = -\frac{1}{q^2 - 1} \left(1 - \frac{q(q - \varphi)}{\sqrt{(q - \varphi)^2 + 1 - q^2}} \right) - \frac{3q^2}{2\lambda [(q - \varphi)^2 + 1 - q^2]^{3/2}} \left(1 - \frac{q - \varphi}{q} \frac{1}{(q - \varphi)^2 + 1 - q^2} \right), \quad \lambda \gg 1, \quad (10)$$

$$N_e(\varphi) = \begin{cases} (1 - q \exp\{-\lambda\varphi/(1+q)\})/(1-q), & \varphi > 0, \\ (1 + q \exp\{\lambda\varphi/(1-q)\})/(1+q), & \varphi < 0. \end{cases} \quad \lambda \ll 1, \quad (11)$$

Для неподвижного ионного фона, как и прежде, $N_+ = 1$, для электрон-позитронной плазмы $N_+(\varphi) = N_e(-\varphi)$.

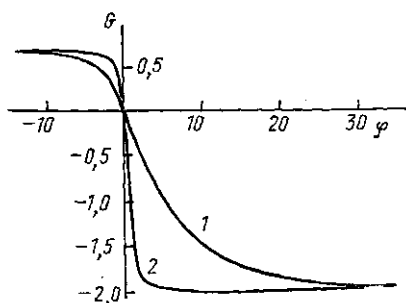


Рис. 3

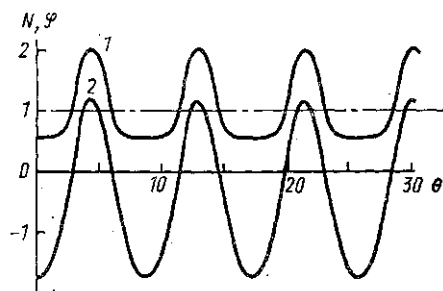


Рис. 4

Рис. 3. Графики функции $G(\varphi)$ из уравнения (9) для большой ($\lambda=0,2$) и малой ($\lambda=100$) температуры плазмы (кривые 1 и 2 соответственно); $q=0,5$

Рис. 4. Решение уравнения (9) (2) и нормированная на n_0 плотность электронов (1) в ультрарелятивистской электрон-ионной плазме; $q=0,9$, $\lambda=0,2$

На рис. 3 изображена зависимость функции $G(\varphi)$ с учетом (10) и (11), из которой видно, что при фиксированной амплитуде потенциала тепловое движение электронов существенно изменяет свойства волны. Тем не менее для любых температур плазмы существуют такие значения амплитуды потенциала волны $\Phi_{\max}(T)$, что влияние теплового разброса скоростей электронов пренебрежимо мало. При больших значениях φ функция $G(\varphi)$ имеет асимптотические значения, не зависящие от температуры:

$$G(\varphi) = q \begin{cases} \frac{1}{q-1}, & \varphi \rightarrow \infty, \\ \frac{1}{q+1}, & \varphi \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Период таких волн определяется выражением

$$T = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{(1-q)(1+q)}} \sqrt{\varphi_{\max}}.$$

В отличие от рассмотренного выше случая «сильно нелинейного электронного звука» в ультрарелятивистской плазме при $q=c/v_0 \gg 1$ не возникает ограничений на амплитуду потенциала, так как не существует частиц со сверхсветовыми скоростями. При достаточно малых значениях $\varepsilon=1-q$ волна в электрон-ионной плазме становится сильно несимметричной (рис. 4).

Работа выполнена в рамках программы «Университеты России».

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ахиезер А. И., Любарский Г. Я.//ДАН СССР. 1951. 80. С. 193.
[2] Ахиезер А. И., Половин Р. В.//ЖЭТФ. 1956. 30. С. 696. [3] Morigi W. V.//
IEEE Trans. Plasma Sci. 1987. 15, N 2. P. 88. [4] Katsouleous T., Morigi W. V.//
Phys. Rev. Let. 1988. 61. P. 90. [5] Алешин И. М., Дрофа М. А., Кузьмен-
ков Л. С.//Физика плазмы. 1993. 19, № 8. С. 999. [6] Ландау Л. Д., Лиф-
шиц Е. М. Статистическая физика, ч. 1. М., 1976. С. 190. [7] Кривицкий В. С.,
Владимиров С. В.//ЖЭТФ. 1991. 100. С. 1493. [8] Алешин И. М.//Вестн. Моск.
ун-та. Физ. Астрон. 1992. 33, № 4. С. 84.

Поступила в редакцию
21.04.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1993. Т. 34, № 5

АКУСТИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УДК 534.222

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МИКРОВЫСТУПОВ ШЕРОХАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО ДАННЫМ АКУСТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

О. В. Руденко, Чинь Ань Ву*)
(кафедра акустики)

Показано, что коэффициенты отражения волн первой и второй гармоник от поверхности поджатого контакта как функции прижимающего давления несут информацию о статистических характеристиках размеров микровыступов. Построена модель контакта как ансамбля пружинок различной длины. Предложен способ обработки экспериментальных данных. Получена оценка характерных размеров элемента шероховатости, отвечающая классу чистоты образца.

Класс чистоты контактирующих поверхностей определяет долговечность машин и механизмов, имеет важное значение для многих современных технологий. Фактическая площадь контакта измеряется по его электропроводности, сближению шероховатых поверхностей под действием нагрузки, по наблюдению оптических или иных

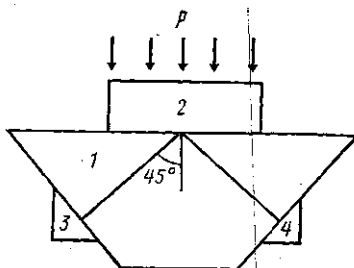


Рис. 1

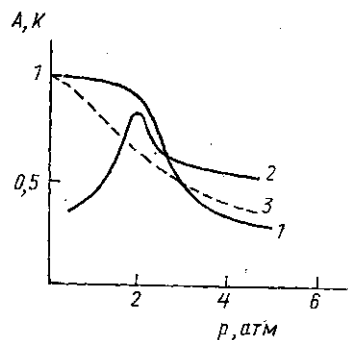


Рис. 2

физических явлений в контактной области [1]. Каждый из этих методов эффективен в определенных условиях, например для проводящих или оптически прозрачных материалов.

Известно, что акустические методы диагностики благодаря своей простоте и универсальности наиболее широко используются в приложениях. Поэтому при наблюде-

*) Вьетнам.