где

$$P' = \prod_{j(\neq k)} P_{m_j}.$$

В конце раздела 3 было показано, что воздействие на систему AX широкополосного импульса после селективного приводит к переносу когерентности. Выведенная общая формула дает возможность получить обобщение на случай произвольного спектра. Действительно, из (8) следует, что при $\varphi=\pi/2$ исходный оператор плотности I_{1z} превращается в $I_{1y}P_{m_2}$. Воздействие последующего широкополосного π-импульса на частотах второго подспектра переводит I_{2z} в $-I_{2z}$, т. е. $P_{m_2}(I_{2z})$ переходит в $P_{m_2}(-I_{2z})$. Из явного выражения проекционного оператора

$$P_{m_2}(I_{2z}) = \prod_{m_2'(\neq m_2)} \frac{I_{2z} - m_2'}{m_2 - m_2'}$$

следует, что $P_{m_2}(-I_{2z}) = P_{-m_2}(I_{2z})$. Таким образом, прецессия намагниченности с частотой $\omega_1 + Jm_2$ (где J — константа спин-спинового взаимодействия) переходит в прецессию с частотой $\omega_1 - Jm_2$. Аналогичный эффект существует и в случае систем с произвольным числом групп эквивалентных ядер.

Автор благодарит Ю. С. Константинова за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Туманов В. С.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1993. 34, № 5. С. 21. [2] Vega S., Pines A.//J. Chem. Phys. 1977. 66. P. 5624. [3] Wokaun A., Ernst R. R.//J. Chem. Phys. 1977. 67. P. 1752. [4] Vega S.//J. Chem. Phys. 1978. 68. P. 5518. [5] Эрнст Р., Боденхаузен Дж., Вокаун А. ЯМР в одном и двух измерениях. М., 1990. [6] Feynman R. P., Vernon F. L., Hellwarth R. W.//J. Appl. Phys. 1957. 28. P. 49.

Поступила в редакцию
19.10.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1993. Т. 34, № 6

УДК 530.1;514.7;517.9

ФАЗОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА НЕНУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ И ЭВОЛЮЦИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. Г. Попов

(кафедра математики)

Для описания физических явлений предлагается использование фазовых пространств ненулевой кривизны (неевклидовых фазовых пространств). Имеющимся особенностям таких пространств отвечают инвариантные (равновесные) состояния физических систем. Исследуются псевдосферические фазовые пространства, на которых реализуется геометрия Лобачевского. Формулируются общие принципы эволюции явлений, описываемых, в частности, уравнениями sin-Гордона, Кортевега—де Фриза, Бюргерса, Лиувилля и др.

1. Введение

В настоящей статье анонсируется геометрический подход к интерпретации динамики физических процессов, задаваемых нелинейными

дифференциальными уравнениями (уравнения sin-Гордона, Кортевега—де Фриза, Бюргерса, Лиувилля и др.). В основе предлагаемого метода — использование двумерных поверхностей ненулевой кривизны, связанных с отмеченными уравнениями, в качестве двумерных фазовых пространств (поверхностей), особенностям которых отвечают инвариантные (равновесные) состояния физических систем. Детально исследуются псевдосферические фазовые поверхности. Сформулированы общие принципы развития различных по своей природе явлений: распространение волн на мелкой воде, динамика блоховских стенок, дислокации в кристаллах и др. Отмечается, что в целом закономерности протекания рассматриваемых физических процессов тесно связаны с проблемами реализуемости геометрии Лобачевского в евклидовом пространстве.

2. Геометрия нелинейных уравнений

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$\mathcal{F}(u,\ u_x,\ u_t,\ \ldots)=0 \tag{1}$$

для неизвестной функции $u=u(x,t)$.

Определение 1. Будем говорить, что уравнение (1) задает метрику поверхности гауссовой кривизны K в трехмерном евклидовом пространстве E^3, если по любому регулярному решению $u(x,t)$ уравнения (1) всегда можно записать метрику поверхности данной кривизны K:

$$ds_K^2=E\,dx^2+2F\,dx\,dt+G\,dt^2 \tag{2}$$

с коэффициентами E, F, G, зависящими от решения u и его производных.

Нижний индекс в ds_K^2 обозначает кривизну метрики.

Многие уравнения математической физики задают метрики псевдосферических поверхностей — поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны $K\equiv-1$. Приведем примеры таких уравнений с соответствующими им метриками.

1) Уравнение sin-Гордона:

$$\begin{aligned} &u_{xt}=\sin u,\\ &ds_{-1}^2=dx^2+2\cos u\,dx\,dt+dt^2. \end{aligned} \tag{3}$$

2) Уравнение Кортевега—де Фриза:

$$\begin{aligned} &u_t+6uu_x+u_{xxx}=0, \\ &ds_{-1}^2=[(u-1)^2+\eta^2]\,dx^2- \\ &-2[(u-1)(u_{xx}+\eta u_x+(\eta^2-2)u+2u^2-\eta^2)+\eta(\eta^3+2\eta u+2u_x)]\,dx\,dt+ \\ &+[(u_{xx}+\eta u_x+(\eta^2-2)u+2u^2-\eta^2)^2+(\eta^3+2\eta u+2u_x)^2]\,dt^2,\ \eta=\mathrm{const}. \end{aligned} \tag{4}$$

3) Эллиптическое уравнение Лиувилля:

$$\begin{aligned} &\Delta u=e^u,\\ &ds_{-1}^2=(e^u/2)\,(dx^2+dt^2). \end{aligned} \tag{5}$$

В [1, 2] приводятся также и другие примеры уравнений, задающих метрики псевдосферических поверхностей, кроме этого в [2] опреде-

лены условия возможности рассматриваемой геометрической интерпретации для эволюционных уравнений.

Приведенные примеры можно обобщить на случай произвольной гауссовой кривизны $K(x, t)$. А именно уравнения, обобщающие (3) и (5), имеют соответственно вид

$$u_{xt} = -K(x, t)\sin u, \tag{3'}$$

$$\Delta u = -K(x, t)e^{u}. \tag{5'}$$

При этом само исходное уравнение (3) и его обобщение (3′) (аналогично (5) и (5′)) задают метрики качественно совпадающего вида.

Всякое уравнение (1), подчиняющееся определению 1 (и, в частности, уравнения (3)—(5)), можно рассматривать как уравнение Гаусса для вычисления кривизны поверхности с соответствующей метрикой (2).

На поверхностях в E^3 имеются, вообще говоря, особенности — нерегулярные ребра, острия и пр. Обратимся к исследованию особенностей двумерных поверхностей в E^3.

3. Особенности двумерных поверхностей в E^3

Рассмотрим в пространстве E^3 поверхность S, определяемую радиус-вектором $\mathbf{r}(x, t)$, где x, t — внутренние координаты на поверхности. Требование независимости параметров x, t, однозначно задающих функцию $\mathbf{r}(x, t)$, выражается условием

$$[\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_t] \neq 0. \tag{6}$$

Условие (6) — это условие неколлинеарности $\mathbf{r}_x$ и $\mathbf{r}_t$ — касательных векторов к координатным линиям на поверхности. Те возможные точки поверхности S, в которых выполняется обратное к (6) условие

$$[\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_t] = 0, \tag{7}$$

называются особыми точками поверхности (особенностями). К особенностям относят также и те точки поверхности, в которых функция $\mathbf{r}(x, t)$ не имеет хотя бы одной из своих производных $\mathbf{r}_x$ или $\mathbf{r}_t$. Особенности могут иметь и протяженный характер — нерегулярные ребра, представляющие собой огибающие точек соприкосновения координатных линий.

В терминах метрики (2) соотношения (7) переписываются как

$$EG - F^2 = 0. \tag{8}$$

Следовательно, особенности некоторой поверхности S однозначно определяются по ее метрике.

Введем обозначение

$$\mathrm{erd}\{S, \mathcal{F}(u, u_x, u_t, \ldots) = 0\} \backsim \{EG - F^2 = 0\}, \tag{9}$$

смысл которого состоит в том, что поверхность S с метрикой, задаваемой уравнением (1), имеет особенность, определяемую условием (8). (Обозначение erd от англ. слова «erdge» — ребро.)

Для уравнения sin-Гордона (3) особенности соответствующих ему псевдосферических поверхностей задаются условиями $u = n\pi$ (n — целое) [3, 4] и запись (9) принимает вид

$$\mathrm{erd}\{S, u_{xt} = \sin u\} \backsim \{u = n\pi\}, \quad n \text{ — целое}.$$

4. Поверхности с особенностями как двумерные фазовые пространства

В этом пункте будут сформулированы принципы эволюции физических систем, связанных с дифференциальными уравнениями и их геометрией. В основе предлагаемого подхода лежит идея использования поверхностей ненулевой кривизны в качестве двумерных фазовых пространств (поверхностей) — нелинейных аналогов классических фазовых пространств в теоретической физике. В отличие от евклидовых фазовых пространств (пространств нулевой кривизны), обычно вводимых в классической механике и статистической физике, у фазовых пространств ненулевой кривизны возможны особенности; эти особенности определяют инвариантные (равновесные) состояния физических систем.

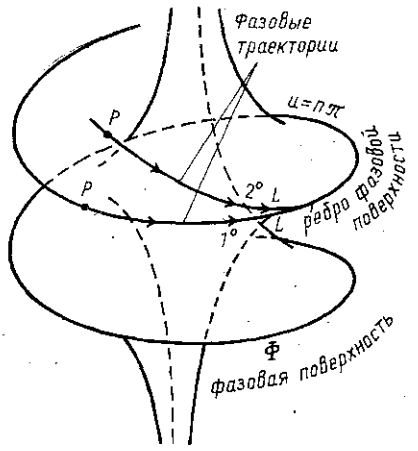

Рис. 1. Два качественно различных варианта поведения фазовой траектории L на фазовой поверхности Ф (изображена псевдосферическая поверхность, отвечающая односолитонному решению уравнения sin-Гордона)

Рассмотрим поверхность S с метрикой (2), задаваемой уравнением (1), которое описывает некоторый физический процесс П. Полагая, что в целом на всей поверхности S существует регулярная сеть линий, выберем такую сеть в качестве координатной (под регулярностью сети понимается регулярность всех ее линий как пространственных кривых). Тогда поверхность S можно интерпретировать как фазовую поверхность Ф (в том случае, когда поверхность интерпретируется в качестве фазовой, будем обозначать ее Ф). А именно каждому состоянию физической системы (фиксированным значениям параметров x и t) будет соответствовать определенная точка P на фазовой поверхности Ф, а самому протеканию процесса — движение точки P вдоль некоторой линии L на поверхности Ф, называемой фазовой траекторией (см. рис. 1). Фазовая траектория L представляет собой пространственную кривую в E^3 с радиус-вектором $\mathbf{r}_L$.

Известные фазовые траектории, рассматриваемые в различных разделах теоретической физики (кривые, определяющие развитие естественных процессов), являются регулярными кривыми. Вероятно, этот факт обусловлен условием корректности причинно-следственной связи явлений. Поэтому в основу предлагаемого рассмотрения положим принцип *регулярности фазовой траектории.*

Последнее выделяет два возможных варианта поведения фазовой траектории на поверхности Ф, имеющей особенности: 1) фазовая траектория (неограниченная линия) целиком лежит на регулярной части поверхности Ф, асимптотически приближаясь к ее особенности; 2) фазовая траектория совпадает с нерегулярным ребром поверхности Ф (рис. 1).

Условие регулярности фазовой траектории не позволяет ей пересекать нерегулярное ребро фазовой поверхности.

Характер геометрического поведения фазовой траектории приводит к следующему принципу эволюции физических систем.

Принцип 1. *Пусть некоторый физический процесс* П *описывается уравнением* (1), *задающим метрику* (2) *поверхности* Ф *(поверхности с особенностями). Тогда этот процесс может протекать по одному из двух возможных направлений:*

1°. *Если в начальный момент времени* $t=t_0$ *выполняется условие*

$$(EG-F^2)|_{t=t_0}=0,$$

то оно будет выполняться и во все последующие моменты времени:

$$\Pi: EG-F^2=0 \quad \forall t>t_0.$$

2°. *Если же в начальный момент времени* $t=t_0$:

$$(EG-F^2)|_{t=t_0}\neq 0,$$

то с течением времени физическая система стабилизируется следующим образом:

$$\Pi: (EG-F^2)\to 0 \quad \text{при } t\to\infty.$$

Состояние системы, задаваемое условием (8), будем называть инвариантным. Введем для него обозначение

$$\operatorname{inv}\{\Pi,\ \mathcal{F}(u,\ u_x,\ u_t,\ \ldots)=0\}.$$

Из предшествующего изложения ясно, что

$$\operatorname{inv}\{\Pi,\ \mathcal{F}(u,\ u_x,\ u_t,\ \ldots)=0\}\backsim \operatorname{erd}\{\Phi,\ \mathcal{F}(u,\ u_x,\ u_t,\ \ldots)=0\}\backsim$$
$$\backsim\{EG-F^2=0\}.$$

Согласно принципу 1, в соответствующих физических системах либо реализуется инвариантное состояние, либо они стремятся к нему. Положение 1° принципа 1 можно трактовать как своеобразный закон сохранения.

Поясним принцип 1 на примере распространения волн на мелкой воде [5]. То есть рассмотрим плоские волны на поверхности жидкости, максимальная амплитуда a возмущения которых мала по сравнению с глубиной h: $\varepsilon=a/h\ll 1$, а длина возмущения (волны) l велика по сравнению с h: $\delta=h/l\ll 1$. Исследование этой модели методами теории возмущений (роль малых параметров здесь играют ε и δ) приводит к уравнению Кортевега—де Фриза (4), в котором искомая функция $u(x, t)$ имеет смысл амплитуды волны. Инвариантное состояние этой системы следующее:

$$\operatorname{inv}\{\Pi,\ u_t+6uu_x+u_{xxx}=0\}\backsim\{u_x=0\}.$$

Следовательно, в соответствии с п. 2° принципа 1 процесс распространения волны на мелкой воде приходит к состоянию $u_x=0$ (или $u=$ $=\text{const}$), что отвечает известному затуханию таких волн. Положение 1° принципа 1 реализует невозмущенное состояние поверхности жидкости.

Конкретизируем принцип 1 для случая уравнения sin-Гордона (3).

Принцип 2. *Пусть величина u^*, задающая некоторый физический процесс, удовлетворяет уравнению* sin-*Гордона* (3). *Тогда*:

1°. *Значения $u^*=n\pi$ (n — целое) являются инвариантами этого физического процесса.*

2°. *Если в некоторый момент времени $u^*\neq n\pi$ (n — целое), то с течением времени величина u^* асимптотически монотонно стремится к значению, кратному π, так, что ее изменение в течение всего процесса будет меньшим π.*

В реальном физическом процессе, согласно п. 1° принципа 2, величина u^* может принимать значение $n\pi$ только в том случае, когда u^* тождественно равна $n\pi$ в течение всего процесса (состояние $n\pi$-инвариантности).

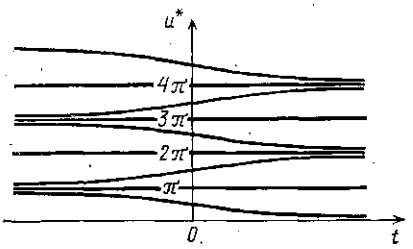

Рис. 2. Качественная структура наблюдаемой величины u^* в явлениях, описываемых уравнением sin-Гордона. Значения u^* получаются из аналитического решения $u(x, t)$ уравнения sin-Гордона выделением его значений на фазовой траектории

Приведем примеры явлений, подчиняющихся принципу 2 (отметим, что геометрическое и физическое содержание этого принципа проанализировано в [6, 7]).

Состояние $n\pi$-инвариантности соответствует следующим закономерностям: 1) самоиндуцированной прозрачности, проявляющейся при распространении ультракоротких импульсов в двухуровневых резонансных средах (прохождение сквозь среду без потерь энергии импульсов, площадь которых кратна π) [8, 9]; 2) равновесным положениям атомов в кристаллических решетках [10]; 3) вакуумным состояниям мезонов [11]; 4) топологически инвариантным состояниям элементарных частиц [12]; 5) устойчивым состояниям ориентации вектора намагниченности по внешнему магнитному полю в ферромагнетиках [13]. В целом состояние $n\pi$-инвариантности реализует собой равновесное состояние системы.

Положение 2° принципа 2 описывает, например, такие закономерности: 1) изменение площади ультракороткого импульса [8, 9], 2) неустойчивость промежуточных положений атомов в кристаллах, дискретный характер дислокаций [10], 3) релаксацию возмущенных состояний элементарных частиц к вакуумному состоянию [11], 4) затухание тока в джозефсоновском контакте [14], 5) вращение вектора намагниченности в «180°-стенке» Блоха [13].

Содержание принципа 2 качественно представлено на рис. 2.

Существенно отметить, что наблюдаемая в эксперименте величина u^* отличается от самого аналитического решения $u(x, t)$ уравнения sin-Гордона. А именно: величина u^* получается из решения $u(x, t)$ выделением его значений на фазовой траектории:

$$u^* = u(x, t)|_{(x,t)\in L},$$

при этом изменение u^* за время всего наблюдения будет меньшим π в силу регулярности фазовой траектории L.

Таким образом, само аналитическое решение уравнения sin-Гордона не может наблюдаться в эксперименте — наблюдается лишь указанная величина u^* (рис. 2). В общем, вопросы экспериментальной наблюдаемости в явлениях, подчиняющихся принципу 2, тесно взаимосвязаны с проблемой изометрических погружений частей плоскости Лобачевского в трехмерное евклидово пространство E^3 [3, 7]. Последнее означает, что такие явления являются в определенном смысле объектами исследования геометрии Лобачевского.

В таблице приведены инвариантные состояния для различных уравнений математической физики.

Дифференциальные уравнения и инвариантные состояния физических систем

Уравнение	Инвариантное состояние физической системы	Уравнение	Инвариантное состояние физической системы
1. $u_{xt} = \sin u$, уравнение sin-Гордона	$u = n\pi$, n — целое	5. $u_{xt} = e^u$, гиперболическое уравнение Лиувилля	$u_x = 0$
2. $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$, уравнение Кортевега—де Фриза	$u_x = 0$	6. $\Delta u = e^u$, эллиптическое уравнение Лиувилля	$u \to -\infty$
3. $u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$, модифицированное уравнение Кортевега—де Фриза	$u_x = 0$	7. $u_{xt} = \operatorname{sh} u$, гиперболическое уравнение sh-Гордона	$u_x = 0$
4. $u_t + uu_x + u_{xx} = 0$, уравнение Бюргерса	$u_x = 0$	8. $\Delta u = \operatorname{sh} u$, эллиптическое уравнение sh-Гордона	$u = 0$

Автор глубоко благодарен профессору Э. Г. Позняку за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Sasaki R.//Nucl. Phys. 1979. **B 154**. P. 343. [2] Chern S. S., Tenenblat K. Pseudospherical surfaces and evolution equations//Studies in Appl. Math. 1986. **74**. P. 55. [3] Позняк Э. Г., Шикин Е. В. Дифференциальная геометрия. М., 1990. [4] Позняк Э. Г.//Дифф. уравнения. 1979. **15**, № 7. С. 1332. [5] Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. М., 1983. [6] Попов А. Г.//ДАН СССР. 1990. **312**. № 5. С. 1109. [7] Позняк Э. Г., Попов А. Г.//Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1991. **23**. С. 99. [8] Lamb G. L., jr.//Rev. Mod. Phys. 1971. **43**, N 2. P. 99. [9] McCall S. L., Hahn E. L.//Phys. Rev. 1969. **183**, N 2. P. 457. [10] Конторова Т. А., Френкель Я. И.//ЖЭТФ. 1938. **8**, № 1. С. 89. [11] Perring J. K., Skyrme T. H. R.//Nucl. Phys. 1962. **31**. P. 550. [12] Enz U.//Phys. Rev. 1963. **131**, N 3. P. 1392. [13] Enz U.//Helv. Phys. Acta. 1964. **37**, N 3. P. 245. [14] Бароне А., Патерно Дж. Эффект Джозефсона. М., 1984.

Поступила в редакцию
05.11.92