УДК 538.574

ОБЛАСТЬ ПРИМЕНИМОСТИ ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКОГО ПОДХОДА В РЕФРАГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В. Д. Гусев, С. М. Голынский, У Сяо Пин *)

(кафедра физики атмосферы)

На основе критерия непересекаемости лучей найдено новое условие, определяющее границы применимости приближения геометрической оптики при наклонном падении излучения на рефрагирующий рассеивающий слой. Показано, что область справедливости геометрооптического подхода существенно зависит от «интенсивности» флуктуаций диэлектрической проницаемости среды. Полученное условие значительно расширяет возможности использования лучевой трактовки волнового поля в рассматриваемой среде по сравнению со стандартным определением области геометрической оптики.

Метод геометрической оптики (ГО) занимает исключительное положение в задачах распространения и рассеяния волн в неоднородных средах. Это приближение отличается простотой, наглядностью и до настоящего времени во многих случаях является единственно возможным методом аналитического решения задачи. При этом оказывается, что результаты применения ГО в случайно-неоднородной среде могут быть справедливыми и совпадать с экспериментальными данными даже в тех случаях, когда нарушаются границы применимости метода, определённые из решения лучевых уравнений [1]. Поэтому в работе [2] для нахождения области справедливости ГО в нерефрагирующей случайно-неоднородной среде был предложен новый критерий — критерий непересекаемости лучей, на основании которого были получены новые условия применимости ГО.

В настоящей работе проводится обобщение результатов [2] на случай распространения излучения в плоскослоистой рассеивающей среде типа ионосферы, диэлектрическая проницаемость которой имеет вид

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_0(z) + \alpha\varepsilon_1(\mathbf{r}). \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon_0(z)$ — детерминированная компонента, для которой в дальнейших расчетах используем модель линейной аппроксимации

$$\varepsilon_0(z) = 1 - z/z_m, \tag{2}$$

где z_m — полутолщина линейного слоя; α — малый безразмерный параметр, характеризующий величину флуктуаций $\left(\alpha \sim \sigma_\varepsilon = \sqrt{\langle\varepsilon_1^2\rangle} \ll \varepsilon_0\right)$; $\varepsilon_1(\mathbf{r})$ — однородное случайное поле, описываемое нулевым средним значением и гауссовой корреляционной функцией

$$B(\xi, \eta, \zeta) = \langle\varepsilon_1(\mathbf{r}_1)\,\varepsilon_1(\mathbf{r}_2)\rangle = \sigma_\varepsilon^2 \exp\{-[\xi^2+\eta^2+\zeta^2]/2a^2\}, \tag{3}$$

σ_ε^2 — дисперсия флуктуаций диэлектрической проницаемости; $\xi = x_1 - x_2$, $\eta = y_1 - y_2$, $\zeta = z_1 - z_2$; a — характерный масштаб рассеивающих неоднородностей среды; угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций.

Для получения условия применимости метода ГО в рассматриваемом случае как следствия критерия непересекаемости лучей воспользуемся лучевыми уравнениями ГО в следующей формуле [3]:

*) Китай.

$$d\mathbf{r}/d\sigma = \mathbf{p}/n, \quad d\mathbf{p}/d\sigma = \nabla n, \tag{4}$$

где $\mathbf{p}=\nabla\Phi_0=n\mathbf{s}$ — волновой импульс; Φ_0 — эйконал, который определяет волновой фронт $\psi=k\Phi_0=\text{const}$, соответствующий поверхности постоянных значений фазы ψ; k — волновое число; $n=\sqrt{\varepsilon}$ — показатель преломления среды; $\mathbf{s}$ — единичный вектор луча, который в рассматриваемом случае изотропной среды совпадает с нормалью к фронту волны; $d\sigma$ — элемент длины пути, отсчитываемого вдоль траектории луча.

Вначале рассмотрим наклонное падение на линейный слой плоской волны из полупространства $z\leqslant 0$, где $\varepsilon\equiv 1$. Исходя из лучевых представлений и учитывая изомерию рассеивающих неоднородностей (3), полагаем, что траектория луча, падающего на среду, лежит в плоскости XOZ, при этом луч выходит из точки $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ под углом θ_0 к оси z, т. е. $s_{0y}=0$. Лучевые уравнения (4) могут быть представлены в интегральном виде:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\int_0^{\sigma}\mathbf{s}\,d\sigma=\mathbf{r}_0+\int_0^{\tilde{\sigma}}\mathbf{p}\,d\tilde{\sigma}, \tag{5}$$

$$\mathbf{p}=\mathbf{s}_0+\frac{1}{2}\int_0^{\tilde{\sigma}}\nabla(\varepsilon_0+\alpha\varepsilon_1)\,d\tilde{\sigma}, \tag{6}$$

где $d\tilde{\sigma}=d\sigma/n$ — элемент длины группового пути вдоль лучевой траектории. Подставляя (6) в (5) и проводя интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} x&=x_0+\tilde{\sigma}s_{0x}+\frac{1}{2}\alpha\int_0^{\tilde{\sigma}}(\tilde{\sigma}-\tilde{\sigma}')\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x}\,d\tilde{\sigma}',\\ y&=y_0+\frac{1}{2}\alpha\int_0^{\tilde{\sigma}}(\tilde{\sigma}-\tilde{\sigma}')\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial y}\,d\tilde{\sigma}',\\ z&=z_0+\tilde{\sigma}s_{0z}-\frac{\tilde{\sigma}^2}{4z_m}+\frac{1}{2}\alpha\int_0^{\tilde{\sigma}}(\tilde{\sigma}-\tilde{\sigma}')\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z}\,d\tilde{\sigma}'. \end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом, координаты луча в точке наблюдения $\mathbf{r}$ являются функциями координат начальной точки $\mathbf{r}_0$, т. е.

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(x_0,\ y_0,\ z_0). \tag{8}$$

Критерий непересекаемости лучей означает, что в точку наблюдения приходит только один луч. С математической точки зрения это соответствует однозначности решения системы уравнений (7) или, что то же самое, однозначности преобразования (8), для чего требуется отличие от нуля якобиана $\mathscr{D}(z)$ этого преобразования:

$$\mathscr{D}(z)=\frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(x_0,\ y_0,\ z_0)}\neq 0. \tag{9}$$

Следовательно, условие (9) совместно с условием медленности изменения свойств среды на длине волны распространяющегося излу-

чения λ ($ka \gg 1$) обеспечивают справедливость приближения ГО в исследуемой задаче.

Для вычисления $\mathscr{D}(z)$ (9) необходимо продифференцировать (8) по начальным координатам, что равносильно внесению производных под знак интеграла. Выполняя дифференцирование и пренебрегая в рассматриваемом приближении членами порядка α^2 и выше, в результате получим

$$\mathscr{D}(z) = 1 + Q > 0, \tag{10}$$

где

$$Q = \frac{1}{2}\alpha \int_0^{\tilde{\sigma}} (\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}')\, \Delta\varepsilon_1\, d\tilde{\sigma}'.$$

Здесь учтено, что в начальной точке $\mathbf{r}_0$ определитель (9) равен единице, а в дальнейшем отличен от нуля. Величина Q является случайной и зависит от распределения вторых производных случайного поля, а также от длины группового пути. Следовательно, неравенство (10) должно выполняться в вероятностном смысле. Если случайное поле $\varepsilon_1(\mathbf{r})$ является нормальным, то Q также имеет нормальный закон. При учете этого вероятность P выполнения неравенства $Q > -1 + \delta$, где δ — произвольная бесконечно малая положительная величина, определяется соотношением [4]

$$P(Q > -1 + \delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_q} \int_{-1+\delta}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\beta^2}{2\sigma_q^2}\right\} d\beta,$$

которое эквивалентно уравнению для дисперсии σ_q^2

$$\Phi\left(\frac{1-\delta}{\sqrt{2}\,\sigma_q}\right) = 2P - 1. \tag{11}$$

Здесь $\Phi(u)$ — интеграл вероятностей [5].

Проведем оценку неравенства (10) на выходе из линейного слоя, вычисляя групповой путь L_g вдоль траектории, описываемой законом Снеллиуса. В соответствии с определением случайной величины Q (10) ее дисперсия на выходе из слоя определяется выражением

$$\sigma_q^2 = \langle Q^2 \rangle = \frac{1}{4} \iint_0^{L_g} (L_g - \tilde{\sigma}_1)(L_g - \tilde{\sigma}_2) \langle \Delta_1\varepsilon_1 \Delta_2\varepsilon_1 \rangle\, d\tilde{\sigma}_1\, d\tilde{\sigma}_2 \approx$$

$$\approx \frac{1}{4s_{0x}^2} \iint_0^{L} (L - x_1)(L - x_2)\, \Delta_1\Delta_2 B(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)\, dx_1\, dx_2, \tag{12}$$

где учтено, что $dx = s_{0x} d\tilde{\sigma}$, $L_g = 4z_m c_0$, а $L = 4z_m s_0 c_0$ — горизонтальное смещение точки выхода луча по отношению к начальной точке ($s_0 = s_{0x} = \sin\theta_0$, $c_0 = s_{0z} = \cos\theta_0$).

Подставляя в (12) корреляционную функцию (3), переходя к разностным координатам ($\xi = x_1 - x_2$, $x_c = (x_1 + x_2)/2$) и учитывая уравнение траектории луча в линейном слое

$$z = x \operatorname{ctg}\theta_0 - x^2/(4z_m s_0^2),$$

после интегрирования получим

$$\sigma_q^2 = 2p/D_g^2\sigma_\psi^2,$$

т. е.

$$\sigma_q = \sqrt{2p}\, D_g\sigma_\psi, \tag{13}$$

где для дисперсии флуктуации фазы волны σ_ψ^2 и для постоянной p, зависящей от начального угла падения θ_0, справедливы выражения

$$\sigma_\psi^2 = 2\sqrt{\pi/2}\, k^2 a z_m \sigma_\varepsilon^2 \ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta_0}{2}\right), \quad p = 1 - \operatorname{tg}^2\frac{\theta_0}{2} + \left[2c_0 \ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta_0}{2}\right)\right]^{-1},$$

а $D_g = L_g/(ka^2)$ играет роль волнового параметра. При интегрировании (12) учитывалось, что на длине пути укладывается большое число неоднородностей, т. е. $L = 2z_m \sin 2\theta_0 \gg a$, и, следовательно, возможно расширить пределы интегрирования по переменной ξ от $-\infty$ до $+\infty$. В то же время это условие приводит к ограничениям на углы падения волны на слой:

$$\sin 2\theta_0 \gg a/2z_m, \tag{14}$$

при которых справедлив основной результат работы.

Подставляя выражение (13) в уравнение (11) и пренебрегая бесконечно малой величиной δ, приходим к условию однозначности преобразования (8), обеспечивающему выполнение неравенств (9) и (10):

$$bD_g\sigma_\psi \leqslant 1. \tag{15}$$

Здесь $b = 2p^{1/2}\Phi^{-1}(2P-1)$ — числовой коэффициент, зависящий от задания вероятности выполнения исследуемого неравенства, начального угла падения на рефрагирующий слой, выбора модели неоднородной среды и распределения ее неоднородностей; $\Phi^{-1}(U)$ — функция, обратная интегралу вероятности, т. е. если $\Phi(u) = U$, то $\Phi^{-1}(U) = u$. Например, для рассматриваемой в работе модели случайно-неоднородной среды приходим к следующим условиям:

	$\theta_0 = 10°$:	$\theta_0 = 70°$:
$P_1 = 0{,}900$,	$b_1 \approx 1{,}99$, $(D_g\sigma_\psi)_1 \leqslant 0{,}50$;	$b_1 \approx 2{,}13$, $(D_g\sigma_\psi)_1 \leqslant 0{,}47$;
$P_2 = 0{,}950$,	$b_2 \approx 2{,}53$, $(D_g\sigma_\psi)_2 \leqslant 0{,}40$;	$b_2 \approx 2{,}72$, $(D_g\sigma_\psi)_2 \leqslant 0{,}37$;
$P_3 = 0{,}997$,	$b_3 \approx 4{,}24$, $(D_g\sigma_\psi)_3 \leqslant 0{,}24$;	$b_3 \approx 4{,}55$, $(D_g\sigma_\psi)_3 \leqslant 0{,}22$.

Условие (15) определяет единственность решения задачи Коши построения волновых фронтов в рефрагирующей среде с изомерными неоднородностями и является математическим выражением критерия непересекаемости лучей. Это условие при учете выполнения (14) значительно расширяет возможности использования лучевой трактовки волнового поля при наклонном падении волны на плоскослоистую рассеивающую среду по сравнению со стандартным определением области геометрической оптики.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. М., 1978. [2] Гусев В. Д., Петухова Е. В., Приходько Л. И.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1989. 30, № 1. С. 16. [3] Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неодно-

родных сред. М., 1980. [4] Романовский В. И. Математическая статистика. М., 1938. [5] Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. М. Стиган. М., 1979.

Поступила в редакцию
03.02.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1993. Т. 34, № 6

УДК 533.951

ВОЗБУЖДЕНИЕ И ДИНАМИКА СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ МОД ТРАЙВЕЛПИСА — ГОУЛДА

И. М. Алешин, Л. С. Кузьменков, О. О. Трубачев

(кафедра теоретической физики)

Найдены условия возбуждения сильно нелинейных волн в замагниченной плазме в цилиндрическом волноводе ионным сгустком. Показано, что возможно возбуждение как периодических, так и уединенных волн, форма которых сильно зависит от температуры плазмы.

Введение

Собственные электронные колебания в замагниченном плазменном волноводе изучались в [1]. В работах [2, 3] экспериментально и численно исследовалась нелинейная динамика этих мод. В эксперименте, описанном в [2], наблюдались как периодические, так и уединенные волны (последние — двух типов), которые возбуждались соответственно синусоидальным сигналом и коротким импульсом напряжения. В предлагаемой работе рассматривается возбуждение плазменных волн ионным сгустком.

В плазменном волноводе становится существенной зависимость всех величин от радиальной координаты, что значительно усложняет теоретическое описание явлений. Обычно [2—4] полагают пространственно-временную зависимость всех величин в виде произведения

$$A(r, z, t) = \tilde{A}(z, t)\, a(r). \tag{1}$$

Это позволяет свести задачу к одномерной, проинтегрировав исходные уравнения по r. Физически это соответствует предположению, что нелинейные радиальные колебания слабо связаны с колебаниями плазмы вдоль оси волновода и не возбуждаются ими. При этом можно показать, что такая процедура эквивалентна замене реального радиального распределения возмущения электрического потенциала и плотности плазмы равномерным средним распределением. Возможность использования такого приближения подтверждается результатами эксперимента [2]. Явное выражение для функции $a(r)$ из (1) выбирается исходя из линейной задачи в виде

$$a(r) = J_0(\lambda r/R),$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка, а λ — наименьший корень уравнения $J_0(x)=0$.

Система уравнений и ее решение

Рассмотрим стационарные движения электронов плазмы в сильнозамагниченном металлическом цилиндре радиуса R, возбуждаемые