

УДК 533.951

ВОЗБУЖДЕНИЕ И ДИНАМИКА СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ МОД ТРАЙВЕЛПИСА — ГОУЛДА

И. М. Алешин, Л. С. Кузьменков, О. О. Трубачев

(кафедра теоретической физики)

Найдены условия возбуждения сильно нелинейных волн в замагниченной плазме в цилиндрическом волноводе ионным сгустком. Показано, что возможно возбуждение как периодических, так и уединенных волн, форма которых сильно зависит от температуры плазмы.

Введение

Собственные электронные колебания в замагниченном плазменном волноводе изучались в [1]. В работах [2, 3] экспериментально и численно исследовалась нелинейная динамика этих мод. В эксперименте, описанном в [2], наблюдались как периодические, так и уединенные волны (последние — двух типов), которые возбуждались соответственно синусоидальным сигналом и коротким импульсом напряжения. В предлагаемой работе рассматривается возбуждение плазменных волн ионным сгустком.

В плазменном волноводе становится существенной зависимость всех величин от радиальной координаты, что значительно усложняет теоретическое описание явлений. Обычно [2—4] полагают пространственно-временную зависимость всех величин в виде произведения

$$A(r, z, t) = \tilde{A}(z, t) a(r). \quad (1)$$

Это позволяет свести задачу к одномерной, проинтегрировав исходные уравнения по r . Физически это соответствует предположению, что нелинейные радиальные колебания слабо связаны с колебаниями плазмы вдоль оси волновода и не возбуждаются ими. При этом можно показать, что такая процедура эквивалентна замене реального радиального распределения возмущения электрического потенциала и плотности плазмы равномерным средним распределением. Возможность использования такого приближения подтверждается результатами эксперимента [2]. Явное выражение для функции $a(r)$ из (1) выбирается исходя из линейной задачи в виде

$$a(r) = J_0(\lambda r/R),$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка, а λ — наименьший корень уравнения $J_0(x) = 0$.

Система уравнений и ее решение

Рассмотрим стационарные движения электронов плазмы в сильно-замагниченном металлическом цилиндре радиуса R , возбуждаемые

ионным сгустком, движущимся с постоянной скоростью v_0 . Обратное влияние фоновой плазмы на динамику сгустка не учитывается. Для достаточно плотной плазмы справедливо бесстолкновительное приближение. Поэтому при скоростях сгустка, много меньших скорости света, создаваемые им возмущения можно считать потенциальными и использовать для расчета отклика плазмы систему уравнений Власова—Пуассона. Пренебрегая переходными процессами, для стационарных возмущений эту систему уравнений можно записать в виде

$$(1 - v_z/v_0) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta f + \frac{e}{mv} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial v_z} \delta f = 0, \\ \Delta \Phi = 4\pi e \left(n_0 + n_b - \int \delta f dv_z \right), \\ \Phi(R) = 0. \quad (2)$$

Здесь $\theta = \omega_p(t - z/v_0)$, n_0 — плотность ионного фона, $f = f_0 + \delta f(r, \tau, v)$ — функция распределения электронов (f_0 — ее равновесное значение), $\Phi = \Phi(r, \tau)$ — электрический потенциал. Предполагается, что плотность ионного сгустка $n_b(r, \tau)$ можно представить в виде $n_b(r, \tau) = ZN(r)n_b(\tau)$, $Z = \pm 1$ — знак заряда ионов в сгустке, $N(r)$ — его радиальное распределение.

Представим, далее, δf и Φ в виде (1)

$$\delta f(r, \Phi, v_z) = g(\Phi, v_z) J_0(\lambda r/R), \\ \Phi(r, \tau) = \Phi(\tau) J_0(\lambda r/R).$$

Умножая после этого первое уравнение системы (2) на r и интегрируя по r от нуля до R , получим

$$(1 - u) \frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial f_0}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial u} = 0. \quad (3)$$

Здесь введены безразмерные величины

$$\theta = \omega_p \tau, \quad u = v_z/v_0, \quad \psi(\theta) = 2\Phi(\theta)/\mu m v_0^2, \quad \alpha = m v_0^2/2T,$$

ω_p — плазменная частота электронов и

$$\mu = \int_0^1 x J_0^2(\lambda x) dx / \int_0^1 x J_0(\lambda x) dx.$$

Решение уравнения (3) имеет вид

$$g = \mu (F(\sigma) - f_0),$$

где $F(\sigma)$ — произвольная непрерывная функция первого интеграла $\sigma = u - (u^2 + \psi)/2$ характеристики уравнения (3). Явный вид функции $F(\sigma)$ можно получить из условия обращения в нуль функции $g(u, \psi)$ при $\psi \rightarrow 0$, перед пучком, где равновесное распределение электронов $f_0(v^2)$ является максвелловским. Таким образом,

$$F(u, \psi) = \frac{u_0}{v_0} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp \{ -\alpha (1 - \sqrt{(1 - u)^2 + \psi})^2 \}. \quad (4)$$

Подставим найденное решение в уравнение Пуассона и, учитывая, что

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} J_0(kr) = -k^2 J_0(kr),$$

для безразмерного потенциала ψ после интегрирования по r получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2} = 2 \left[\frac{1}{\rho^3} \psi + 1 + \eta(\theta) - \frac{v_0}{n_0} \int du F(u, \psi) \right] \equiv G(\psi) + 2\eta(\theta), \quad (5)$$

где

$$\rho = \sqrt{2} \omega_p R / \lambda v_0, \quad \eta(\theta) = \frac{\tilde{n}}{n_0} \int_0^1 x J_0(\lambda x) N(x) dx / \int_0^1 x J_0^2(\lambda x) dx.$$

Это уравнение по форме совпадает с уравнением для нелинейного осциллятора единичной массы, в котором функции $G(\psi)$ и $2\eta(\theta)$ играют роль возвращающей и заданной вынуждающей силы соответственно.

Будем искать ограниченные решения уравнения (5). Неограниченные решения соответствуют бесконечному нарастанию плотности энергии электрического поля.

В пределе низкой температуры электронов ($\alpha \gg 1$) интеграл в (5) можно оценить с помощью метода перевала. Точка $u_0 = 1 - (1 - \psi)^{1/2}$ является нулем второго порядка подэкспоненциальной функции в (4), если $\psi < 1$, и нулем четвертого порядка, если $\psi \approx 1$. Исходя из этого для функции $G(\psi)$, определенной в (5), получаем

$$G(\psi) = 2 \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \psi \right) - 2 \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-\psi}} + \frac{3\psi}{4\alpha(1-\psi)^{5/2}}, & \psi < \psi_c, \\ \frac{\alpha^{3/4}}{2\sqrt{2\pi}} \left[\Gamma(3/4)(1-\psi) + \Gamma(1/4) \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right], & \psi > \psi_c. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция, а координата точки пересечения асимптотик ψ_0 приближенно равна $\psi_c \approx 1 - 1.5/\alpha^{1/2}$.

Из (6) видно, что при малых амплитудах электрического потенциала ($\psi \ll 1$) эффекты, связанные с тепловым движением электронов, носят поправочный характер. В этом случае можно ограничиться приближением холодной гидродинамики. Однако при больших амплитудах потенциала ($\psi \approx 1$) влияние теплового движения электронов становится существенным. В самом деле, при нулевой температуре электронов функция $G(\psi)$ обращается в бесконечность, если $\psi = 1$, а это соответствует бесконечной электронной плотности. При конечных температурах электронов из (6) следует, что плотность электронов в отличие от приближения холодной гидродинамики конечна и ограничена значением $n = n_0 \alpha^{1/4}$, которое достигается при $\psi = \psi_0$.

Аналитическое решение уравнения (6) возможно, если, например, $\eta(\theta)$ — кусочно-постоянная функция [5]. Аппроксимируем поэтому плотность ионного сгустка в направлении оси z «ступенчатой» функцией, равной $Z\eta_0$, если $-\theta_0 < \theta < 0$, и нулю при других значениях θ (η_0, θ_0 — положительные константы, определяющие плотность и длительность импульса соответственно). Тогда область изменения θ распадается на три области: до, внутри и после сгустка. Значения всех величин в этих областях будем нумеровать индексами 1, 2, 3 соответственно. На границе этих областей должны удовлетворяться условия непрерывности потенциала и его производной:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0), \quad \psi_2(-\theta_0) = \psi_3(-\theta_0),$$

$$\frac{d\psi_1(0)}{d\theta} = \frac{d\psi_2(0)}{d\theta}, \quad \frac{d\psi_2(-\theta_0)}{d\theta} = \frac{d\psi_3(-\theta_0)}{d\theta}. \quad (7)$$

Умножим уравнение (5) на $d\psi/d\theta$ и проинтегрируем по θ . В результате для каждой области значений переменной θ получаем первые интегралы:

$$I_i = \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{d\theta} \right)^2 + U_i(\psi) = \text{const}, \quad (8)$$

$$U_i = -2 \left[(1 + Z\eta_0\delta_{i2})\psi + \frac{1}{2\rho^2}\psi^2 \right] -$$

$$-2 \begin{cases} 2\sqrt{1-\psi} + \frac{1}{2\alpha} \frac{3\psi-2}{(1-\psi)^{3/2}}, & \psi < \psi_c, \\ \psi \frac{\alpha^{3/4}}{2\sqrt{2\pi}} \left[(1-\psi/2)\Gamma(3/4) + \Gamma(1/2)/\sqrt{\alpha} \right] + C(\alpha), & \psi > \psi_c. \end{cases}$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, а постоянная $C(\alpha)$ в (8) определяется из условия непрерывности функции $U_i(\psi)$ при $\psi = \psi_c$.

Собственные нелинейные волны

Рассмотрим решение уравнения (5) в отсутствие сгустка ($\eta_0 = 0$). Тогда интеграл I_3 из (8) сохраняется при любом θ и определяется начальными условиями.

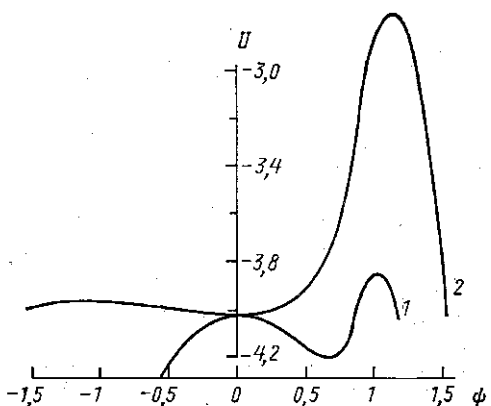


Рис. 1. Функция $U(\psi)$ из (8) для $\rho < \rho^*$ (1) и $\rho > \rho^*$ (2) при $\alpha = 100$

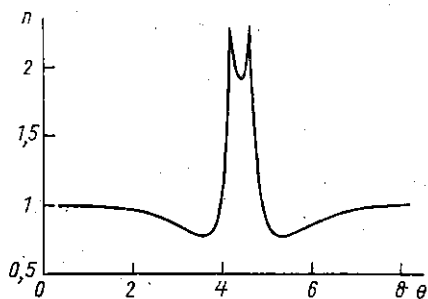


Рис. 2. Электронная плотность $n = n(\theta)$ ($\rho < \rho^*$)

Из вида «потенциальной энергии» $U_3(\psi)$ видно, что в зависимости от значений параметра ρ возможны два физически различных типа отклика плазмы. При $\rho < \rho^* \approx 2^{1/2}(1 + 3/4\alpha)$ функция $U_3(\psi)$ имеет локальные максимумы в нуле и в точке

$$\psi_1 = 1 + \alpha^{-1/4} \Gamma(1/4)/\Gamma(3/4) \quad (9a)$$

и локальный минимум в точке

$$\psi_2 = -\frac{1}{2}(1-2\rho^2 + \sqrt{1+4\rho^2}) + O(1/\alpha) > 0 \quad (96)$$

(кривая 1 на рис. 1). Этот случай описывает распространение в волноводе уединенной стационарной волны, в математическом отношении аналогичной ионно-звуковому солитону [6] («быстрые волны»). Ограниченные решения уравнений (5) возможны, если $U_3(\psi_1) > U_3(0)$, что эквивалентно неравенству $\rho^2 < 1/2 + O(\alpha^{1/4})$, которое связано с условием так называемого «опрокидывания волны». Максимальная амплитуда электрического поля солитона определяется равенством

$$\frac{ev_0 E_{\max}}{\mu m \omega \rho} = \frac{1}{2} \sqrt{|U(\psi_1) - U(0)|}. \quad (10)$$

Тепловое движение частиц плазмы может существенно изменить форму уединенной волны. При выполнении неравенства $U_3(\psi_c) < U_3(0) < U_3(\psi_1)$ электростатическое отталкивание «горячих» электронов приводит к расщеплению максимума их концентрации (рис. 2).

Если $\rho > \rho^*$ («медленные волны»), уравнение (5) описывает распространение вдоль оси волновода периодических волн, которым в пределе малых амплитуд соответствует основная мода Трайвеллеса—Гоулда, а в случае бесконечного радиуса волновода — нелинейные ленгмюровские колебания. Функция $U_3(\psi)$ имеет теперь в нуле локальный минимум, а локальные максимумы достигаются в точках ψ_1 и ψ_2 , определяемых равенствами (9) ($\psi_2 > 0$) (кривая 2 на рис. 1). Большой амплитуде электрического потенциала ψ_0 соответствует большая длина волны, которая обращается в бесконечность, если ψ_0 совпадает с ψ_m . При этом периодическая волна вырождается в аperiodическое солитоноподобное возмущение. Значение ψ_m равно ψ_1 или ψ_2 ; выбор между ними определяется условием $U_3(\psi_m) = \min\{U_3(\psi_1), U_3(\psi_2)\}$, из которого следует, что

$$\psi_m = \begin{cases} \psi_1, & \rho < \rho_1 \approx 7,25, \\ \psi_2, & \rho > \rho_1. \end{cases}$$

Амплитуда электрического поля стационарной волны также ограничена значением, определяемым формулой (10) с заменой ψ_1 на ψ_m . Если $\rho > \rho_1$, это ограничение связано с накоплением электронов в областях максимального потенциала волны, которое имеет место и в неограниченной плазме [7, 8]. При этом, как и в случае «быстрых» волн, происходит разделение максимумов плотности электронов, если $\psi_c < \psi_0 < \psi_m$. Для физических условий, соответствующих $\rho < \rho_1$, ограничение амплитуды электрического поля определяется влиянием поверхности, ограничивающей плазму.

В работе [2] для объяснения экспериментов использовалось приближение слабой нелинейности. Разложения полученных нами выражений по φ до квадратичных членов в пределе нулевой температуры плазмы совпадают с соответствующими формулами в [2].

Возбуждение

Сгусток, распространяющийся через волновод, определяет фазовую скорость и амплитуду возникающих возмущений плазмы. При этом из уравнений (7)—(8) и рис. 3,а следует, что возбуждение «быстрых»

волн ($v_0 > \lambda R \omega_p$) возможно лишь при специально подобранной длительности сгустка положительных ионов ($Z=0$):

$$\theta_0^* = 2k \sqrt{2} \int_0^{\chi} \frac{d\psi}{\sqrt{I_2 - U_2(\psi)}},$$

χ — ненулевой корень уравнения $I_2(\psi) - U_2(\psi) = 0$. При других значениях θ_0 ограниченных решений уравнений (5) не существует.

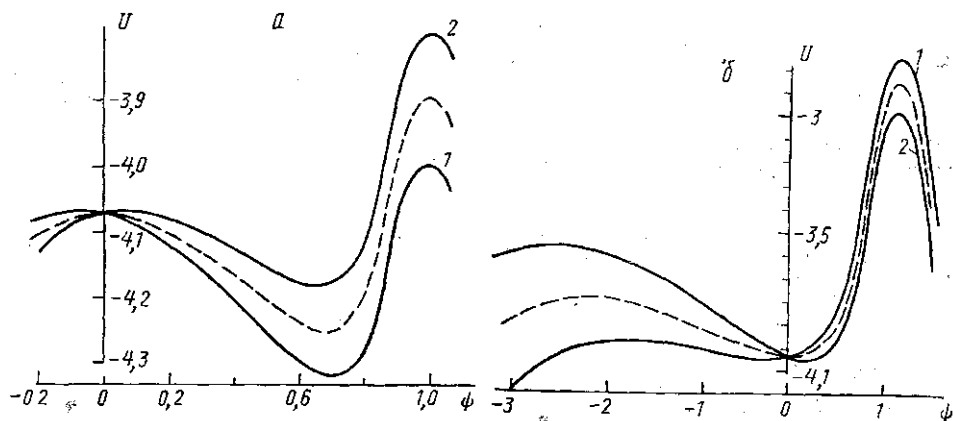
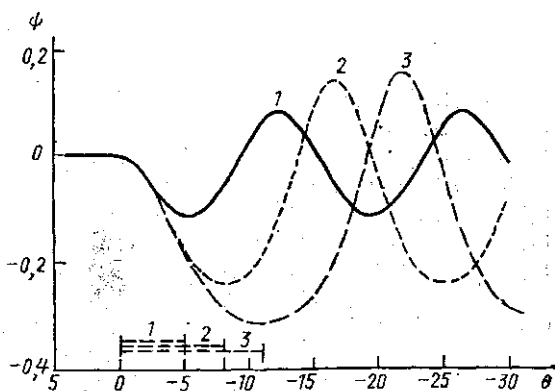


Рис. 3. Функция $U(\psi)$ при $\eta_0=0,05$, $\rho < \rho^*$ (а) и $\rho > \rho^*$ (б) вне сгустка (пунктир) и внутри него: $Z=1$ (1) и -1 (2)

«Медленные» сгустки ($v_0 < \lambda R \omega_p$) возбуждают периодические квазипродольные волны, проанализированные выше при любом знаке зарядов ионов пучка. Ситуация здесь аналогична возбуждению кильватерных волн сгустками частиц в изотропной плазме [9]. Максимальная амплитуда электрического поля определяется выражением

$$\frac{eE_0 v_0}{\mu \omega_p} = \sqrt{2\eta_0 |\chi|}$$

Рис. 4. Решение уравнения (5) при $\rho > \rho^*$, $\eta_0 = -0,05$ для $\theta_0 = 5$ (1), 8 (2) и 11 (3)



и, как видно из (8) и рис. 3, б, эффективность возбуждения волн при отрицательно заряженном сгустке более высокая. На рис. 4 представлено численное решение уравнения (5) для трех значений θ_0 ($Z=-1$).

Программа выполнена в рамках программы «Университеты России».

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Trivelpiece A. W., Gould R. W.//J. Appl. Phys. 1959. 11. P. 1784.
[2] Lypov J. P., Niechelsen P., Pecsely M. L. et al.//Physica Scripta. 1972. 20. P. 328. [3] Shah N. A., Turikov V. A.//J. Plasma Phys. 1986. 31. P. 437.
[4] Sayal V. K., Sharma S. R.//Physica Scripta. 1990. 42. P. 475. [5] Кузьменков Л. С., Трубацев О. О.//Тез. докл. VI Всесоюз. конф. «Взаимодействие электромагнитных излучений с плазмой». Душанбе, 1991. С. 84. [6] Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З.//Ядерный синтез. 1961. 1. С. 196. [7] Аleshin И. М.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1992. 33, № 4. С. 84. [8] Katsouleas T., Mori W. B.//Phys. Rev. Lett. 1988. 61. P. 90. [9] Рухадзе А. А. и др.//Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М., 1979.

Поступила в редакцию
17.03.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА, СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1993. Т. 34, № 6

ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

УДК 621.378.325

ТВЕРДОТЕЛЬНЫЙ КОЛЬЦЕВОЙ ЛАЗЕР С ВНУТРИРЕЗОНАТОРНОЙ ГЕНЕРАЦИЕЙ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В РЕЖИМЕ СИНХРОНИЗАЦИИ МОД

М. Р. Палеев

(кафедра оптики и спектроскопии)

Внутрирезонаторная генерация второй гармоники позволяет существенно улучшить амплитудно-частотные характеристики твердотельного кольцевого лазера, работающего в режиме активной синхронизации мод: устраняется конкурентное подавление встречных волн, расширяется область существования режима биений и устраняются аномалии в частотной характеристике, характерные для режима свободной генерации. Проанализировано влияние частоты модуляции потерь на ширину области захвата и частоту биений.

Введение

Интерес к режимам биений и автомодуляции в твердотельных кольцевых лазерах (ТКЛ) обусловлен возможностью их использования для измерения оптических невязимостей. Однако в силу однородного уширения линии люминесценции в ТКЛ имеет место сильное конкурентное взаимодействие встречных волн в активной среде, что приводит к срыву режимов биений и автомодуляции из-за подавления одной из волн с ростом оптической невязимости резонатора.

Взаимодействие встречных волн в активной среде может быть ослаблено при их пространственно-временной развязке в режиме синхронизации мод, когда распространяющиеся в противоположных направлениях ультракороткие импульсы (УКИ) не встречаются в активной среде и, следовательно, не интерферируют в ней. Достижимое в этом случае пространственно-однородное выжигание инверсии населенностей позволяет избежать аномалий в частотной характеристике ТКЛ, характерных для режима свободной генерации. Кроме того, благодаря пространственно-временной развязке встречных УКИ ослабляется их связь через рассеяние и, следовательно, уменьшается ширина области захвата.