УДК 534.222.2

АКУСТИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ НЕОДНОРОДНОГО ПОТОКА ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

А. А. Заикин, О. В. Руденко

(кафедра акустики)

Оценивается эффективность создания нелинейности локализованной геометрической неоднородностью. Рассматривается пример создания неоднородности слоем частиц. В расчете использованы уравнение Бернулли для ближнего поля и уравнение типа Лайтхилла в волновой зоне. Для оценок вводится эквивалентный параметр нелинейности.

Проблема повышения эффективности волновых взаимодействий требует как поиска и создания новых нелинейных материалов, так и более полного использования возможностей обычных нелинейных механизмов. В последнее время интенсивно исследуются структурно неоднородные среды (жидкости с пузырьками газа, пористые и дефектные твердые образцы), нелинейный параметр ε которых достигает значений 10^2—10^4. В то же время совокупный вклад физической и геометрической нелинейностей (связанных соответственно с нелинейной зависимостью сил межмолекулярного взаимодействия от деформации и наличием нелинейных членов в уравнениях механики сплошных сред) обычно не превосходит 10^1.

Вместе с тем роль геометрической нелинейности может быть существенно усилена. Рассмотрим, к примеру, конвективный нелинейный член в уравнении движения, вклад которого характеризуется числом

$$M = |(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u}|/|\partial\mathbf{u}/\partial t| \sim u_0 T/L. \qquad (1)$$

Здесь u_0 — характерная скорость потока, T и L — его временной и пространственный масштабы. Для звуковой волны T — период, $L=c_0T=\lambda$ — длина волны (c_0 — скорость звука), поэтому $M=u_0/c_0$ есть акустическое число Маха, не превосходящее 10^{-4}—10^{-2} даже в очень сильных полях.

Если же в низкочастотное поле поместить препятствие размером $R\ll\lambda$, масштаб потока вблизи препятствия будет $L\sim R$ и число M увеличится в λ/R раз. Таким образом, помещая в осциллирующую жидкость малые препятствия, можно усилить нелинейность за счет искусственного формирования мелкомасштабных неоднородностей потока.

Известно, что максимальные градиенты создаются в акустическом пограничном слое, толщина которого $\delta=(\nu/\pi f)^{1/2}$, где ν — кинематическая вязкость, f — частота. Таким образом, локальное увеличение нелинейного параметра равно $\lambda/\delta\sim c_0(\pi/\nu f)^{1/2}$. В частности, для воздуха на частотах $f\sim 100$ Гц нелинейность усиливается в 10^4 раз.

Во многих экспериментах при облучении интенсивным звуком отверстия в экране наблюдались нелинейные эффекты — изменение импеданса при возрастании амплитуды волны [1] и генерация гармоник [2]. Учет геометрической нелинейности важен для расчета резонансных поглотителей на основе резонаторов Гельмгольца, работающих при высоких уровнях звука [3]. Излучение от осциллирующей сферы рассчитано в работе [4], однако там рассмотрена среда с обычными типами нелинейности.

Рассмотрим неоднородность потока, создаваемую твердыми не увлекаемыми потоком сферическими частицами, сконцентрированными в тонком слое толщиной $d \ll \lambda$. Считаем объемную концентрацию n_v малой, такой, чтобы возмущение потока одной частицей практически не влияло на обтекание соседних частиц. Поток создается плоской акустической волной $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0 \cos(\omega t - kz)$, которая падает на слой по нормали к нему.

Известно, что при малых волновых размерах препятствия можно пренебречь сжимаемостью. Решение задачи потенциального обтекания сферы имеет вид [5]

$$\mathbf{v}=\mathbf{u}-\frac{R^3}{2r^3}\left[\frac{3}{r^2}\mathbf{r}(\mathbf{u}\mathbf{r})-\mathbf{u}\right]. \tag{2}$$

Здесь R — радиус сферической частицы, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, направленный из центра сферы в точку наблюдения. Распределение давления определяется формулой

$$p=p_0-\frac{1}{2}\rho v^2-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{3}$$

где φ — потенциал ($\mathbf{v}=\nabla\varphi$), ρ — плотность жидкости, p_0 — давление в невозмущенном потоке.

Используя решения (2), (3) и выделяя фурье-компоненту давления на частоте 2-й гармоники, получим

$$p_{2\omega}=\frac{1}{4}\rho u_0^2\left[\frac{R^3}{r^3}(3\cos^2\theta-1)-\frac{1}{4}\frac{R^6}{r^6}(3\cos^2\theta+1)\right]. \tag{4}$$

Здесь θ — полярный угол между $\mathbf{r}$ и осью z.

Для оценок примем за характерное значение амплитуду 2-й гармоники на оси на расстоянии $d \sim nR$ от центра шарика:

$$p_{2\omega}\approx 0{,}5\rho u_0^2 n^{-3}. \tag{5}$$

Рассмотрим для сравнения другую ситуацию. Пусть на слой однородной нелинейной среды толщиной d падает звуковая волна. Согласно решению Бесселя—Фубини [6], амплитуда 2-й гармоники на выходе слоя равна

$$p_{2\omega}=\rho c_0 u_0 J_2\left(\frac{2\varepsilon}{c_0^2}\omega u_0 d\right)\Big/\left(\frac{\varepsilon}{c_0^2}\omega u_0 d\right)\approx\frac{\varepsilon}{2c_0}\rho\omega u_0^2 \tag{6}$$

Здесь ε — нелинейный параметр среды, J_2 — функция Бесселя. Сравнивая выражения (5), (6) и используя (6) как определение эквивалентного параметра нелинейности, получим для слоя частиц

$$\varepsilon=\frac{c_0}{\omega d n^3}=\frac{\lambda}{2\pi d n^3}\approx\frac{1}{2\pi}\frac{\lambda}{d}\left(\frac{R}{d}\right)^3. \tag{7}$$

Из формулы (7) следует, что, поскольку $\lambda \gg d$, при рассмотрении ближнего поля эквивалентный нелинейный параметр $\varepsilon \gg 1$. Следовательно, такая система будет эффективной для генерации колебаний 2-й гармоники (а также комбинационных частот, если на слой воздействует бигармонический сигнал).

Перейдем к анализу дальнего поля. Воспользуемся уравнением типа Лайтхилла [5]:

$$\Delta P-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=-\frac{1}{2}\frac{\rho}{c_0^2}\frac{\partial^2 \mathbf{v}^2}{\partial t^2}, \tag{8}$$

в котором учтена потенциальность течения, а правая часть отлична от нуля лишь вблизи области неоднородности и описывает источники, возбуждающие 2-ю гармонику. В уравнении (8) $P=p'+\rho\mathbf{v}^2/2$, переменная P в дальней зоне совпадает с акустическим давлением p'.

Решая (8) методом запаздывающих потенциалов, для волны 2-й гармоники, излучаемой при обтекании одного шарика, получим

$$P(\mathbf{r},\ t)=-P_{2\omega}\frac{1}{r}\cos\left(2\omega t-\frac{1}{c_0}2\omega r\right),\quad P_{2\omega}=\frac{\rho\omega^2u_0^2R^3}{6c_0^2}. \tag{9}$$

Просуммируем теперь возмущения от всех частиц, считая слой тонким настолько, что неоднородности осциллирующего потока вблизи каждого из шариков излучают в фазе. Амплитуда суммарного поля равна

$$p_{2\omega}=\left(\frac{\pi}{3}R^3n_v\right)\left(\frac{1}{2c_0}\omega u_0^2\rho d\right). \tag{10}$$

Сравнивая (10) и (6), получим оценку для нелинейного параметра:

$$\varepsilon\approx\frac{\pi}{3}R^3n_v\approx\frac{R^3}{a^3}<1, \tag{11}$$

где a — среднее расстояние между шариками. Таким образом, геометрическая нелинейность, созданная методом внесения малых неоднородностей в осциллирующий поток и создающая сильный эффект вблизи препятствия, оказалась малой в волновой зоне.

Возможность усиления нелинейных взаимодействий может быть реализована в эксперименте. Для этого удобно ввести геометрические неоднородности, создаваемые системами похожих элементов, например слоем ориентированных перпендикулярно к волне проволочек или стопкой пластинок. Первая задача решается аналогично изложенной выше, для решений второй необходимо решать уравнение Прандтля для пограничного слоя.

Укажем область применимости использованных приближений. Пренебрежение диссипативными процессами эквивалентно использованию условия большого числа Рейнольдса Re. Используя выражение $\mathrm{Re}=u\rho R/\eta$, где η — динамическая вязкость, определение уровня звукового давления $N=20\lg(p/p_0)$, где $p_0=2\cdot10^{-4}$ дин/см^2, а также связь $p=\rho c_0u$, можно получить выражение

$$\mathrm{Re}=\frac{R}{\eta c_0}p_0\cdot10^{N/20}. \tag{12}$$

Из формулы (12) следует, что условие $\mathrm{Re}>1$ достигается при уровнях звука $N>110$ дБ (для шарика с радиусом $R=0{,}1$ см) и $N>90$ дБ (для шарика с $R=1$ см). В рассматриваемой задаче касательная составляющая скорости на поверхности шарика имела конечное значение, тогда как у реальной вязкой среды при больших числах Re происходит падение скорости до нуля в тонком пристеночном слое жидкости. Таким образом, расчеты верны при условии, что толщина пограничного слоя: $\delta=(\nu/\pi f)^{1/2}\ll R$.

Для шарика радиусом $R=0{,}1$ см это условие дает $f\geqslant500$ Гц; для $R=1$ см — $f\geqslant5$ Гц.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (93-02-15453).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Melling T.//J. Sound and Vibrat. 1973. **29**. P. 1. [2] Thurston G. B., Hargrove L. E., Cook B. D.//J. Acoust. Soc. Am. 1957. **29**, N 9. P. 992. [3] Rudenko O. V., Khizhnykh K. L.//Opt. Acoust. Rev. 1990. **1**, N 2. P. 141. [4] Yano T., Inoue Y.//J. Sound and Vibrat. 1989. **135**, N 3. P. 385. [5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М., 1986. [6] Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., 1975.

Поступила в редакцию
11.03.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1993. Т. 34, № 6

ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 536.77:538.22

КЛАСТЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ГЕЙЗЕНБЕРГОВСКОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА С НЕМАГНИТНЫМИ ПРИМЕСЯМИ

А. К. Аржников, А. В. Ведяев

(кафедра магнетизма)

Для гейзенберговского ферромагнетика с немагнитными примесями в пределе низких температур простым кластерным методом типа Бете—Пайерлса получено выражение для коэффициента жесткости D спиновых волн как функции концентрации примесей. Показано, что при изменении концентрации характер зависимости изменяется от $D \simeq J_0 bSx/2$ при $x \sim 1$, до $D \simeq J_0 bS|x-x_0|^{2\tau}$ при $x \sim x_0$.

Исследования модели Гейзенберга с немагнитными примесями неоднократно проводились различными авторами (см. ссылки в работах [1, 2]). Несмотря на то что такие исследования начались достаточно давно, их актуальность до сих пор не утрачена. Это обусловлено, с одной стороны, тем, что модель достаточно часто используется для описания различных физических экспериментов, а с другой стороны, при ее относительной простоте можно получать решения надежные с точки зрения контроля их точности. Физический смысл полученных таким образом решений понятен и достаточно богат по содержанию.

В этой работе мы предлагаем простой метод решения, который приводит к нетривиальному результату, качественно согласующемуся с полученными более сложными способами ранее [1, 2].

Гамильтониан нашей системы запишем в виде

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{j,j'} I_{jj'} S_j m_j S_{j'} m_{j'} - g\mu_B h \sum_j S_j^z m_j,$$

где I_{jj} — интеграл обменного взаимодействия, h — внешнее магнитное поле, m_j — независимые случайные величины с распределением

$$P_{m_j} = x\delta(1-m) + (1-x)\delta(m).$$

При низких температурах основной вклад в термодинамический потенциал дают длинноволновые спиновые возбуждения, которые могут распространяться лишь в бесконечном связанном кластере из магнитных атомов. В связи с этим мы рассмотрим динамические свойства системы на перколяционном кластере (ПК) [3].