

соответствующие точным значениям $\beta(\theta)$ для режимов охлаждения, полученных при минимизации $K_{p_0}(\cdot)$ (а), $K_{p_1}(\cdot)$ (б) и $K_{p_2}(\cdot)$ (в). Видно, что точность нахождения $\beta(\theta)$ в некоторой точке растет вместе с ростом доли фазового превращения вблизи этой точки, а для приведенных гистограмм характерно «расплывание» в интервале $[p_1, p_2]$ с ростом s , что приводит к удовлетворительному восстановлению $\beta(\theta)$ и α . На рис. 2 представлена зависимость точности восстановления $\beta(\theta)$ от систематической погрешности задания $\theta(t)$. Здесь $\|\Delta\theta\|$ означает равномерную норму. Из рис. 2 следует, что задание $\theta(t)$ с точностью 10^{-1}°C в рамках рассматриваемой модели обеспечивает восстановление $\beta(\theta)$ с ошибкой не более 7%.

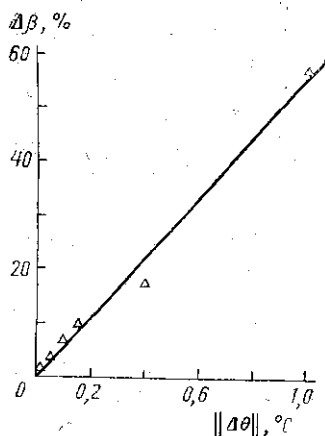


Рис. 2. Зависимость точности восстановления величины β от погрешности задания температуры θ

В заключение авторы выражают благодарность проф. А. Г. Свешникову за плодотворные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Agarwal P. K., Brimacombe J. K.//Metall. Trans. 1981. B12. P. 121.
 [2] Hawbolt E. B., Ghau B., Brimacombe J. K.//Metall. Trans. 1983. A14. P. 1803. [3] Avrami M.//J. Chem. Phys. 1939. 7. P. 1103; 1940. 8. P. 212. [4] Visintin A.//IMA J. Appl. Math. 1987. 35. P. 143. [5] Попов А. А., Попова Л. Е. Изотермические и термокинетические диаграммы распада переохлажденного аустенита. М., 1965. [6] Блантер М. Е. Фазовые превращения при термической обработке стали. М., 1962. [7] Гласко В. Б., Щепетиллов А. В.//ЖВМ и МФ. 1991. 31, № 12. С. 1826. [8] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1974. [9] Химмельблау Д. Прикладное и нелинейное программирование. М., 1975.

Поступила в редакцию
24.03.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1994. Т. 35, № 1

УДК 517.532.5

О ЯВЛЕНИИ КВАЗИФРОНТА В НЕСЖИМАЕМОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Х. Б. Аллаhverдиев, Ю. Д. Плетнер, М. А. Соловьев
(кафедра математики)

Изучаются особенности распространения нестационарных внутренних волн от точечного источника мгновенного действия в несжимаемой стратифицированной жидкости. Полученные численные результаты дают возможность изучить структуру квазифронта, распространяющегося от источника в «небуссиновской» жидкости и провести сравнения с волновой картиной в приближении Буссинеска.

1. Введение

Задачи теории нестационарных внутренних волн в стратифицированных и вращающихся жидкостях продолжают привлекать внимание исследователей, с одной стороны, в силу их прикладной значимости, а

с другой — вследствие большого теоретического содержания возникающих здесь проблем.

При изучении внутренних волн часто используется так называемое приближение Буссинеска [1]. Для слабо стратифицированных жидкостей его применение в большинстве случаев является оправданным [1]. Уравнения динамики стратифицированных жидкостей в приближении Буссинеска [2, 3], а также родственные ему уравнения динамики вращающихся жидкостей [4—6] и основные начально-краевые задачи изучены практически полностью [1—6].

Этого нельзя сказать про полное уравнение внутренних волн, возникающее при исследовании длинных волн или волн в сильно стратифицированных жидкостях. При этом оказывается, что учет «небуссинесковских» членов в уравнении внутренних волн приводит в конечном счете не только к внесению некоторых уточнений в волновую картину, но и к выявлению качественно новых эффектов, таких как явление квазифронта [3, 7]. Настоящая работа посвящена исследованию структуры квазифронта в задаче о внутренних волнах, возбуждаемых точечным источником мгновенного действия.

2. Уравнение внутренних волн и его фундаментальное решение

Будем рассматривать колебания идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости в декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) , предполагая, что жидкость является экспоненциально стратифицированной вдоль оси Ox_3 , т. е. ее плотность в невозмущенном состоянии имеет вид

$$\rho_0(x_3) = \rho_0 \exp\{-2\beta x_3\}, \quad \beta > 0.$$

Линейные нестационарные внутренние волны в рассматриваемой жидкости описываются уравнением [3]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta_3 U - \beta^2 U) + \omega_0^2 \Delta_2 U = 0, \quad (1)$$

где Δ_3 и Δ_2 — операторы Лапласа по переменным x_1, x_2, x_3 и x_1, x_2 соответственно, ω_0^2 — квадрат частоты Вейселя—Брента [1], функция $U(x, t)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, связана с динамическим давлением P соотношением [3]

$$P = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2 \right) \exp\{-\beta x_3\} U(x, t). \quad (2)$$

Чтобы избежать громоздких формул, перейдем к безразмерным переменным βx , $\omega_0 t$, сохраняя для них прежние обозначения x, t . При этом уравнение (1) принимает вид

$$\mathcal{L}U \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta_3 U - U) + \Delta_2 U = 0.$$

Уравнение приближения Буссинеска, в которое переходит (1), если положить $\beta = 0$, в принятых безразмерных переменных имеет вид

$$\mathcal{L}_0 U \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_3 U + \Delta_2 U = 0.$$

В [8] построено фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$:

$$e(x, t) = -\frac{h(t)}{4\pi^2|x|} \Gamma(x, t),$$

$$\Gamma(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\mu, \theta) \exp \{i\mu |x|\} \sin(B(\mu, \theta) t) d\mu, \quad (3)$$

$$A(\mu, \theta) = (\mu^2 + 1)^{-1/2} (\mu^2 + \cos^2 \theta)^{-1/2}, \quad B(\mu, \theta) = A(\mu, \theta) (\mu^2 + \cos^2 \theta).$$

Здесь и в дальнейшем $h(t)$ — функция Хевисайда, $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$, а θ — угол между вектором Ox и ортом e_3 .

Приведем также фундаментальное решение оператора приближения Буссинеска $\mathcal{L}_0$, построенное в [3]:

$$\varepsilon_0(x, t) = -\frac{h(t)}{4\pi^2 |x|} \int_{-\infty}^{\infty} A(\mu, \theta) \sin(B(\mu, \theta) t) d\mu,$$

где $A(\mu, \theta)$, $B(\mu, \theta)$ определены формулой (3).

В [7] было изучено асимптотическое поведение при $|x| \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow +\infty$ функции $\varepsilon(x, t)$, по своему смыслу описывающей внутренние волны, вызванные точечным источником мгновенного действия. При этом свойства $\varepsilon(x, t)$ оказались существенно различными в областях $|x| > C(\theta)t$ и $|x| < C(\theta)t$, где

$$C(\theta) = \sin^2 \theta \cdot \max_{\mu \in [0, \infty)} \frac{\mu}{(\mu^2 + 1)^{3/2} (\mu^2 + \cos^2 \theta)^{1/2}}.$$

Проведенный в [7] анализ позволяет сделать вывод, что поверхность $|x| = C(\theta)t$, которая приближенно может быть задана формулой $|x| \approx \sin^2 \theta t$, представляет собой поверхность квазифронта, несущего впереди себя экспоненциально малый «предвестник», а позади — «шлейф осцилляций».

3. Результаты численного исследования и их анализ

Более детальное представление о характере квазифронта и возможность сравнительного анализа «буссинесковской» и «небуссинесковской» волновых картин дают результаты численного исследования. Такое исследование естественно провести не для фундаментальных решений $\varepsilon(x, t)$ и $\varepsilon_0(x, t)$, не имеющих непосредственного физического смысла, а для динамического давления, задаваемого формулами

$$\begin{aligned} P(x, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1 \right) \varepsilon(x, t) \exp \{-x_3\}, \\ P_0(x, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1 \right) \varepsilon_0(x, t) \end{aligned} \quad (4)$$

для «небуссинесковского» случая и приближения Буссинеска соответственно.

Анализ волновой картины от точечного источника мгновенного действия удобно провести в сферических координатах $|x|$, θ , φ . При этом из явного вида функций $\varepsilon(x, t)$ и $\varepsilon_0(x, t)$ нетрудно усмотреть, что все характеристики волн как в приближении Буссинеска, так и в «небуссинесковском» случае не зависят от угла φ . Кроме того, в приближении Буссинеска значения давления в точках, симметричных относительно плоскости $x_3 = 0$, оказываются равными для любого t . Аналогичным свойством обладает в «небуссинесковском» случае величина

$$\tilde{P}(x, t) = \exp \{x_3\} P(x, t), \quad (5)$$

где $P(x, t)$ определена в (4).

На рис. 1 изображены графики функции $\tilde{P}(x, t)$ в зависимости от переменной t для фиксированного значения $|x|=20$ и различных $\theta = 15^\circ (165^\circ)$ (а), $45^\circ (135^\circ)$ (б) и 90° (в). Эти графики наглядно под-

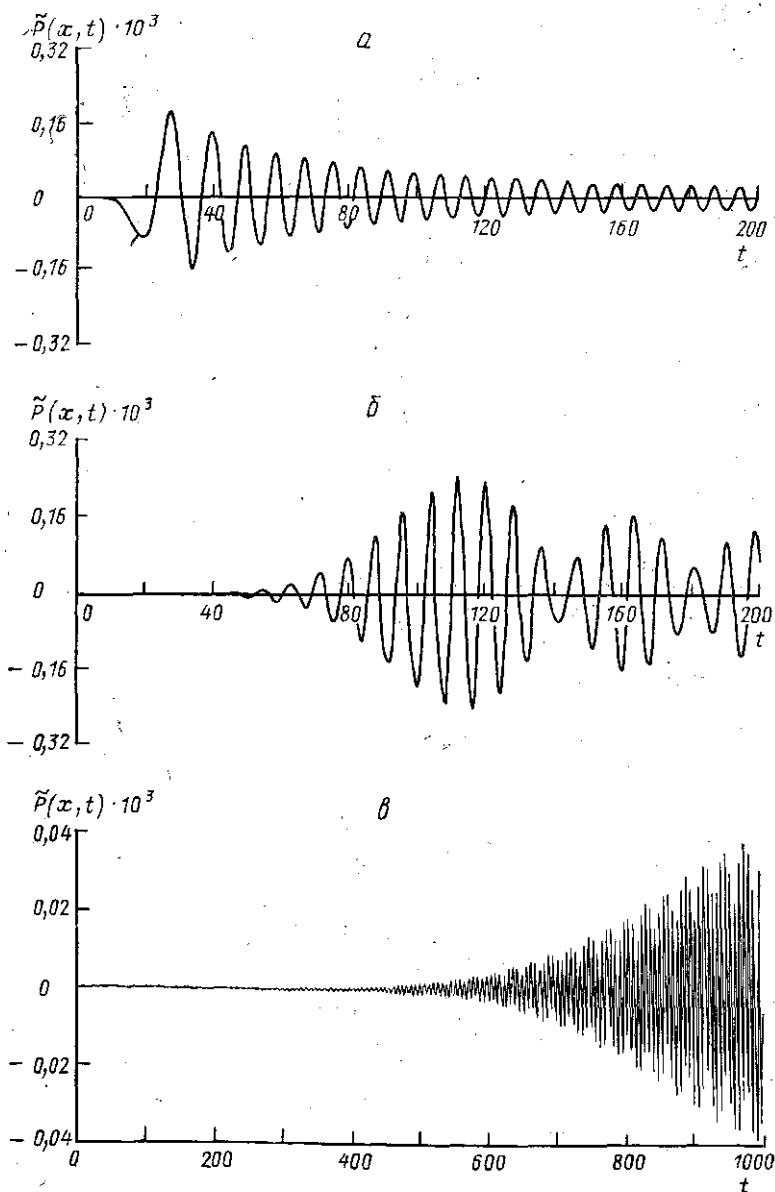


Рис. 1

тверждают наличие волнового квазифронта и зависимость скорости его распространения от угла θ : время прихода квазифронта в данную точку ($|x|$, θ , φ), за которое принято значение t_0 , отвечающее первому максимуму или минимуму функции $\tilde{P}(x, t)$, существенно увеличивается с уменьшением $\sin^2 \theta$ и хорошо согласуется с приведенными в п. 2 результатами асимптотического исследования.

На рис. 2 изображены соответствующие графики функции $P_0(x, t)$ (4) для приближения Буссинеска. Сравнение рис. 1 и 2 показывает значительные отличия волновых картин. Отметим, что на рис. 1 по оси

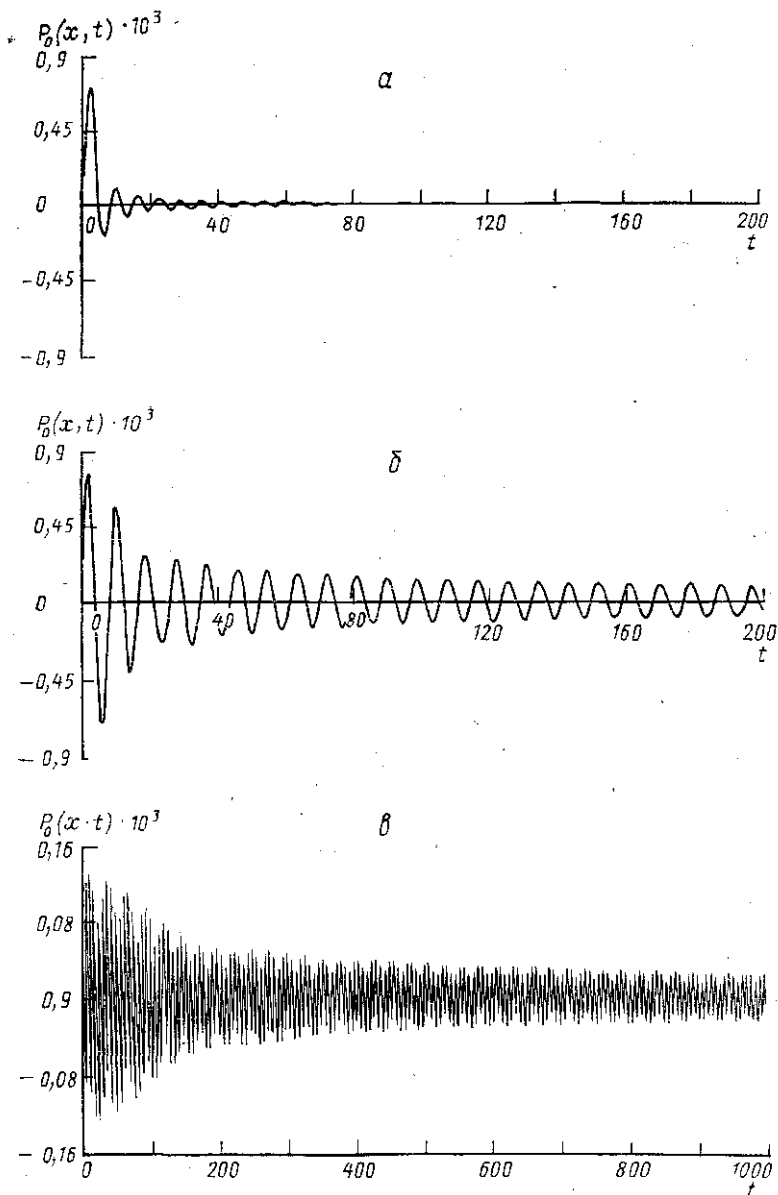


Рис. 2

ординат отложены не значения давления $P(x, t)$, а значения функции $\bar{P}(x, t)$, определенной в (5). Таким образом, еще одним отличием «небуссинесковской» волновой картины от случая приближения Буссинеска является анизотропия в направлении оси Ox_3 : для двух точек, расположенных симметрично относительно плоскости $x_3=0$, значения давления будут больше в «нижней» точке ($x_3 < 0$).

Рисунок 3 иллюстрирует процесс распространения квазифронта: на нем приведены графики функции $\tilde{P}(x, t)$ (5) в зависимости от переменной ($|x|$) при $\theta=45^\circ$ и значений $t=5$ (1), 20 (2) и 50 (3).

В заключение авторы выражают признательность проф. А. Г. Свешникову за внимание к работе.

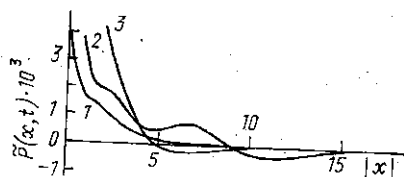


Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л., 1981. [2] Габов С. А., Свешников А. Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М., 1986. [3] Габов С. А., Свешников А. Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М., 1990. [4] Соболев С. Л. // Изв. АН СССР, сер. матем. 1954. 18, № 1. С. 3. [5] Зеленяк Т. И. Избранные вопросы качественной теории уравнений с частными производными. Новосибирск, 1970. [6] Масленникова В. Н. // Сиб. матем. журн. 1968. 9, № 5. С. 1182. [7] Плетнер Ю. Д. // ДАН СССР. 1991. 319, № 3. С. 604. [8] Плетнер Ю. Д. // ЖВМ и МФ. 1991. 31, № 4. С. 592.

Поступила в редакцию
22.12.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1994. Т. 35, № 1

УДК 519.6:533.9.07

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЛАЗМЕННОГО УСКОРТЕЛЯ

Б. А. Марков, С. А. Якунин
(кафедра математики)

Построена замкнутая самосогласованная стационарная одномерная численная модель плазменного ускорителя с азимутальным дрейфом электронов. В основе модели лежит предположение о немаксвелловском виде равновесной функции распределения электронов по энергии. Рассмотрено однопараметрическое семейство функций распределения. Исследована зависимость основных величин, характеризующих физические процессы в ускорителе, как от параметра этого семейства, так и от внешних параметров, задающих внешнее магнитное поле и предварительную, «затравочную» ионизацию. Выявлен пороговый характер возникновения основного ионизационного процесса в зависимости от величины «затравочной» ионизации.

Плазменный ускоритель с азимутальным дрейфом электронов является одной из плазмооптических систем [1—4]. Он широко применяется в современной науке и технике. Основные физические процессы в ускорителе и его принципиальная конструкция подробно описаны в работах [1—4]. Математические модели разного уровня сложности, в том числе и двумерные, рассмотрены в работах [5—11]. Экспериментальные исследования [12—13] показали, что в плазмооптических системах подобного типа в условиях динамического равновесия функция распределения электронов по энергии (ФРЭЭ) имеет немаксвелловский вид. А именно: в ФРЭЭ отсутствует высокоэнергетическая часть. Это связано с тем, что в пространственно ограниченных системах электроны с большими энергиями «оседают» на стенках камеры прибора. В условиях квазинейтральной плазмы при наличии магнитного поля, «за-