Рисунок 3 иллюстрирует процесс распространения квазифронта: на нем приведены графики функции $\tilde{P}(x, t)$ (5) в зависимости от переменной ($|x|$) при $\theta=45°$ и значений $t=5$ (*1*), 20 (*2*) и 50 (*3*).

В заключение авторы выражают признательность проф. А. Г. Свешникову за внимание к работе.

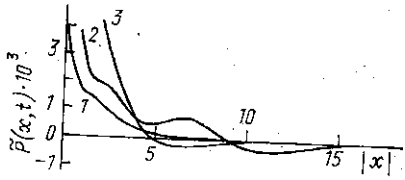

Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

[1] Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л., 1981. [2] Габов С. А., Свешников А. Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М., 1986. [3] Габов С. А., Свешников А. Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М., 1990. [4] Соболев С. Л.// Изв. АН СССР, сер. матем. 1954. **18**, № 1. С. 3. [5] Зеленяк Т. И. Избранные вопросы качественной теории уравнений с частными производными. Новосибирск, 1970. [6] Масленникова В. Н.//Сиб. матем. журн. 1968. **9**, № 5. С. 1182. [7] Плетнер Ю. Д.//ДАН СССР. 1991. **319**, № 3. С. 604. [8] Плетнер Ю. Д.//ЖВМ и МФ. 1991. **31**, № 4. С. 592.

Поступила в редакцию
22.12.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1994. Т. 35, № 1

УДК 519.6:533.9.07

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЛАЗМЕННОГО УСКОРИТЕЛЯ

Б. А. Марков, С. А. Якунин
(кафедра математики)

Построена замкнутая самосогласованная стационарная одномерная численная модель плазменного ускорителя с азимутальным дрейфом электронов. В основе модели лежит предположение о немаксвелловском виде равновесной функции распределения электронов по энергии. Рассмотрено однопараметрическое семейство функций распределения. Исследована зависимость основных величин, характеризующих физические процессы в ускорителе, как от параметра этого семейства, так и от внешних параметров, задающих внешнее магнитное поле и предварительную, «затравочную» ионизацию. Выявлен пороговый характер возникновения основного ионизационного процесса в зависимости от величины «затравочной» ионизации.

Плазменный ускоритель с азимутальным дрейфом электронов является одной из плазмооптических систем [1—4]. Он широко применяется в современной науке и технике. Основные физические процессы в ускорителе и его принципиальная конструкция подробно описаны в работах [1—4]. Математические модели разного уровня сложности, в том числе и двумерные, рассмотрены в работах [5—11]. Экспериментальные исследования [12—13] показали, что в плазмооптических системах подобного типа в условиях динамического равновесия функция распределения электронов по энергии (ФРЭЭ) имеет немаксвелловский вид. А именно: в ФРЭЭ отсутствует высокоэнергетическая часть. Это связано с тем, что в пространственно ограниченных системах электроны с большими энергиями «оседают» на стенках камеры прибора. В условиях квазинейтральной плазмы при наличии магнитного поля, «за-

магничивающего» только электроны, динамика электронной компоненты определяет и структуру электрического поля, и процесс ионизации нейтрального газа. Знание вида ФРЭЭ позволяет принципиально обойти многие трудности при описании физических процессов в ускорителе, с которыми приходится сталкиваться в моделях [5—9]. Целью данной работы является построение замкнутой самосогласованной стационарной одномерной модели плазменного ускорителя, в которой вид ФРЭЭ задается однопараметрическим семейством функций. Упрощение, связанное с одномерностью модели, позволяет существенно сократить требования, предъявляемые к ресурсам ЭВМ, и проводить серии расчетов для исследования основных закономерностей.

Принципиальная схема плазменного ускорителя в цилиндрической системе координат подробно описана в работах [6, 7]. Сохраняя предположение об азимутальной симметрии системы, при описании пространственных переменных в одномерной модели будем пользоваться (r, z)-обозначениями. Канал ускорителя будем представлять себе отрезком $0 \leqslant z \leqslant L$, расположенным при $r=R$. Пренебрежем компонентой магнитного поля H_z, а компоненту H_r опишем в виде

$$H_r = H_0 \exp\left\{-\left(\frac{z-l}{\Delta}\right)^2\right\}. \tag{1}$$

Здесь H_0 — константа, задающая некоторое характерное значение поля, параметр l определяет положение максимума поля вдоль z, Δ характеризует ширину «колокольчика» максимума. Для удобства описания введем функцию магнитного потока ψ, определяя ее соотношением $H_r = -\frac{1}{R}\frac{d\psi}{dz}$. Согласно (1) она будет иметь вид

$$\psi(z) = \psi_0 \begin{cases} \dfrac{1+\operatorname{erf}[(l-z)/\Delta]}{1+\operatorname{erf}(l/\Delta)}, & 0 \leqslant z \leqslant l, \\ \dfrac{1-\operatorname{erf}[(z-l)/\Delta]}{1+\operatorname{erf}(l/\Delta)}, & l \leqslant z \leqslant L, \end{cases}$$

$$\psi_0 = \frac{1}{2} H_0 R \sqrt{\pi}\left(1+\operatorname{erf}\left(\frac{l}{\Delta}\right)\right)\Delta,$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp\{-t^2\}\,dt.$$

На вход ускорителя $z=0$ подается поток q частично ионизованного газа с концентрацией ионов n_0 и концентрацией нейтральных атомов g_0, со скоростями ионов и атомов v_0, v_a соответственно:

$$\begin{aligned} &q = q_i + q_a, \quad q_i = q\theta, \\ &q_i = n_0 v_0, \quad q_a = g_0 v_a. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь q_i, q_a — потоки ионов и атомов на входе; параметр θ задает предварительную, «затравочную» ионизацию.

Длины свободных пробегов ионов и нейтральных атомов при столкновениях друг с другом много больше характерного размера системы L. Поэтому их динамику можно описывать бесстолкновительными кинетическими уравнениями, в правой части которых находятся члены, описывающие ионизацию нейтральных атомов электронным ударом. Так, для ионной компоненты плазмы имеем

$$\begin{cases} v\dfrac{\partial f_i}{\partial z}+\dfrac{e}{M}E\dfrac{\partial f_i}{\partial v}=F_i, \\ n_i=\int f_i\,dv,\ F_i=\beta(z)\,n_e(z)\,g(z)\,f_p(v), \\ f_p=\delta(v-v_a),\ f_i(0,\ v)=n_0\begin{cases}0, & v<0, \\ \delta(v-v_0), & v>0.\end{cases}\end{cases} \tag{3}$$

Здесь f_i — функция распределения ионов; n_i, n_e, g — концентрации ионов, электронов и атомов соответственно; e, M — заряд и масса ионов; β — коэффициент ионизации. В уравнениях (3) для простоты пренебрегается влиянием магнитного поля на динамику ионов. Описание динамики нейтрального газа в предположении о постоянстве скорости атомов вдоль канала ускорителя сводится к простому дифференциальному уравнению относительно концентрации g:

$$v_a\frac{dg}{dz}=-\beta(z)\,n_e(z)\,g(z),\quad g(0)=g_0. \tag{4}$$

Плазма в канале ускорителя является квазинейтральной, т. е.

$$n_i\simeq n_e\equiv n. \tag{5}$$

В работах [1—4] показано, что динамика электронной компоненты определяет электрическое поле в канале плазмооптических систем. В одномерной модели [5] распределения электрического поля и температуры электронов считались заданными. В работе [5] была проведена оценка длины зоны ионизации и исследована возможность работы ускорителя на различных веществах. В [6, 7] для описания электрического поля вводилось понятие «термализованного» потенциала [1—4]. Это позволило проводить двумерные расчеты плазменного ускорителя и плазменной линзы. Однако для вычисления электрического потенциала и электронной температуры необходимо было знать их распределение вдоль некоторой опорной прямой, пересекающей все магнитные силовые линии. Эти данные взяты из эксперимента. Такая модель, не являясь самосогласованной, не позволяла проводить серийные расчеты, предназначенные для проектирования новых систем.

В работах [8, 9] была построена самосогласованная нестационарная модель, в которой для определения электрического поля использовался обобщенный закон Ома, а для вычисления температуры электронов — первое начало термодинамики, записанное для электронного газа. Введение в модель временнóй зависимости потребовало использования больших ресурсов ЭВМ. В одномерном случае [8] были выявлены наблюдаемые в реальном эксперименте пролетные колебания. Проведение серии расчетов на такой одномерной модели было сильно затруднено из-за ограниченности доступных пользователю ресурсов ЭВМ. В работе [9] описан двумерный вариант самосогласованной математической модели, предложен консервативный по интегральным энергии и импульсу численный вариант решения и доказаны теоремы, строго обоснующие предложенные алгоритмы. Однако реализация этих алгоритмов требует значительно больших ресурсов ЭВМ, чем в модели [8]. Работы [12, 13] дали возможность взглянуть на эту проблему с другой стороны. Экспериментальные исследования показали, что ФРЭЭ имеет немаксвелловский, но достаточно характерный вид. Более того, нормировка ФРЭЭ выглядит следующим образом:

$$n_e=\frac{4\pi\sqrt{2}}{\sqrt{m_e^3}}\int_0^\infty f_e(\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon. \tag{6}$$

Коэффициент ионизации β и электронное давление p_e выражаются через интегралы:

$$\beta = \frac{8\pi}{m_e^2 n_e} \int_0^\infty f_e(\varepsilon)\,\sigma(\varepsilon)\,\varepsilon\,d\varepsilon, \tag{7}$$

$$p_e = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3\sqrt{m_e^3}} \int_0^\infty f_e(\varepsilon)\,\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon. \tag{8}$$

Здесь $\sigma(\varepsilon)$ — известное сечение ионизации; m_e — масса электрона. Предположение об «изодрейфовом» характере движения электронов, т. е. о постоянстве их угловой скорости Ω вдоль всего канала ускорителя [12], приводит к простым формулам для вычисления электрического поля:

$$\Phi = \frac{\Omega}{c}\psi + \mu + \varphi_0, \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi. \tag{9}$$

Здесь μ — тепловой потенциал, связанный с давлением p_e соотношением $\nabla\mu = \nabla\, p_e/n_e$; константы Ω и φ_0 находятся из граничных условий

$$\begin{cases} \Phi|_{z=0} = \Phi_0, & \mu|_{z=0} = \mu_0, \\ \Phi|_{z\to\infty} = 0, & \mu|_{z\to\infty} = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Таким образом, если известен вид ФРЭЭ, то формулы (6)—(10) замыкают основную систему уравнений самосогласованным образом.

Рассмотрим однопараметрическое по ξ семейство функций

$$f_e(\varepsilon) = A \begin{cases} \alpha\left(1 - \dfrac{\varepsilon}{\alpha\xi}\right)^{\xi}, & \varepsilon < \alpha\xi, \\ 0, & \varepsilon > \alpha\xi. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь α — размерный параметр «отсечки», а нормировочная константа A вычисляется из (6):

$$A = \frac{n_e}{\alpha^{5/2}} \left(\frac{m_e}{2\pi\xi}\right)^{3/2} \frac{\Gamma(\xi + 5/2)}{\Gamma(\xi + 1)}. \tag{12}$$

При $\xi\to\infty$ ФРЭЭ (11) стремится к максвелловскому распределению. Случай $\xi=1$, соответствующий линейному виду ФРЭЭ, рассматривался в [10]. В [11] дан обзор математических моделей ускорителя, приведенных в [6—10], а также используемых в них алгоритмов решения.

Введение параметра ξ в (11) связано в первую очередь с желанием детально изучить вопрос о возникновении интенсивного процесса ионизации в канале ускорителя. Итак, для электронного давления p_e из (8) имеем $p_e = n_e\alpha\xi/(\xi + 5/2)$. Назовем величину $T = \alpha\xi/(\xi + 5/2)$ электронной температурой. Основанием для этого является, во-первых, сохранение классической формулы $p_e = n_e T$, во-вторых, при $\xi\to\infty$ этот аналог совпадает с общепринятым понятием температуры. Пусть при некотором z, например при $z=0$, нам известны значения концентрации электронов n_0 и температуры электронов T_0, тогда из (12) следует соотношение

$$T = T_0 (n_e/n_0)^{2/5}. \tag{13}$$

Тепловой потенциал μ в этом случае связан с температурой T соотношением

$$\mu = (7/2)\,T, \tag{14}$$

аналогичным соотношением связаны константы T_0 и μ_0 из (10). Коэффициент ионизации в соответствии с (7) имеет вид

$$\beta(T)=\frac{\Gamma(\xi+5/2)}{\Gamma(\xi+1)}\sqrt{\frac{T(\xi+5/2)}{8\pi}}\int_0^1(1-x)^{\xi}\sigma(\eta x)\,x\,dx, \tag{15}$$

$$\eta=T(\xi+5/2).$$

Система уравнений (1)—(15) и представляет собой замкнутую, самосогласованную, одномерную математическую модель динамики физических процессов в плазменном ускорителе с азимутальным дрейфом электронов.

Система уравнений (1)—(15) является нелинейной, ее аналитическое решение найти не удается. Для разрешения этой системы необходимо применять итерационный алгоритм с численной его реализацией на ЭВМ. Отдельные этапы алгоритма требуют дискретного, сеточного подхода. Так, при решении системы уравнений (3), описывающих динамику ионной компоненты плазмы, использовался метод макрочастиц, который применительно к данному случаю подробно изложен в [9]. Для решения уравнения (4), в котором определяется концентрация нейтрального газа, использовалась явная разностная схема, описанная в [6]. Расчеты по этой схеме проводились на том же сеточном разбиении, что и при решении системы уравнений (3). Вычисление коэффициента ионизации реализовывалось следующим образом. Перед началом итерационного процесса согласно (15) табулировалась зависимость $\beta(T)$. В самом же итерационном процессе использовалась интерполяционная процедура. Такой подход при вычислении β позволил существенно сократить реальное время счета на ЭВМ.

Рассмотрим основные этапы итерационного алгоритма при описании перехода от k-й к следующей $(k+1)$-й итерации. Сначала по известным сеточным значениям функций T^k, g^k согласно (14) вычисляется тепловой потенциал μ^{k+1} и коэффициент ионизации $\beta^{k+1}(T^k(z))$ в соответствии с (15), по (1), (9) находится E^{k+1}, затем методом макрочастиц решается система (3) и вычисляется концентрация ионов n^{k+1}; с учетом условия квазинейтральности (5) мы тем самым находим и концентрацию электронов. На следующем этапе по известным значениям n^{k+1}, β^{k+1} из (4) с использованием разностной схемы вычисляется концентрация нейтрального газа g^{k+1}. Из (13) и (5) находятся значения T^{k+1}. После этого, если не достигнута требуемая точность, делается следующий итерационный шаг. Выход из итерационного алгоритма осуществлялся по критерию

$$\max_{0<z<L}\left|\frac{n^{k+1}-n^k}{n_0}\right|<\varepsilon,$$

где ε — желаемая точность.

Была проведена серия расчетов по модели (1)—(15), в которой исследовались зависимости основных распределений Φ, g, n от значений внешних параметров, таких, как l, Δ, определяющих форму магнитного поля, от параметра θ, задающего степень предварительной ионизации, и от ξ, характеризующего вид ФРЭЭ. Основным результатом явилось подразделение режимов работы ускорителя на два ярко выраженных режима. В первом случае в канале ускорителя протекает интенсивная, бурная ионизация нейтрального газа вплоть до его полного «выгорания». Этот режим будем называть рабочим. Во втором случае ионизация практически отсутствует. Вид графиков основных рас-

пределений мало зависит от граничных констант. Этот режим будем называть режимом без ионизации. Сравнение обоих режимов представлено на рис. 1. В рабочем режиме потенциал принимает вид пологой ступеньки (рис. 1, *а*). Уменьшение концентрации нейтрального газа на рис. 1, *б*, характеризующее протяженность зоны ионизации, приходится на начало спада электрического потенциала и примерно соответствует положению максимума концентрации ионов на рис. 1, *в*. В рабо-

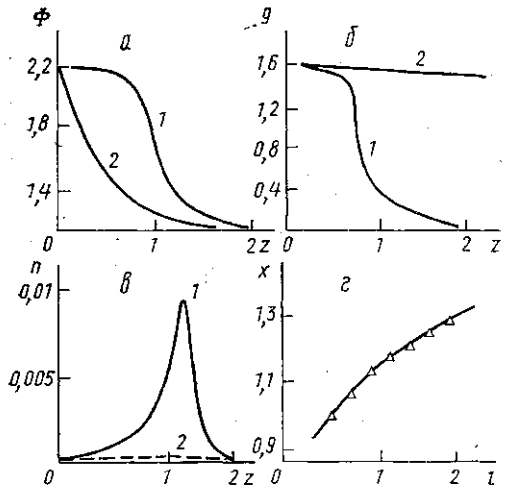

Рис. 1

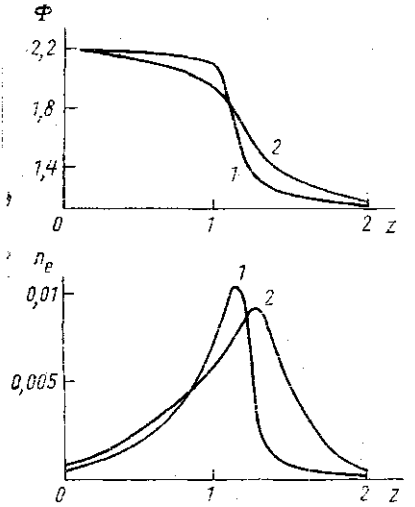

Рис. 2

Рис. 1. Распределение потенциала (*а*), плотности нейтрального газа (*б*) и плотности ионов (*в*) вдоль канала ускорителя при ионизации (*1*) и без ионизации (*2*). Зависимость положения максимума плотности ионов x от параметра магнитного поля l (*г*). Все результаты даны в безразмерных единицах

Рис. 2. Сопоставление результатов расчетов, сделанных согласно модели (1)—(15) — *1*, с аналогичными, проведенными по модели «термализованного» потенциала — *2*

чем режиме, изменяя магнитное поле с помощью параметров Δ и l, можно изменять расположение и протяженность зоны ионизации. Длиной зоны ионизации управляет параметр Δ. Чем больше значение Δ, т. е. шире колокольчик H_r, тем более пологой становится ступенька для потенциала Φ и тем протяженнее зона ионизации. Рис. 1, *г* иллюстрирует зависимость положения зоны ионизации от параметра l. Чем

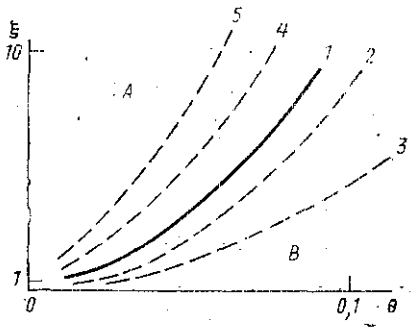

Рис. 3. Изолинии интегрального тока в безразмерных величинах. Линия *1* соответствует $I=0{,}1$ и разделяет на плоскости (θ, ξ) области существования и отсутствия ионизации в канале ускорителя; $I=1$ (*2*), 2 (*3*), 0,05 (*4*) и 0,01 (*5*)

больше значение l, т. е. чем ближе максимум H_r к границе $z=L$, тем ближе и положение зоны ионизации к этой же границе. Отметим, что вариации магнитного поля не приводят к переходу от одного режима работы ускорителя к другому. На рис. 2 сопоставляются результаты

расчетов по модели (1)—(15) с аналогичными результатами, полученными из вычислительного эксперимента, проведенного по модели «термализованного» потенциала. Сравнение показывает хорошее качественное соответствие. На рис. 3 представлены линии уровня ионного тока $I=\int j_i v dv$, вычисленного на выходе ускорителя $z=L$. По оси ординат отложены значения параметра ξ, а по оси абсцисс — значения параметра «затравочной» ионизации θ. На этом рисунке можно выделить две области, которые обозначены буквами A и B. Область A соответствует тем значениям параметров ξ, θ, при которых реализуется режим без ионизации. Область B соответствует рабочему режиму. Переход от одной области к другой, т. е. от одного режима к другому, имеет ярко выраженный пороговый характер. Выявить этот пороговый эффект, в первую очередь по величине «затравочной» ионизации, на других математических моделях ранее не удавалось. Вопрос же о конкретном значении параметра ξ, т. е. по существу о виде ФРЭЭ, требует рассмотрения двумерной модели с учетом реального магнитного поля и взаимодействия потоков ионов и нейтральных атомов со стенками канала ускорителя.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Плазменные ускорители/Под ред. Л. А. Арцимовича. М., 1973. [2] Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича. М., 1974. [3] Морозов А. И. Физические основы космических электро-реактивных двигателей. М., 1978. [4] Плазменные ускорители и ионные инжекторы/Под ред. А. И. Морозова. М., 1984. [5] Меликов И. В.//ЖТФ. 1973. 44, № 3. С. 549. [6] Волков Б. И., Свешников А. Г., Якунин С. А.//ДАН СССР. 1978. 128, № 2. С. 256. [7] Волков Б. И., Морозов А. И., Свешников А. Г., Якунин С. А.//Физика плазмы. 1981. 7, № 2. С. 245. [8] Свешников А. Г., Федотов А. П., Якунин С. А.//Препринт физ. ф-та МГУ № 21/1981. М., 1981. [9] Свешников А. Г., Якунин С. А.//ЖВМ и МФ. 1983. 23, № 5. С. 1141. [10] Маслов А. К., Якунин С. А.//Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. матем. и киберн. 1990. № 1. С. 42. [11] Свешников А. Г., Якунин С. А.//Матем. моделирование. 1989. 1, № 4. С. 1. [12] Бугрова А. И.//ЖТФ. 1987. 57, № 9. С. 1852. [13] Бугрова А. И., Морозов А. И.//ЖТФ. 1987. 57, № 10. С. 1995.

Поступила в редакцию
29.03.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1994. Т. 35, № 1

УДК 530.12:531.51

ФИНСЛЕРОВО РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ, СОВМЕСТИМОЕ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ИЗОТРОПНОСТЬЮ

Г. С. Асанов
(кафедра теоретической физики)

Финслеровы обобщения фундаментальных соотношений теории относительности могут последовательно выводиться на основе конкретной финслеровой метрической функции, совместимой с принципом пространственной однородности и включающей один характерный параметр. В работе выводятся соответствующие активные версии закона сложения собственно релятивистских скоростей и принципа взаимности.

Введение

После публикации работ [1, 2] появились многочисленные исследования теоретических оснований или возможных эмпирических следствий теории относительности. Было показано, что специальная тео-