

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Nielsen N. K., Olesen P.//Nucl. Phys. 1978. В 144. Р. 376; Ambjørn J., Hughes R. J., Nielsen N. K.//Ann. of Phys. (N. Y.) 1983. 150. Р. 92. [2] Скалозуб В. В.//Ядерная физика. 1978. 23. С. 113. [3] Халилов В. Р., Обухов И. А., Перес-Фернандес В. К.//Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля: V Междунар. семин. по физ. выс. энергии и квант. теор. поля. Протвино, 1982. Т. 2. С. 292. [4] Ambjørn J., Olesen P.//Phys. Lett. 1988. В 214. Р. 565; 1989. В 218. Р. 67. [5] Ambjørn J., Olesen P.//Nucl. Phys. 1990. В 330. Р. 193; 1989. В 315. Р. 606. [6] Salam A., Strathdee J.//Nucl. Phys. 1975. В 90. Р. 203. [7] Linde A. D.//Rep. Prog. Phys. 1979. 42. Р. 389. [8] Scalozub V. V.//Sov. J. Nucl. Phys. 1986. 43. Р. 665. [9] MacDowell S. W., Ola Törnkvist. Preprint YCTP—P31—91. Yale University. New Haven, USA, 1991. [10] Богомольный Е. Б.//Ядерная физика. 1976. 24. С. 449. [11] Скалозуб В. В.//Ядерная физика. 1978. 28. С. 228. [12] Ghoroku K.//Progr. Theor. Phys. 1982. 68. Р. 1340. [13] Халилов В. Р. Электроны в сильном магнитном поле. М., 1988. [14] Халилов В. Р., Линьков В. Ю., Обухов И. А., Перес-Фернандес В. К.//Ядерная физика. 1988. 48. С. 1067.

Поступила в редакцию
09.04.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1994. Т. 35, № 1

УДК 539.12.01

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ТИПА ДЗЕТА-ФУНКЦИЙ РИМАНА — ЭПШТЕЙНА

А. С. Вшивцев, В. Ч. Жуковский
(кафедра теоретической физики)

Построены рекуррентные соотношения для обобщенных дзета-функций типа Римана—Эпштейна. Найденные представления удобны для исследования функций в различных асимптотических областях изменения параметров. Результаты иллюстрируются на конкретной физической модели Гросса—Невье в магнитном поле при конечной температуре.

Дзета-функция Римана благодаря замечательным работам Хокинга (см., напр., [1]) стала необходимым атрибутом квантовой теории поля (КТП) при проведении процедуры регуляризации. Вместе с тем в ряде задач КТП, связанных с многомерием, например в суперсимметричных и струнных теориях [2, 3], а также при обсуждении свойств систем, квантованных по различным координатам, приходится выполнять процедуру регуляризации полученных выражений, в которых естественным образом возникает обобщенная дзета-функция Эпштейна, являющаяся многомерным аналогом соответствующей функции Римана. При проведении вычислений с указанной функцией необходимо знание ее свойств и умение получать с ее помощью конкретные результаты. Однако в настоящее время в литературе отсутствуют публикации, позволяющие в полной мере описать свойства этой функции. С учетом изложенного мы обратимся к рассмотрению свойств функции Эпштейна, которая имеет вид [4]

$$E_N^c(s, a, c) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N=0}^{\infty} [a_1(n_1 + c_1)^2 + \dots + a_N(n_N + c_N)^2 + c]^{-s}. \quad (1)$$

Прежде чем рассмотрим свойства функции (1) и получим замкнутое выражение, позволяющее расширить возможность изучения этой

функции в различных областях параметров s , a и c , заметим, что исходной задачей для решения поставленной является суммирование рядов типа

$$S_\alpha(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \exp\{-m^\alpha t\}. \quad (2)$$

Выражаясь более точно, необходимо построить хорошие аппроксиманты, позволяющие решить эту задачу. В общем случае это трудная проблема, которая не решена и в данной работе, однако предложенная нами процедура с высокой степенью точности приближает ответ.

Укажем, что ряды типа (2) довольно часто возникают в КТП, например при обсуждении температурных эффектов [3, 5, 6], вычислении энергии вакуума различных моделей [7—9], поэтому ряды такой структуры имеют самостоятельный интерес. В предыдущих работах, в том числе и наших [10—12], обсуждался вопрос о суммировании рядов, имеющих структуру типа (2). В основу процедуры суммирования такого типа рядов может быть положен метод интегральных преобразований с ядром Меллина—Бернса, который позволяет получить соответствующее лорановское разложение для функции $S_\alpha(t)$. При построении результата используется теорема Коши. Корректное использование этой теоремы, как известно [12], требует малости на бесконечности вклада контурного интеграла, через который выражается искомая функция:

$$S_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}} \zeta(\alpha\xi) \Gamma(\xi) t^{-\xi} d\xi, \quad (3)$$

при этом остается лишь вклад от полюсов, содержащихся внутри области, охватываемой контуром $\tilde{C}$. Пренебрежение такого рода требованием может привести к ошибочному результату. Так, следуя «правилам» работ Актора и Велдона [13, 14], для функции $S_\alpha(t)$ при $\alpha=2$ и $t=1$ получим ответ: $(\sqrt{\pi}-1)/2$. Прямое вычисление суммы на ЭВМ дает ответ, отличающийся от найденного на величину $\Delta_2 = S - (\sqrt{\pi}-1)/2 = -9,17 \cdot 10^{-5}$. Эта величина, конечно же, мала, но при $\alpha=4$ имеем $\Delta_{\alpha=4}=0,04$, при $\alpha=6$ уже $\Delta_{\alpha=6}=0,07$, а при $\alpha \rightarrow \infty$ ошибка составляет 0,13, т. е. 36% от всего выражения $S_\alpha(1)$. Лишь в случае $\alpha < 2$ результат является точным, т. е. $\Delta_\alpha=0$. Этот факт отмечался ранее у нас и в работе Элизальде, где для решения задачи использована обычная теория функций комплексной переменной, процедура разбиения контура на части, одна из которых учитывает полюсные особенности подынтегральной функции, а вторая — ее асимптотическое поведение на бесконечности.

Аналогичная процедура при суммировании рядов функций Макдональда $K_\nu(x)$ использовалась в нашей работе [12]. При этом мы приходим к необходимости нахождения сумм вида $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \mathcal{K}_\beta(\omega n)$, через которые выражаются рекуррентные соотношения для функций Эпштейна [15]. При $\omega \gg 1$ для функций Макдональда можно использовать экспоненциальную асимптотику, что и было сделано в работе [15]. Если же $\omega \ll 1$, то следует воспользоваться результатами наших работ [12, 16]. В результате получим следующее рекуррентное соотношение:

$$E_N^c(s; a; c) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-a_1)^m}{m!} \zeta(-2m, c_1) \Gamma(s+m) E_{N-1}^c(s+m; a_2, \dots, a_N; c_2, \dots, c_N) + \\
&+ \sqrt{\frac{\pi}{a_1}} \frac{\Gamma(s-1/2)}{2\Gamma(s)} E_{N-1}^c\left(s-\frac{1}{2}; a_2, \dots, a_N; c_2, \dots, c_N\right) + \\
&+ \frac{\pi^s a_1^{-s/2-1/4}}{2\Gamma(s)} \cos(2\pi c_1) \sum_{n_2, \dots, n_N=0}^{\infty} \left[c + \sum_{i=2}^N a_i (n_i + c_i)^2 \right]^{-s/2+1/4} \times \mathcal{A}, \quad (4)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \sum_{n_1=1}^{\infty} n_1^{s-1/2} \mathcal{K}_{s-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi n_1}{\sqrt{a_1}} \sqrt{c + \sum_{i=2}^N a_i (n_i + c_i)^2}\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}} \left(\frac{a_1/\pi^2}{c + \sum_{i=2}^N a_i (n_i + c_i)^2} \right)^{k/2} \zeta\left(k-s+\frac{1}{2}\right) \times \\
&\times \Gamma\left(\frac{2k-2s+1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{2k+2s-1}{4}\right) dk.
\end{aligned}$$

При $\sqrt{a_1/c\pi^2} \ll 1$ для $E_1^c(s; a_1; c_1)$ можно получить асимптотическое равенство:

$$\begin{aligned}
E_1^c(s; a_1; c_1) &= \frac{1}{c^s \Gamma(s)} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{-a_1}{c} \right)^m \zeta(-2m, c_1) \frac{\Gamma(m+s)}{\Gamma(m+1)} + \\
&+ \frac{\Gamma(s-1/2)}{2c^s \Gamma(s)} \sqrt{\frac{\pi c}{a_1}} + \frac{2}{\Gamma(s)} \left(\frac{\pi^2}{a_1 c} \right)^{s/2} \left(\frac{c}{a_1} \right)^{1/4} \cos(2\pi c_1) \times \\
&\times \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}} \left(\sqrt{\frac{a_1}{c}} \frac{1}{\pi} \right)^k \zeta\left(k-s+\frac{1}{2}\right) \times \right. \\
&\times \left. \Gamma\left(\frac{2k-2s+1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{2k+2s-1}{4}\right) dk \right\}. \quad (5)
\end{aligned}$$

Как отмечалось выше, контур $\tilde{C}$ содержит все полюсы подынтегрального выражения.

Исследуем поведение подынтегральной функции на бесконечности для возможного использования теоремы о вычетах. Если $k = \sigma + it$, то оказываются справедливыми следующие оценки [4]:

$$\zeta(k) = O(|t|^{1/2-\sigma} \ln |t|), \quad \sigma \leq 0,$$

$$|\Gamma(k)| = |\Gamma(\sigma + it)| = \sqrt{2\pi} |t|^{\sigma-1/2} \times$$

$$\times \exp\{-\pi |t|/2\} \left(1 + O\left(\frac{1}{|t|}\right)\right), \quad |t| \rightarrow \infty.$$

С учетом приведенных оценок видим, что при $|t| \rightarrow \infty$ подынтегральное выражение в (5) ведет себя следующим образом ($\sigma < 0$, $|t| \rightarrow \infty$):

$$\left(\sqrt{\frac{a_1}{c}} \frac{1}{\pi} \right)^{\sigma} |t|^{\sigma-1/2} \exp\{-\pi |t|\} \ln |t| \rightarrow 0,$$

что позволяет воспользоваться теоремой о вычетах. Заметим, что от интегрального выражения в (5) можно в ряде конкретных случаев избавиться, что требует определенных вычислений, но не представляет сложности.

В качестве примеров приведем некоторые выражения (справедливые в области $|\omega/\pi| < 1$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_0(\omega n) \cong -\frac{\zeta(3)\omega^2}{16\pi^2} + \frac{1}{2} \left[\ln \frac{\omega}{4\pi} + \gamma + \frac{\pi}{\omega} \right] + O(\omega^2),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{K}_1(\omega n)}{n} \cong \frac{\pi^2}{6\omega} - \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{4} \left[\ln 4\pi - \gamma + \frac{1}{2} - \ln \omega \right] + \frac{\zeta(3)\omega^2}{64\pi^2} + O(\omega^2), \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{K}_2(\omega n)}{n^2} \cong \frac{\pi^4}{45\omega^2} - \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi\omega}{6} + \frac{\omega^2}{16} \left[\ln \frac{\omega}{4\pi} + \gamma + 1 \right] - \frac{\zeta(3)\omega^4}{384\pi^2} + O(\omega^4);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} \mathcal{K}_{2r}(\omega n) \cong \frac{\pi(4r-1)!!}{2\omega^{2r+1}} - \frac{2^{2r-2}(2r-1)!}{\omega^{2r}} + O(1) \quad (r=1, 2, 3, \dots).$$

Приведенные суммы используются при вычислении термодинамических потенциалов глюонов, кварков, $W^{\pm}$ - и Z^0 -бозонов в постоянных магнитных и хромагнитных полях, поляризованного и массового операторов при конечной температуре [6, 17–20], обсуждении эффекта Казимира [21, 22], а также при рассмотрении теоретико-полевой модели Швингера при конечной температуре [23], которая, как известно, является точно решаемой.

Прежде чем переходить к рассмотрению конкретной физической модели, отметим следующее свойство функций $E_1^c(s; a_1; c_1)$. Из явного выражения, определяемого соотношением (5), видно, что эта функция является осциллирующей по параметру c_1 из-за наличия множителя $\cos 2\pi c_1$ при третьем слагаемом, а также вследствие свойств дзета-функции Римана $\zeta(-2m, c_1)$ [4]. Заметим, что это свойство лежит в основе эффекта ван Альфена—де Гааза [24].

В качестве примера применения полученных сумм проведем рассмотрение модели Гросса—Невье при конечной температуре и при наличии однородного постоянного магнитного поля. Ранее такая модель обсуждалась в ряде работ [25–27]. В отличие от упомянутых работ мы продемонстрируем применение изложенной техники (с учетом наличия поля) и отметим существование «эффекта вычитания», который имеет место в высокотемпературном пределе, а также получим весьма простые выражения для эффективного потенциала модели, допускающие ее детальный анализ.

Лагранжиан модели Гросса—Невье имеет вид [28]

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^N (\bar{\psi}_k i \partial \psi_k + \sigma \bar{\psi}_k \psi_k) - N \sigma^2 / 2g, \quad (8)$$

где $\sigma = (\bar{\psi} \psi)$, а сам лагранжиан инвариантен относительно преобразований $\psi_k \rightarrow \gamma^5 \psi_k$ и $\sigma \rightarrow -\sigma$. С учетом спектра энергий фермионов в магнитном поле [29, 30] несложно написать эффективный потенциал модели (в пространстве $(2+1)$) в $1/N$ -разложении:

$$\frac{1}{N} V(\sigma, eH) = \frac{\sigma^2}{2g} + 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \times \\ \times \left[\exp \left\{ -s(\sigma^2 + p_0^2 + p_1^2) \frac{\text{th}(seH)}{seH} \right\} - \exp \{-s\} \right]. \quad (9)$$

Переход к конечной температуре осуществляется обычным образом (путем введения мацубаровских частот и соответствующей замены интеграла на сумму по этим частотам). С учетом свойств тэта-функций, которые возникают в результате проведения этой процедуры, получим

$$\frac{1}{N} V = \frac{1}{N} V(\sigma, eH) + \frac{1}{N} V(\sigma, eH, T). \quad (10)$$

Первое слагаемое в (10) представляет собой эффективный потенциал при нулевой температуре. Явное выражение для этого слагаемого таково:

$$\frac{1}{N} V(\sigma, eH) = \frac{\sigma^2}{2g} + \frac{\sigma^3}{3\pi} + \frac{eH}{4\pi^{3/2}} \int_0^\infty s^{-3/2} \text{cth}(seH) \exp\{-s\sigma^2\} ds = \\ = \frac{\sigma^2}{2g} + \frac{\sigma^3}{3\pi} - 2 \sqrt{\pi eH} \frac{eH}{\sqrt{2\pi}} \zeta \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2eH} \right) + \frac{|\sigma| eH}{2\pi}. \quad (11)$$

Из (11) видно, что эффективный потенциал является периодической функцией параметра $\sigma^2/(2eH)$ (при $\sigma^2/(2eH) \in (0, 1]$ (см., напр., [4])). Для нахождения «массы» необходимо написать уравнение стационарности, которое в нашем случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{N} V(\sigma, eH) \right) = \sigma \left\{ \frac{1}{g} + \frac{\sigma}{\pi} - \frac{eH}{2\pi} \left[\zeta \left(\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2eH} \right) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{eH}} - \frac{1}{\sigma} \right] \right\} = \\ = \sigma \left\{ \frac{1}{g} + \frac{\sigma}{\pi} - \frac{\sigma}{2\pi^{3/2}} \sum_{n=1}^m B_{2n} \frac{\Gamma(2n-1/2)}{\Gamma(2n+1)} \left(\frac{2eH}{\sigma^2} \right)^{2n} + \right. \\ \left. + O \left(\left(\frac{2eH}{\sigma^2} \right)^{2m+2} \right) \right\} = 0. \quad (12)$$

Решение (12) несложно построить графически, в частности на ЭВМ [8, 25, 26].

Для температурной части, входящей в выражение (10), имеет место следующее явное выражение:

$$\frac{1}{N} V(\sigma, eH, T) = -2 \left(\frac{2\sigma}{\pi\beta} \right)^{3/2} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \left(\frac{eH\beta}{2\pi\sigma} \right)^{2l} \zeta(2l) \times \\ \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{2l-3/2} \mathcal{K}_{2l-3/2}(n\sigma\beta) \right). \quad (13)$$

Как отмечалось выше, температурная часть содержит характерную сумму функций Макдональда, поэтому можно воспользоваться процедурой суммирования [12]. Вначале рассмотрим низкотемпературный предел $\sigma\beta \gg 1$ эффективного потенциала модели Гросса—Невье. При этом получим

$$\frac{1}{N} V(\sigma, eH, T) = \frac{\sigma^2}{2g} + \frac{\sigma^3}{3\pi} - \frac{4\sigma}{\beta^2} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \left(\frac{eH\beta}{2\pi\sigma} \right)^{2l} \zeta(2l) \times \\ \times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{2l-2} \exp\{-n\sigma\beta\} \left[1 + \frac{2l^2 - 3l - 1}{n\sigma\beta} + O\left(\frac{1}{n\sigma\beta}\right) \right] \right\}. \quad (14)$$

Из (14) видно, что при $T \rightarrow 0$ выражение для $\frac{1}{N} V(\sigma, eH, T) - \frac{\sigma^2}{2g}$ в главном асимптотическом приближении стремится к нулю, как $T^2 \sigma \exp\{-\sigma/T\}$. В высокотемпературном пределе $\sigma\beta \ll 1$ из (14) с учетом суммирования найдем следующее выражение:

$$\frac{1}{N} V(\sigma, eH, T) = \frac{\sigma^2}{2g} + \frac{\sigma^3}{3\pi} - \left(\frac{\sigma}{\pi\beta} \right)^{3/2} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \left(\frac{eH\beta}{\pi\sigma} \right)^{2l} \zeta(2l) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_C [1 - 2^{s+1/2-2l}] \zeta\left(s + \frac{3}{2} - 2l\right) \times \right. \\ \times \Gamma\left(\frac{2s-4l+3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{2s+4l-3}{4}\right) (\sigma\beta)^{-s} ds \Big\} = \\ = \frac{\sigma^2}{2g} + \frac{\sigma^3}{3\pi} - \frac{3\zeta(3)}{2\pi} \beta^{-3} + \frac{\sigma^2}{\beta} \frac{\ln 2}{\pi} + \frac{\sigma^4 \beta}{16} + \frac{(eH)^2 \beta}{24\pi} + \dots \quad (15)$$

Совместное рассмотрение (10), (11) и (15) показывает, что слагаемые, содержащие полевую зависимость в (11), взаимно уничтожились с соответствующими слагаемыми в (15) — «эффект вычитания» в высокотемпературном пределе. Этот эффект, по-видимому, может быть объяснен как частичное восстановление симметрии в системе в пределе высоких температур. Уравнение стационарности из (15) получается тривиальным дифференцированием по параметру σ :

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{N} V(\sigma, eH, T) \right) = \sigma \left\{ \frac{1}{g} + \frac{\sigma}{\pi} + \frac{2 \ln 2}{\pi\beta} + \frac{\sigma^2 \beta}{4} + \dots \right\}. \quad (16)$$

Как видно из структуры выражения (16), затруднений в его решении не возникает.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hawking W.//Comm. Math. Phys. 1977. 55. P. 133. [2] Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.//УФН. 1986. 150, № 4. С. 489. [3] Dittrich W., Reuter M. Effective Lagrangians in Quantum Electrodynamics. Berlin, 1984. [4] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М., 1965. [5] Скалозуб В. В.//Адронная материя в экстремальных условиях. Киев, 1986. С. 205. [6] Вшивцев А. С., Лоскутов Ю. М., Скобелев В. В.//ТМФ. 1990. 84, № 3. С. 372. [7] Тернов И. М., Борисов А. В., Жуковский В. Ч. Квантовые процессы в сильном внешнем поле. М., 1989. [8] Криве И. В., Нафтулин С. А.//Ядерная физика. 1991. 54, № 5. С. 1482. [9] Агаев Ш. М., Вшивцев А. С., Жуковский В. Ч., Семенов О. Ф.//Изв. вузов, Физика. 1985. 28, № 1. С. 78. [10] Фрадкин Е. С.//Тр. ФИАН. 1965. 29. С. 7. [11] Dolan L., Jackiw R.//Phys. Rev. 1974. D9, N 12. P. 3320. [12] Вшивцев А. С., Перес-Фернандес В. К.//ДАН СССР. 1989. 309, № 1. С. 70. [13] Actor A.//Nucl. Phys. 1986. B265(FS15). P. 689. [14] Weldon B.//Nucl. Phys. 1986. B270(FS16). P. 79. [15] Elizalde E.//J. Math. Phys. 1990. 31. P. 170; J. Phys. 1989. A22. P. 931. [16] Вшивцев А. С., Жуковский В. Ч., Магницкий Б. В.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1990. 31, № 4. С. 22. [17] Вшивцев А. С., Жуковский В. Ч., Старинец А. О. Препринт № 32. Томского гос. ун-та. Томск, 1990. [18] Вшив-

щев А. С., Жуковский В. Ч., Старинец А. О. Препринт № 44 Томского гос. ун-та, Томск, 1991. [19] Вшивцев А. С., Жуковский В. Ч., Магницкий Б. В., Татаринцев А. В. Поляризационный оператор фотона в магнитном поле при конечной температуре: Препринт НИИЯФ МГУ № 89—21/98. М., 1989. [20] Жуковский В. Ч., Мидодашвили П. Г., Эминов П. А. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1985. 26, № 3. С. 8. [21] Elizalde E., Romeo A. // Amer. J. Phys., 1991. 59. P. 711. [22] Мостепаненко В. М., Трунов Н. Н. Эффект Казимира и его приложения. М., 1990. [23] Sach I., Wipf A. // Helv. Phys. Acta. 1992. 65. P. 633. [24] Шенберг Д. Магнитные осцилляции в металлах. М., 1986. [25] Клименко К. Г. // ТМФ. 1992. 90, № 1. С. 3. [26] Клименко К. Г. // ТМФ. 1991. 89, № 2. С. 211. [27] Trembl T. F. // Phys. Rev. 1989. D39, N 2. P. 679. [28] Gross D., Neveu A. // Phys. Rev. 1974. D10, N 10. P. 3235. [29] Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч. Квантовая механика. М., 1979. [30] Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М., 1974.

Поступила в редакцию
09.04.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1994. Т. 35, № 1

УДК 523.034.43

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ ВИНТОВЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ И ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНОЙ

Ли Фан Юй*), Луо Джун*)
(ГАНШ)

Изучено взаимодействие между гравитационной волной и винтовыми дислокациями. Получены выражения для действующей силы, индуцированной гравитационной волной, в уравнениях фононной модели.

В работе [1] мы рассмотрели эффект гравитационно-волнового возмущения в фононном пространстве без дислокаций и дисклинаций с модулем сдвига, имеющим центрально-радиальную неоднородность. В данной статье мы рассмотрим гравитационно-волновое возмущение фононного пространства с линейными винтовыми дислокациями в однородной и изотропной упругой среде. Как показано в работе [2], кристаллическая решетка такой среды будет скрученной, но не будет искривленной, так как параметры кручения $H=1$, $L \neq 0$. Таким образом, задача о взаимодействии между гравитационной волной и винтовой дислокацией эквивалентна задаче о гравитационной волне с кручением.

1. Фононные уравнения

Если упругая среда имеет линейную винтовую дислокацию (линия дислокации совпадает с осью z), то пространственный интервал в координатах кристаллической решетки [3]

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + (dz + L d\varphi)^2 = \left(1 + \frac{L^2 y^2}{\rho^4}\right) dx^2 - \frac{2L^2 xy}{\rho^4} dx dy + \\ + \left(1 + \frac{L^2 x^2}{\rho^4}\right) dy^2 - \frac{2Ly}{\rho^2} dx dz + \frac{2Lx}{\rho^2} dy dz + dz^2, \quad (1)$$

где $L/2\pi$ — вектор Бюргерса дислокации.

*) Китай.