ЛИТЕРАТУРА

[1] Брагинский В. Б., Митрофанов В. П., Панов В. И. Системы с малой диссипацией. М., 1981. [2] Бичак И., Руденко В. Н. Гравитационные волны в ОТО и проблемы их обнаружения. М., 1989. [3] Айнбиндер И. М. Шумы радиоприемников. М., 1974. [4] Филатов Г. А., Баев Е. Ф., Цымбалюк В. С. Низкочастотные механические фильтры. М., 1974. [5] Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Т. 1. М., 1974. [6] Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. М., 1972. [7] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М., 1981. [8] Воронцов Ю. И. Теория и методы макроскопических измерений. М., 1989.

Поступила в редакцию
18.09.92
После переработки
17.03.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1994. Т. 35, № 1

УДК 530.145

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ «ТРАНСФОРМАТОРА СМЕЩЕНИЯ» ПРИ ОБНАРУЖЕНИИ ИМПУЛЬСА СИЛЫ

А. В. Сырцев, Ф. Я. Халили
(кафедра молекулярной физики и физических измерений)

Найдена предельная чувствительность «трансформатора смещения» при слежении за координатой его второго осциллятора. Рассмотрен вопрос об улучшении чувствительности при измерении двумерной схемой по отношению к одномерной. Получены выражения для максимальной температуры и времени релаксации в первом осцилляторе.

В настоящее время, в частности в связи с задачей обнаружения гравитационных волн, весьма актуальной представляется проблема повышения чувствительности датчиков малых импульсов силы. В стандартном варианте такой датчик состоит из пробного объекта (механического осциллятора или свободной массы) и схемы, измеряющей координату пробного объекта [1]. Для резонансных датчиков (с пробным осциллятором) известным методом повышения чувствительности является использование промежуточного осциллятора с массой m, существенно меньшей массы основного осциллятора M и с той же собственной частотой ω_0 (рис. 1). Данная схема получила название «трансформатор смещения». Как легко показать, в этой схеме любая вариация амплитуды колебаний основного осциллятора за период биений перекачивается во второй осциллятор, увеличиваясь в $(M/m)^{1/2}$ раз, что и обеспечивает выигрыш в чувствительности.

Задача о чувствительности датчиков малых сил, использующих многомодовые пробные системы, была детально рассмотрена в работе [2]. В этой работе, однако, учитывались только флуктуации измеряющей схемы, сама же пробная система предполагалась идеальной. Целью настоящей работы является нахождение условий, когда система обнаружения с «трансформатором смещения» дает выигрыш в чувствительности с учетом как флуктуаций измеряющей схемы, так и диссипации и шумов в пробной системе.

Известно [3—5], что фундаментальные флуктуации измерителя координаты можно свести к двум: 1) флуктуационной силе, действую-

щей на пробную систему, и 2) аддитивному шуму, добавляемому к входному сигналу. Произведение спектральных плотностей этих флуктуаций — S_F и S_x соответственно — удовлетворяет неравенству [4]:

$$S_F S_x \geqslant \hbar^2/4. \tag{1}$$

В данной работе рассмотрен простейший случай, когда шумы измерителя некоррелированы между собой, а их спектральные плотности S_F и S_x, а также спектральные плотности собственных шумов основного и промежуточного осцилляторов — S_1 и S_2 соответственно — не зависят от частоты в интересующем нас диапазоне частот.

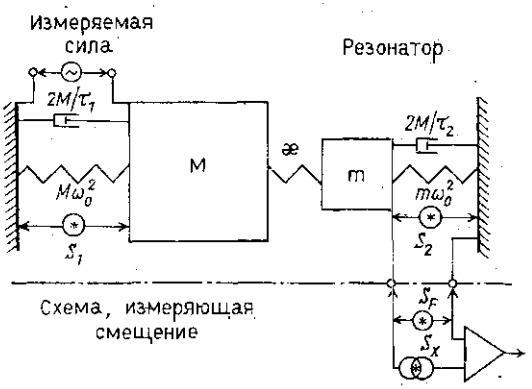

Рис. 1. Модель «трансформатора смещения» — система связанных осцилляторов

Выигрыш в чувствительности, даваемый «трансформатором смещения», удобно описывать отношением F/F_0, где F — величина минимального обнаружимого импульса силы, F_0 — та же величина для системы обнаружения без промежуточного осциллятора (но с теми же параметрами основного пробного осциллятора и измерителя). Эта величина вычислена в приложении А. При расчете были сделаны следующие предположения, характерные для реальных условий гравитационно-волнового эксперимента:

1) обнаружимая сила представляет собой короткий, длительностью $\tau \ll \omega_0^{-1}$, импульс;

2) времена релаксации обоих осцилляторов τ_1 и τ_2, а также период биений $2\pi/\omega_b$ существенно превышают период собственных колебаний $2\pi/\omega_0$.

Необходимо отметить, что в существенно квантовом случае, когда влиянием диссипации и флуктуаций в осцилляторах можно пренебречь по сравнению с флуктуациями измеряющей схемы, выигрыш в чувствительности отсутствует:

$$F = F_0 = \sqrt{M\omega_0\hbar}, \tag{2}$$

что соответствует стандартному квантовому пределу чувствительности.

В дальнейшем будем рассматривать только существенно классический случай — когда силовое действие прибора на систему осцилляторов мало относительно влияния диссипации и собственных шумов в осцилляторах, т. е.

$$S_F \ll M^2\omega_0^2 S_x/\tau_1^2, \quad S_F \ll m^2\omega_0^2 S_x/\tau_2^2. \tag{3}$$

В настоящее время параметры гравитационных антенн таковы, что при расчетах их чувствительности можно положить $\tau_1 \to \infty$, $\tau_2 \to \infty$ (но $S_1 \neq 0$, $S_2 \neq 0$). В этом случае (см. приложение Б) отношение F/F_0 примет вид

$$F/F_0 = C_1 (m/M)^{1/4}. \tag{4}$$

Значение C_1 определяется двумя параметрами: $\eta_1 = \frac{S_1}{mM\omega_0^2\omega_b^2 S_x}$ и $\eta_2 = \frac{S_2}{m^2\omega_0^2\omega_b^2 S_x}$ (при этом $C_1 = 1$, если $S_1 = S_2 = 0$, и $C_1 > 1$ при всех остальных значениях S_1 и S_2). Область значений этих параметров, где возможно измерение с улучшением чувствительности в $C_1[m/M]^{1/4}$ раз, представлена на рис. 2. Здесь каждому значению C_1 соответствует одна кривая

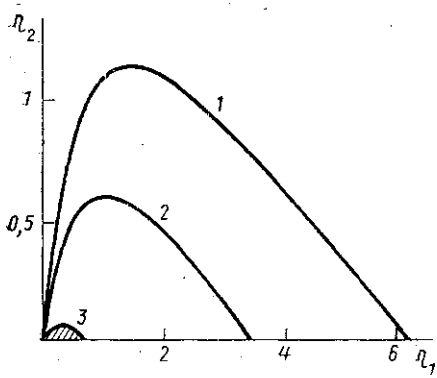

Рис. 2

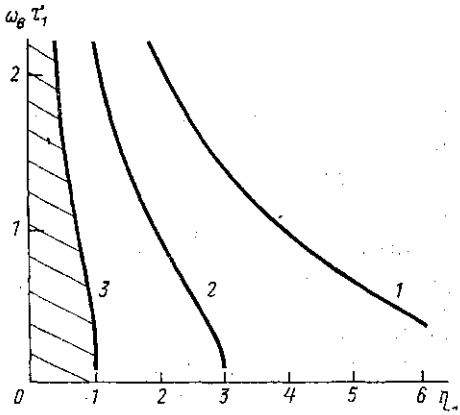

Рис. 3

Рис. 2. Семейство кривых, определенных соотношением (Б1), при $C_1 = 1{,}4$ (*1*); 1,3 (*2*); 1,1 (*3*)

Рис. 3. Семейство кривых, определенных соотношением (В1), при $C_2 = \sqrt[4]{8}$ (*1*), $\sqrt[2]{2}$ (*2*), $\sqrt[4]{2}$ (*3*)

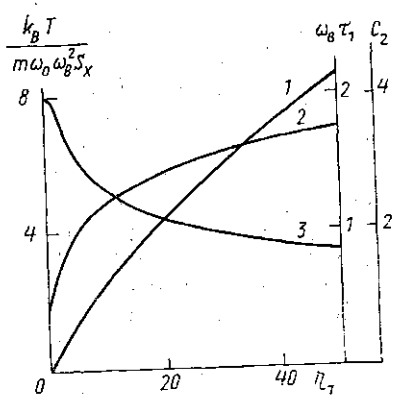

Рис. 4

Рис. 4. Графики зависимостей (В2)—(В4) максимальной температуры первого осциллятора (*1*), константы C_2, определяющей измерение с $F/F_0 = C_2[m/M]^{1/2}$ (*2*), и времени релаксации первого осциллятора (*3*) от спектральной плотности шума S_1 ($\eta_1 \equiv S_1/(mM\omega_0^2\omega_b^2 S_x)$)

семейства, которая ограничивает область значений параметров S_1 ($\eta_1 \equiv S_1/(mM\omega_0^2\omega_b^2 S_x)$) и S_2 ($\eta_2 \equiv S_2/(m^2\omega_0^2\omega_b^2 S_x)$), где возможно измерение с погрешностью $F/F_0 = C_1[m/M]^{1/4}$. Так, при попадании значений параметров η_1 и η_2 в заштрихованную область возможно измерение с погрешностью $F/F_0 = 1{,}1[m/M]^{1/4}$. Аналогичные области можно изобразить для других значений константы C_1.

Для детектора с $M \approx 10^6$ г, $m \approx 1$ г, $\omega_0 \approx 6 \cdot 10^3$ с$^{-1}$, $\omega_b \approx 60$ с$^{-1}$, $\tau_1 \approx 100$ с, $\tau_2 \approx 1$ с, $S_x \approx 10^{-33}$ см^2/Гц (что соответствует чувствительности измеряющей схемы $3 \cdot 10^{-17}$ см/Гц$^{1/2}$) с эффективной шумовой температурой первого осциллятора $T \approx 10^{-2}$ К улучшение чувствительности в $3[m/M]^{1/4}$ раз возможно, если значение спектральной плотности S_2 не будет превышать 10^{-22} дин^2/Гц (что соответствует эффективной шумовой температуре второго осциллятора 10^{-6} К).

Возникает вопрос, при каких значениях параметров «трансформатора смещения» возможно улучшение чувствительности, близкое к $[m/M]^{1/2}$. Рассмотрим случай идеального второго осциллятора. Область значений параметров τ_1 и S_1, при которых возможен выигрыш в чувствительности в $C_2[m/M]^{1/2}$ раз ($C_2>1$, $C_2\approx 1$) для нескольких значений C_2, представлена на рис. 3 (см. приложение В). Каждая кривая семейства ограничивает область значений параметров $\eta_1 \equiv S_1/(mM\omega_0^2\omega_b^2 S_x)$ и τ_1, где возможно измерение с погрешностью $F/F_0=C_2[m/M]^{1/2}$. Измерение с $F/F_0=2^{1/4}[m/M]^{1/2}$ возможно, если значения параметров η_1 и τ_1 принадлежат заштрихованной области.

Очень важным с практической точки зрения представляется вопрос об улучшении чувствительности детектора с собственными шумами в первом осцилляторе, спектральная плотность которых задается формулой Найквиста

$$S_1 = 4k_B TM/\tau_1. \tag{5}$$

Здесь k_B — постоянная Больцмана, T — температура первого контура резонатора. В этом случае можно рассчитать максимальную температуру первого осциллятора T, время τ_1, а также значение C_2, при которых возможно измерение с погрешностью $F/F_0=C_2[m/M]^{1/2}$ для различных значений S_1. Эти зависимости представлены на рис. 4. Они позволяют по одному заранее известному параметру из набора T, C_2, τ_1, S_1 рассчитать три остальных параметра детектора для организации измерения с погрешностью $F/F_0=C_2[m/M]^{1/2}$. Фиксация одного из этих четырех параметров резонатора полностью определяет значения остальных трех (т. е. всю систему параметров данной схемы эксперимента).

Так, для детектора гравитационных волн конструкции Вебера с массой резонатора 10^6 г, с собственной частотой 1 кГц, со спектральной плотностью $S_x \approx 10^{-33}$ см²/Гц, улучшение чувствительности в $2[m/M]^{1/2}$ раз с помощью промежуточного идеального осциллятора с массой 1 г, с собственной частотой, равной собственной частоте первого осциллятора, и с частотой биений 10 Гц при пренебрежимо малом значении спектральной плотности S_F возможно, только если время релаксации первого осциллятора будет не менее 10^{-2} с, а температура резонатора — не более 10^{-8} К.

Таким образом, достижение выигрыша в чувствительности детектора в $(m/M)^{1/4}$ раз при использовании двухконтурной схемы вместо одноконтурной возможно только при существенном понижении шумовой температуры осцилляторов (до 10^{-2} К для первого осциллятора и до 10^{-6} К для второго). Достижение выигрыша в чувствительности в $(m/M)^{1/2}$ раз на современном уровне экспериментальной техники не представляется возможным.

Приложение А. Отношение минимальных обнаружимых импульсов сил для систем А и В.

Одномерная система описывается уравнением

$$M\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{2dx_1}{\tau_1\,dt}+\omega_0^2x_1\right)=F(t)+f_1(T_1,\ t)+F_d(t),$$

где x_1 — обобщенная координата пробного осциллятора, собственный шум в нем — $f_1(T_1, t)$ — характеризуется спектральной плотностью S_1, а флуктуационное влияние измерителя $F_d(t)$ — S_F.

Отношение сигнала к шуму для этой системы:

$$\left(\frac{s}{n}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|F(\omega)|^2\,d\omega}{S_1(\omega)+S_F(\omega)+S_x(\omega)|K_1(\omega)|^{-2}},$$

где

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp\{i\omega t\}\, dt,$$

$$K_1(\omega) = \left[M \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{2i\omega}{\tau_1} \right) \right]^{-1}.$$

При всех перечисленных выше предположениях получим выражение для минимального обнаружимого данной системой импульса силы:

$$F_0 = \left[4S_x M^2 \omega_0^2 \left(S_F + S_1 + \frac{4S_x M^2 \omega_0^2}{\tau_1^2} \right) \right]^{1/4}.$$

Для двумерной системы

$$M \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{2dx_1}{\tau_1\, dt} + \omega_0^2 x_1 \right) = F(t) + f_1(T_1, t) + \varkappa x_2,$$

$$m \left(\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{2dx_2}{\tau_2\, dt} + \omega_0^2 x_2 \right) = F_d(t) + f_2(T_2, t) + \varkappa x_1,$$

где x_2 — обобщенная координата промежуточного осциллятора, собственный шум в нем — $f_2(T_2, t)$ — характеризуется спектральной плотностью S_2, $\varkappa$ — коэффициент связи контуров.

Минимальный импульс силы для этой системы составит:

$$F = \left[16 m^2 M^2 \omega_b^2 \omega_0^4 S_x^2 A \left(B + \frac{1}{2} A^{1/2} \right) \right]^{1/4},$$

где

$$A = 1 + \eta_1 + \frac{4}{\omega_b^2 \tau_1^2} \eta_F + \frac{4m^2}{M^2} \eta_2 + \frac{8}{\omega_b^2 \tau_1 \tau_2} + \frac{16}{\omega_b^4 \tau_1^2 \tau_2^2},$$

$$B = \frac{1}{\omega_b^2 \tau_1^2} + \frac{1}{\omega_b^2 \tau_2^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \eta_F + \frac{m^2}{4M^2} \eta_2.$$

Здесь приняты обозначения:

$$\omega_b \equiv \frac{\varkappa}{\sqrt{Mm}\, \omega_0},$$

$$\eta_1 \equiv \frac{S_1}{mM\omega_0^2 \omega_b^2 S_x},$$

$$\eta_2 \equiv \frac{S_2}{m^2 \omega_0^2 \omega_b^2 S_x},$$

$$\eta_F \equiv \frac{S_F}{m^2 \omega_0^2 \omega_b^2 S_x}.$$

Далее будем рассматривать отношение

$$\frac{F}{F_0} = \left[\frac{m^2}{M^2} \frac{A \left(B + \frac{1}{2} A^{1/2} \right)}{B_0} \right]^{1/4}, \qquad \text{(A1)}$$

где

$$B_0 = \frac{1}{\omega_b^2 \tau_1^2} + \frac{m^2}{4M^2} \eta_F + \frac{m}{4M} \eta_1.$$

Следует заметить, что хотя «трансформатор смещения» и характеризуется десятью параметрами: M, m, ω_0, $\varkappa$ (или ω_b), τ_1, τ_2, S_1, S_2, S_F и S_x (рис. 1), для описания улучшения чувствительности достаточно лишь шести: $\frac{m}{M}$, $\frac{1}{\tau_1 \omega_b}$, $\frac{1}{\tau_2 \omega_b}$, η_1, η_2, η_F.

Приложение Б. Область значений S_1 и S_2 при организации измерения с погрешностью $F/F_0=C_1(m/M)^{1/4}$.

При $S_F=0$, τ_1 и $\tau_2\to\infty$ общая формула (А1) примет вид

$$\frac{F_i}{F_0}=\left[\frac{m}{M}\,\frac{1+\eta_1}{\eta_1}\,[\eta_2+2(1+\eta_1)^{1/2}-2]\right]^{1/4}.$$

Представляя это выражение в виде $F/F_0=C_1(m/M)^{1/4}$, получим

$$\eta_2=\frac{C_1^4\eta_1}{1+\eta_1}+2-2(1+\eta_1)^{1/2}. \qquad (Б1)$$

Семейство кривых (Б1) для нескольких значений C_1 представлено на рис. 2.

Приложение В. Область значений параметров τ_1 и S_1 при организации измерения с погрешностью $F/F_0=C_2(m/M)^{1/2}$.

При $S_F=0$, $\tau_2\to\infty$ и $S_2=0$ общая формула (А1) примет вид

$$\frac{F}{F_0}=\left[\frac{m^2}{M^2}\,\frac{1+\eta_1}{1/(\omega_b^2\tau_1^2)+\eta_1}\left[\frac{1}{\omega_b^2\tau_1^2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1+\eta_1)^{\frac{1}{2}}\right]\right].$$

Для реализации измерения с погрешностью $F/F_0=C_2(m/M)^{1/2}$ необходимо, чтобы

$$\tau_1=\frac{1}{\omega_b}\left[\frac{C_2^4-1-\eta_1}{(1+\eta_1)^{3/2}-(1+\eta_1)}\right]^{1/2}. \qquad (В1)$$

На рис. 3 представлены графики этой функции при различных значениях константы C_2.

Из условия касания графиков функций (В1) и $\tau_1=4k_bTM/S_1$ получим выражение для максимальной температуры первого осциллятора, при которой возможно измерение с погрешностью $F/F_0=C_2(m/M)^{1/2}$:

$$T=\frac{m\omega_0^2\omega_bS_x}{4k_B\eta_1}\left[\frac{1}{\eta_1}[(1+\eta_1)^{3/2}-(1+\eta_1)]-\frac{3}{4}(1+\eta_1)^{1/2}+\frac{1}{2}\right]^{-1/2}. \qquad (В2)$$

При этом константа C_2 связана с η_1 выражением

$$C_2=\left[\frac{(1+\eta_1)^{3/2}-(1+\eta_1)}{(2/\eta_1)[(1+\eta_1)^{3/2}-(1+\eta_1)]-(3/2)(1+\eta_1)^{1/2}+1}+1+\eta_1\right]^{\frac{1}{4}}. \qquad (В3)$$

Параметр релаксации τ_1 связан с η_1 соотношением

$$\tau_1=\frac{1}{\omega_b}\left[\frac{1}{\eta_1}[(1+\eta_1)^{3/2}-(1+\eta_1)]-\frac{3}{4}(1+\eta_1)^{1/2}+\frac{1}{2}\right]^{-1/2}. \qquad (В4)$$

Выражения (В2)—(В4) позволяют по одному заранее известному параметру из набора: T, C_2, τ_1, S_1 рассчитать три остальных параметра детектора для организации измерения с погрешностью $F/F_0=C_2(m/M)^{1/2}$. Графики функций (В2)—(В4) представлены на рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Брагинский В. Б.//УФН. 1988. **156**, № 1. С. 93. [2] Price J. C.//Phys. Rev. 1987. **D36**. P. 3555. [3] Giffard R. F.//Phys. Rev. 1976. **D14**. P. 2478. [4] Воронцов Ю. И., Халили Ф. Я.//Радиотехн. и электроника. 1982. **27**, № 12. С. 2392. [5] Воронцов Ю. И. Теория и методы макроскопических измерений. М., 1989.

Поступила в редакцию
24.03.93