ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12:550.831

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ ЛОРЕНЦ-КОВАРИАНТНОЙ НЕМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

А. А. Власов
(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Предложен вариант жизнеспособной неметрической релятивистской нелинейной скалярно-векторной теории.

1. Как известно [1, 2], способы построения релятивистской теории гравитации можно разделить на метрические и неметрические. В первом случае взаимодействие гравитации с веществом основывается на принципе геометризации, по которому движение вещества под воздействием гравитационного поля можно свести к «свободному» движению в эффективном искривленном пространстве-времени, создаваемом гравитационным полем. Другими словами, вещество в метрических теориях реагирует только на метрику искривленного пространства. Все отличие метрических теорий друг от друга тогда сводится к способу генерации веществом и гравитационным полем искривленного пространства. Так, в частности, строятся как общая теория относительности (ОТО), так и релятивистская теория гравитации (РТГ). Универсальность описания взаимодействия вещества с гравитационным полем в метрических теориях накладывает, однако, жесткие ограничения, как доказывается в постньютоновском формализме [1, 2], на способ генерации веществом гравитационного поля, т. е. на форму теории.

Во втором случае неметрический подход к построению теории гравитации не предполагает существования такого универсального метода введения взаимодействия, как искривленное пространство. Поэтому, с одной стороны, неметрические теории не имеют жестких ограничений на форму, как метрические теории, с другой — в силу отсутствия универсальности описания взаимодействия неметрические теории должны объяснять по отдельности все имеющиеся гравитационные эксперименты. Некоторые примеры неметрических теорий гравитации можно найти, например, в [3, 4].

Иногда выдвигается предположение (гипотеза Шиффа) [2, 3], что жизнеспособная (т. е. удовлетворяющая всем известным на сегодня гравитационным экспериментам) теория гравитации должна быть с необходимостью метрической. Но строгое доказательство этого предположения отсутствует. Более того, в данной работе предлагается способ построения неметрической теории гравитации, являющейся на сегодня жизнеспособной. Ее можно назвать феноменологической скалярно-векторной релятивистской теорией тяготения (ФТТ).

2. Исходным пунктом построения ФТТ является лагранжиан частицы с массой m_0, взаимодействующей с центрально-симметричным статическим полем тяготения. Как следует из гравитационных экспериментов в Солнечной системе (когда в требуемом приближении планеты и другие тела Солнечной системы можно считать точечными телами, движущимися в статическом сферически-симметричном поле тяготения Солнца), вид лагранжиана частицы в постньютоновском приближении должен быть таким (в единицах $G=c=1$) [2]:

$$L_0 = m_0 [-\sqrt{1-v^2} + m/r - (m/r)^2/2 + 3v^2 (m/r)/2], \quad (1)$$

где v — скорость частицы, r — ее расстояние до Солнца.

Лагранжиан (1) приводит к правильным уравнениям движения частицы в постньютоновском приближении в поле статического центра тяготения массы m.

Будем считать, что тяготение описывается как скалярным полем φ, так и 4-векторным B^i, для которых источниками являются (в «точечном» приближении) соответственно скалярная плотность масс $\rho = \sum_a m_a \delta (r - R_a (t)) ds/dt$ и 4-вектор сохраняющейся плотности тока масс $g^k = \rho u^k$, $u^k = dx^k/ds$, ds — интервал пространства Минковского с сигнатурой $(+ - - -)$. Тогда релятивистски-инвариантный лагранжиан как полей тяготения, так и вещества возьмем в простейшем виде:

$$L = \alpha_1 \partial_p \varphi \partial^p \varphi/(8\pi) + \beta_1 \partial_p B_q \partial^p B^q/(8\pi) + \alpha_2 \rho U (\varphi) - \rho + \beta_2 g_k B^k, \quad (2)$$

где $U (z) = z + O (z^2)$, $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$ — произвольные постоянные.

Уравнения для полей тяготения, соответствующие лагранжиану (2), просты:

$$\Box \varphi = 4\pi\rho \frac{dU}{d\varphi} \frac{\alpha_2}{\alpha_1}; \; \partial_p B^{pi} = 4\pi g^i \frac{\beta_2}{\beta_1}. \quad (3)$$

Для того чтобы добиться совпадения лагранжиана (2) с лагранжианом (1), достаточно найти в требуемом приближении решения (3) для статического центра тяготения массы m:

$$\varphi = (\tilde{\alpha}_2/\alpha_1) (m/r) + \varphi_0, \; B^0 = (\beta_2/\beta_1) (m/r) + b_0, \; \mathbf{B} = 0,$$

где φ_0 и b_0 — космологические значения гравитационных полей в окрестности Солнечной системы, которые с требуемой точностью можно считать постоянными, подставить их в (2) и затем потребовать выполнения следующих соотношений:

$$\frac{(\tilde{\alpha}_2)^2}{\alpha_1} + \frac{(\beta_2)^2}{\beta_1} = \gamma, \; -\frac{(\tilde{\alpha}_2)^2}{2\alpha_1} = \frac{3}{2}\gamma, \; b \frac{(\tilde{\alpha}_2)^3}{(\alpha_1)^2} = -\frac{1}{2}\gamma, \quad (4)$$

где $\gamma = 1 - \alpha_2 U (\varphi_0)$, $\tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 U' (\varphi_0)$, $b = U'' (\varphi_0)/(2U' (\varphi_0))$, штрих означает производную по φ.

Для системы точечных частиц, находя постньютоновские решения уравнений (3), получаем лагранжиан, из которого следуют стандартные для ОТО и РТГ постньютоновские уравнения движения произвольной частицы в поле тяготения остальных частиц. Следовательно, предложенная теория правильно описывает все имеющиеся на сегодня гравитационные эксперименты в Солнечной системе (в частности, и для лучей света в приближении геометрической оптики, для чего формально достаточно, рассматривая кванты света как безмассовые частицы, положить в уравнениях движения $\mathbf{v}=1$ и учесть только линейные по массе члены).

3. До сих пор мы рассматривали электрически нейтральные частицы. Взаимодействие гравитации с электромагнитным полем можно построить, исходя из следующего релятивистски-инвариантного лагранжиана:

$$L + L_{EM} \equiv L + \mathfrak{F} (\varphi) \{-j_k A^k - F_{pq} H^{pq}/(16\pi)\}, \quad (5)$$

где F^*_{pq} и H_{pq} — тензоры Максвелла, образованные соответственно из полей (**E**, **B**) и (**D**, **H**), $\mathfrak{F}(\varphi \to \varphi_0) = \gamma + O(\varphi - \varphi_0)$, $j^k = \sum_a e_a u^k \delta(r - R_a(t))\, ds/dt$ — 4-вектор плотности тока заряженных частиц, A^i — электромагнитный 4-потенциал.

Роль гравитации при этом сводится к индуцированию своеобразной среды, в которой протекают электромагнитные процессы, а влияние самой среды описывается «материальными» уравнениями, связывающими тензоры F_{pq} и H_{pq}. Данная идея описания гравитационно-электромагнитных процессов используется в так называемом $TH\varepsilon\mu$-формализме [3, 5]. Там же доказывается, что для статического поля центра тяготения массы m выбор «материальных» уравнений, достаточный как для объяснения всех гравитационных уравнений в Солнечной системе, связанных с прохождением световых сигналов, так и для объяснения лабораторных экспериментов по проверке принципа эквивалентности (эксперименты Хьюза—Дривера и др.), гласящего, что уравнение свободного падения тела, состоящего из совокупности заряженных частиц, в постньютоновском приближении в статическом сферически-симметричном гравитационном поле точечного источника массы m не зависит от структуры тела, должен быть таким:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H},\ \varepsilon \approx \mu \approx 1 + 2m/r + \ldots,$$

для чего можно положить с учетом соотношений (4) и решений уравнений (3)

$$\varepsilon = \varepsilon(\varphi) \approx \mu = \mu(\varphi) \approx 1 + 2\alpha_1 \varphi / \tilde{\alpha}_2 + \ldots. \tag{6}$$

Таким образом, подход (5)—(6) правильно описывает все имеющиеся гравитационно-электромагнитные эксперименты.

Заметим, что релятивистским обобщением «материальных» уравнений могут служить следующие соотношения, напоминающие формулы Минковского в теории электромагнетизма:

$$H^{pq} U_q = \varepsilon F^{pq} U_q,\ F_{pq} U_n + F_{qn} U_p + F_{np} U_q = \mu (H_{pq} U_n + H_{qn} U_p + H_{np} U_q),$$

где $U_q = B_q f(\varphi, B_n B^n)$, $f(\varphi, B_n B^n)$ — произвольная функция.

4. В волновой зоне в силу уравнений (3) справедливо

$$\varphi = (\tilde{\alpha}_2/\alpha_1)\, a(t - r)/r + \ldots,\ B^i = (\beta_2/\beta_1)\, b^i(t - r)/r + \ldots$$

(причем вследствие сохранения 4-плотности тока g^i выполняется условие $b^0 = \dot{\mathbf{b}}\mathbf{n}$), тогда из стандартного определения канонического тензора энергии-импульса и уравнений (4) получаем для интенсивности гравитационного излучения I в волновой зоне следующее соотношение:

$$I = \int dS\, (t_0^\alpha n^\alpha),\ t_0^\alpha n^\alpha = \gamma \{-3(\dot{a})^2 + 4[(\dot{\mathbf{b}}\mathbf{n})^2 - (\dot{\mathbf{b}})^2]\}/(4\pi r^2),$$

т. е. интенсивность гравитационного излучения будет положительно определена только при условии, что $\gamma < 0$ (заметим, что при отсутствии постоянного космологического фона $\gamma = 1$ $(U(\varphi_0 = 0) = 0)$ и знак интенсивности отрицателен, т. е. учет космологического фона является критическим в рассматриваемом подходе). Можно показать, что для двойной гравитационной системы формула для интенсивности излучения будет совпадать с известной формулой Петерса—Мэтьюза [6] при значении $\gamma = -2/9$ и, следовательно, так построенная теория удовлетворяет всем известным на сегодня тестам по двойным звездным системам [7, 8] (монопольный и дипольный вклады в I отсутствуют в силу справедливости постньютоновских законов сохранения для системы гравитационно взаимодействующих тел).

5. Мы рассмотрели вариант теории для точечных тел; обобщение на случай непрерывного пылевого распределения масс производится стандартно. Ковариантные уравнения вещества в гравитационном поле принимают следующий вид:

$$w d/ds\,[u_k] = -\beta_2 B_{ki} u^i + \alpha_2 (\partial_k U - u_k u^i \partial_i U), \tag{7}$$

где $w = 1 - \alpha_2 U$.

Из уравнений (7) следует, что для сферически-симметричной пыли существует точное решение, описывающее ее расширение по «закону Хаббла»

$$\mathbf{v} = \mathcal{H}\mathbf{r},\ \mathcal{H} = \dot{x}/x,\ x = x(t) \tag{8}$$

с точными соотношениями для $x = x(t)$:

$$(\dot{x}/x)^2 = 8m/(3x^3) + \mathrm{const} \tag{9}$$

и плотности:

$$\rho = \mathrm{const}/x^3. \tag{10}$$

Соответствующие гравитационные поля имеют вид

$$1 - \alpha_2 U = \sqrt{1 - v^2},\ \mathbf{H} = 0,\ \mathbf{E} = \mathrm{const} \cdot \mathbf{r}\rho, \tag{11}$$

где $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ — компоненты тензора B_{pq}.

Данные уравнения для различных значений const могут быть разрешены в элементарных функциях и описывают как расширяющееся на бесконечность (const>0), так и осциллирующее (const<0) решения.

Обобщение на случай с давлением производится следующим образом. Лагранжиан пыли, взаимодействующий со скалярным полем, заменяется на лагранжиан $-\gamma e$, где e — новая функция, играющая роль плотности энергии и удовлетворяющая следующим требованиям: при $\varphi = \varphi_0$ она равна $\rho(1 + \Pi)$, где Π — внутренняя энергия, а для случая пыли она должна давать исходное значение.

Требования справедливости постньютоновских уравнений движения накладывают дополнительные условия на соответствующее разложение функции e.

Точное релятивистское уравнение движения вещества принимает вид

$$du^i/ds = \beta_2 u^n B^i_p + (\partial^i - u^i\, d/ds) \ln \Phi,$$

где $\Phi = \gamma\, \partial e/\partial \rho$.

Таким образом, эти решения можно рассматривать как простейшие модели коллапса или как простейшие модели однородной и изотропной вселенной (хорошо известно, что форма закона расширения $\mathbf{v} = \mathcal{H}(t)\mathbf{r}$ сохраняется для каждого сопутствующего наблюдателя). Все эти решения должны удовлетворять условию $v^2 < 1$, которое ограничивает значения рассматриваемого радиуса r в каждый момент времени t, что напоминает ограничение горизонта событий в классической ОТО.

Итак, мы рассмотрели модель неметрической теории, не противоречащей всем известным гравитационным экспериментам и космологическим понятиям. Конечно, можно попытаться построить и другие модели неметрической теории, однако принципиальный факт заключается в том, что *можно* неметрическую теорию сделать жизнеспособной вопреки широко распространенному мнению об обратном. Следовательно, неметрические теории требуют более внимательного и осторожного рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. М., 1977. [2] Уилл К. М. Теория и эксперимент в гравитационной физике. М., 1985; Уилл К. М.//Общая теория относительности. М., 1983. С. 11. [3] Lightman A. P., Lee D. L.//Phys. Rev. 1973. **D8**. P. 364. [4] Whitrow G. J., Morduch G. E.//Vistas in Astronomy/Ed. A. Beer. Pergamon Press, Oxford, 1965. V. 6. P. 1. [5] Ni W. T.//Phys. Rev. Lett. 1977. **38**. P. 301. [6] Will C. M.//Astrophys. J. 1977. **214**. P. 826. [7] Weisberg J. M., Taylor J.//Gen. Relat. and Grav. 1981. **13**. P. 1. [8] Damour T., Taylor J.//Phys. Rev. 1992. **D45**. P. 1840.

Поступила в редакцию
18.11.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1994. Т. 35, № 2

УДК 681.332.2:621.785.52

О НЕСТАЦИОНАРНОМ УПРАВЛЕНИИ ОХЛАЖДЕНИЕМ ПРИ ЗАКАЛКЕ

О. В. Скиданова, В. Б. Гласко
(кафедра математики)

Сформулирована и с помощью регуляризирующих операторов апробирована математическим экспериментом обратная задача управления нестационарным режимом поверхностного охлаждения стальных образцов на предмет получения слоя заданной твердости, переменной по глубине. Обсуждается вопрос о единственности решения задачи управления.

1. Метод математического моделирования широко используется для решения задач управления технологическими процессами [1—3], позволяя раскрыть новые возможности целевой обработки деталей.

В работе [3] рассматривалась задача об управлении охлаждением цилиндрических образцов ($0<r<R$) при поверхностной закалке и предполагалось, что поток охлаждающей жидкости не зависит от времени. В этом случае поток может быть охарактеризован единственным числом — постоянным коэффициентом теплообмена H между поверхностью материала и охлаждающей средой. Эффект охлаждения — получение мартенситной структуры в пределах слоя $R-h\leqslant r\leqslant R$ — характеризуется при этом величиной скорости охлаждения v на нижней границе слоя $(R-h)$. Значение $v_{\text{mid}}=v_{\text{cr}}$ определяет мартенситную структуру в указанном слое и, следовательно, соответствующую твердость T. Задача управления состояла в том, чтобы найти $H=f(v_{\text{cr}}, h)$, и, как показано в [3], полученные оценки H согласуются с экспериментальными данными [4].

В настоящей работе формулируется и решается задача о нестационарном управлении аналогичным процессом $(H=H(t))$, позволяющим получить «тонкую структуру» распределения $v_{\text{mid}}=v_{\text{mid}}(r)$ вблизи поверхности, включающую зону перехода от твердого мартенситного слоя к мягкой сердцевине. Как и в [3],

$$v_{\text{mid}}=(u_1-u_2)/\Delta t, \tag{1}$$

где значения u_s, $s=1, 2$, ограничивают критический интервал температур, включающий точку минимума на термокинетической диаграмме (рис. 1) $t=t(u)$, а $\Delta t=|t_1-t_2|$, где t_s определяется алгоритмически решением относительно t уравнения $u(R-h, t)=\acute{u}_s$, левая часть которого определена при каждом h процедурой решения задачи, дополненной подпрограммой линейной интерполяции.