

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. М., 1977.
[2] Уилл К. М. Теория и эксперимент в гравитационной физике. М., 1985; Уилл К. М. //Общая теория относительности. М., 1983. С. 11. [3] Lightman A. P., Lee D. L. //Phys. Rev. 1973. D8. P. 364. [4] Whitrow G. J., Morduch G. E. //Visitas in Astronomy/Ed. A. Beer. Pergamon Press, Oxford, 1965. V. 6. P. 1.
[5] Ni W. T. //Phys. Rev. Lett. 1977. 38. P. 301. [6] Will C. M. //Astrophys. J. 1977. 214. P. 826. [7] Weisberg J. M., Taylor J. //Gen. Relat. and Grav. 1981. 13. P. 1.
[8] Damour T., Taylor J. //Phys. Rev. 1992. D45. P. 1840.

Поступила в редакцию
18.11.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1994. Т. 35, № 2

УДК 681.332.2:621.785.52

О НЕСТАЦИОНАРНОМ УПРАВЛЕНИИ ОХЛАЖДЕНИЕМ ПРИ ЗАКАЛКЕ

О. В. Скиданова, В. Б. Гласко
(кафедра математики)

Сформулирована и с помощью регуляризирующих операторов апробирована математическим экспериментом обратная задача управления нестационарным режимом поверхностного охлаждения стальных образцов на предмет получения слоя заданной твердости, переменной по глубине. Обсуждается вопрос о единственности решения задачи управления.

1. Метод математического моделирования широко используется для решения задач управления технологическими процессами [1—3], позволяя раскрыть новые возможности целевой обработки деталей.

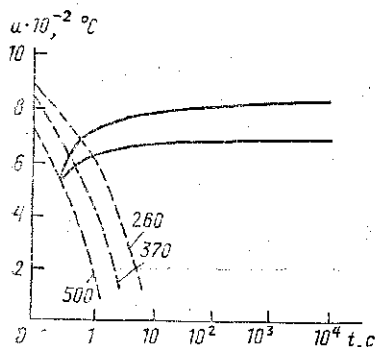
В работе [3] рассматривалась задача об управлении охлаждением цилиндрических образцов ($0 < r < R$) при поверхностной закалке и предполагалось, что поток охлаждающей жидкости не зависит от времени. В этом случае поток может быть охарактеризован единственным числом — постоянным коэффициентом теплообмена H между поверхностью материала и охлаждающей средой. Эффект охлаждения — получение мартенситной структуры в пределах слоя $R-h \leq r \leq R$ — характеризуется при этом величиной скорости охлаждения v на нижней границе слоя ($R-h$). Значение $v_{\text{mid}} = v_{\text{cr}}$ определяет мартенситную структуру в указанном слое и, следовательно, соответствующую твердость T . Задача управления состояла в том, чтобы найти $H = f(v_{\text{cr}}, h)$, и, как показано в [3], полученные оценки H согласуются с экспериментальными данными [4].

В настоящей работе формулируется и решается задача о нестационарном управлении аналогичным процессом ($H = H(t)$), позволяющим получить «тонкую структуру» распределения $v_{\text{mid}} = v_{\text{mid}}(r)$ вблизи поверхности, включающую зону перехода от твердого мартенситного слоя к мягкой сердцевине. Как и в [3],

$$v_{\text{mid}} = (u_1 - u_2) / \Delta t, \quad (1)$$

где значения u_s , $s=1, 2$, ограничивают критический интервал температур, включающий точку минимума на термокинетической диаграмме (рис. 1) $t = t(u)$, а $\Delta t = |t_1 - t_2|$, где t_s определяется алгоритмически решением относительно t уравнения $u(R-h, t) = \hat{u}_s$, левая часть которого определена при каждом h процедурой решения задачи, дополненной подпрограммой линейной интерполяции.

Обращение к термокинетической диаграмме для данной марки стали позволяет идентифицировать величину v_{mid} на данной глубине $R-r$ с локальной твердостью $T(r)$, и эта функция может служить в свою очередь входной информацией для определения $H(t)$. Такой вариант также рассматривается нами в рамках математического эксперимента.



2. Задачи управления подобного рода относятся к числу обратных задач математической физики [5, 6], и вопрос о корректности их математической постановки требует специального внима-

Рис. 1. Фрагмент термокинетической диаграммы: сплошной линией изображена S-образная кривая, штриховыми — температурные кривые; цифры рядом с кривыми — значения твердости в HV

ния. В однопараметрической задаче [5] дело сводится к решению уравнения $v_{mid}(H) = v_{cr}$ с непрерывной монотонной левой частью, так что существование, единственность и устойчивость решения не вызывают сомнения. Иначе говоря, задача корректна по Тихонову [7].

В рассматриваемом нами случае вопрос о существовании также решается в рамках концепции корректности по Тихонову. Пусть $z \equiv H(t) \in Z$, где Z — класс допустимых управлений. Температурные поля при заданной функции $H(t)$ определяются условиями краевой задачи:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk(u) \frac{\partial u}{\partial r} \right) = c(u) \rho(u) \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$u|_{t=0} = u_0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (2)$$

$$-k(u) \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = H(t) (u - \bar{u}(t))|_{r=R},$$

где величина $v_{mid}(r)$ дается формулой (1), u — решение задачи (2), а величина $T(r)$ получается в результате сопоставления температурного поля (2) с S-образными кривыми [2] для данной марки стали (т. е. данных k, c, ρ). Обозначим через A совокупность указанных операций, определяющих ω , равные либо $v_{mid}(r)$, либо $T(r)$. Множество этих ω при различных $H(t)$ обозначим W . При любом ω из W обратная задача: $Az = \omega$ — имеет решение, а, как будет видно, именно такой выбор используется в алгоритме решения.

Для задач управления вопрос о единственности решения имеет скорее познавательное, нежели практическое значение, причем приемлемым является любое управление из класса допустимых. Представление же о том, можно ли рассчитывать на однозначность результата, мы получаем в рамках более простой, линейной математической модели для «плоского случая» с видоизмененным граничным условием:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < t < \bar{t}, \quad 0 < x < l,$$

$$u|_{t=0} = u_0(x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad -k \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = q(t); \quad a^2 \equiv \frac{k}{c\rho}. \quad (3)$$

Назовем классом K множество аналитических на $[0, \bar{t}]$ функций $q(t)$, соответствующих условию $q(0) = -ku_0(l)$.

Теорема. Заданной скорости охлаждения $du(x, \bar{t})/dt = \varphi(x)$ может соответствовать только одно решение $q(t)$ ($t \in [0, \bar{t}]$) обратной задачи из класса K .

Справедливость этого утверждения вытекает из анализа явного представления температурного поля, полученного с помощью метода Фурье [8] после исключения $q(t)$ из краевых условий.

Как можно убедиться, для данного значения $t = \bar{t} > 0$ и $x \in [0, l]$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, \bar{t}) \equiv \varphi(x) = -\frac{a^2}{kl} q(\bar{t}) - \frac{2a^2}{kl} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times \\ \times \int_0^{\bar{t}} \exp\{-\alpha_n^2(\bar{t}-\tau)\} q'(\tau) d\tau \cdot \cos \frac{\alpha_n x}{a}, \quad (4)$$

где $\alpha_n \equiv n\pi a/l$, и в заданном классе $q(t)$ ряд сходится равномерно по x , а его сумма есть линейный функционал от $q(t)$ ($t \in [0, \bar{t}]$).

Допуская, что заданной $\varphi(x)$ отвечают два различных потока: $q_s(\tau)$, $s=1, 2$, для их разности $Q(\tau)$ имеем однородное выражение — разложение нуля в тригонометрический ряд Фурье. Ввиду замкнутости тригонометрической системы в пространстве кусочно-непрерывных на $[0, l]$ функций [9] заключаем, что коэффициенты Фурье равны нулю, т. е.

$$Q(t) = 0, \quad \int_0^{\bar{t}} \exp\{-\alpha_n^2(\bar{t}-\tau)\} Q'(\tau) d\tau = 0 \quad (5)$$

при любом натуральном n .

Убедимся, что тождества (5) по n возможны лишь в том случае, если $P(\tau) \equiv Q'(\tau) \equiv 0$ на сегменте $[0, \bar{t}]$; ввиду аналитичности $P(\tau)$ для этого достаточно, чтобы $P^{(m)}(\bar{t}) = 0$ при любом $m=0, 1, 2, \dots$

Из (5) следует, что

$$I_0(n) \equiv \int_0^{\bar{t}} \exp\{\alpha_n^2 \tau\} P(\tau) d\tau \equiv P(\bar{t}) \frac{1}{\alpha_n^2} (\exp\{\alpha_n^2 \bar{t}\} - 1) + I_0^* = 0,$$

где $I_0^* \equiv \int_0^{\bar{t}} \exp\{\alpha_n^2 \tau\} (P(\tau) - P(\bar{t})) d\tau$. Так как функция $P(\tau)$ непрерывно дифференцируема, то существует не зависящая от n константа $M_0 > 0$, такая, что $|P(\tau) - P(\bar{t})| \leq M_0(\bar{t} - \tau)$, и тогда

$$|I_0^*| \leq M_0 \left(\frac{1}{\alpha_n^2} + \frac{1}{\alpha_n^4} (\exp\{\alpha_n^2 \bar{t}\} - 1) \right).$$

Отсюда следует, что если $P(\bar{t}) \neq 0$, то

$$I_0(n) = P(\bar{t}) \frac{1}{\alpha_n^2} \exp\{\alpha_n^2 \bar{t}\} (1 + o(1)) = 0,$$

что невозможно при достаточно больших n , и, значит, $P(\bar{t}) = 0$.

С другой стороны, интегрируя при этом условии $I_0(n)$ по частям, получим

$$\int_0^{\bar{t}} \exp \{ \alpha_n^2 \tau \} P'(\tau) d\tau + P(0) \equiv I_1(n) + P(0) = 0.$$

Предположив, что $P'(\bar{t}) \neq 0$, и учитывая непрерывную дифференцируемость $P'(\tau)$, для $I_1(n)$ получаем оценку, аналогичную предшествующей: $I_1(n) + P(0) = P'(\bar{t}) \frac{1}{\alpha_n^2} \exp \{ \alpha_n^2 \bar{t} \} (1 + o(1)) = 0$, что невозможно при достаточно больших n . Следовательно, $P'(\bar{t}) = 0$. Пусть уже доказано, что $P^{(s)}(\bar{t}) = 0$, $s = 0, 1, \dots, m$, и, следовательно, получено тождество

$$\int_0^{\bar{t}} \exp \{ \alpha_n^2 \tau \} P^{(s+1)}(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^s (-1)^k P^{(s-k)}(0) \alpha_n^{2k} = 0.$$

Предполагая, что $P^{(s+1)}(\bar{t}) \neq 0$, аналогично предыдущему получим

$$I_{s+1}(n) \equiv \int_0^{\bar{t}} \exp \{ \alpha_n^2 \tau \} P^{(s+1)}(\tau) d\tau = P^{(s+1)}(\bar{t}) \frac{1}{\alpha_n^2} \exp \{ \alpha_n^2 \bar{t} \} (1 + o(1)),$$

тогда

$$I_{s+1}(n) + \sum_{k=0}^s (-1)^k P^{(s-k)}(0) \alpha_n^{2k} \equiv P^{(s+1)}(\bar{t}) \frac{1}{\alpha_n^2} \exp \{ \alpha_n^2 \bar{t} \} (1 + o(1)) = 0.$$

Отсюда следует $P^{(s+1)}(\bar{t}) = 0$, а интегрирование при этом по частям $I_{n+1}(n)$ приводит к тождеству

$$I_{s+2}(n) + \sum_{k=0}^{s+1} (-1)^k P^{(s+1-k)}(0) \alpha_n^{2k} = 0,$$

что завершает индукцию.

Таким образом, установлено, что для любого $m = 0, 1, \dots$ $P^{(m)}(\bar{t}) = 0$, и в силу аналитичности $P(\tau)$ имеем $Q'(\tau) \equiv 0$ при $\tau \in [0, \bar{t}]$. Следовательно, $Q(\tau) \equiv \text{const}$ на этом сегменте, а так как согласно (5) $Q(\bar{t}) = 0$, то $Q(\tau) \equiv 0$, т. е. $Q_1(\tau) \equiv Q_2(\tau)$, и решение обратной задачи единственно. Теорема доказана.

Поскольку изучаемый процесс относится к тонкому приповерхностному слою, допущенное здесь пренебрежение кривизной поверхности существенной роли не играет: как показано в [10], обе геометрические модели (с учетом и без учета кривизны) асимптотически (при $h/R \rightarrow 0$) близки. Естественно допустить также, что аналогичные оценки справедливы для модели с физическими параметрами, слабо зависящими от температуры. Несомненно, наконец, что однозначное восстановление по заданной информации теплового потока позволяет найти и $H(t)$, если дополнительно известна температура поверхности.

Обратимся к проблеме устойчивости решения. Поскольку оператор A имеет интегральный характер и, следовательно, вполне непрерывен [5], задача, вообще говоря, неустойчива относительно малых вариаций $w \in W$, т. е. сколь угодно малым вариациям $v_{\text{mid}}(h)$ либо $T(h)$ могут отвечать сколь угодно большие вариации $H(t)$. Такая неустойчивость исключается, однако, в том случае, если множество допустимых управляющих функций есть компакт. Последнее требование может быть обеспечено, например, априорной конструкцией множества, как в [3]; в рассматриваемой здесь задаче это соответствует поиску решений на множестве кусочно-постоянных на заданном небольшом числе сегмен-

тов функций и концепции корректной по Тихонову постановки [5]. Другая возможность решения проблемы устойчивости — это использование какого-либо регуляризирующего оператора, определяющего компакт алгоритмически [5].

3. Для решения задачи управления используется регуляризирующий оператор Тихонова. Заметим прежде всего, что возможность точного задания желаемого эффекта управления, например $\hat{T} = \hat{T}(r)$, вовсе не решает проблемы устойчивости, поскольку желаемая функция $\hat{T}(r)$ не обязана принадлежать множеству W . Поэтому естественной является постановка задачи квазиминимизации относительно H : $P_W(v(H), \hat{v}) \leq \delta$, где δ — заранее заданный допуск на отклонение эффекта от желаемого. Отметим также, что если входной информацией является $u_{\text{mid}}(r)$ и эта величина определяется по $\hat{T}(r)$, то ввиду приближенного характера отражения связи между этими величинами в диаграммах [4] величина \hat{u} содержит также неустранимую погрешность входных данных: $\hat{v} = \tilde{v}_{\text{mid}, \delta}$. Соответственно δ является оценкой «вынужденного допуска».

Управляющую функцию $H(t)$ будем искать среди элементов, минимизирующих по аргументу при различных α сглаживающий функционал Тихонова:

$$M_\alpha(H) \equiv \rho_W^2(AH, v) + \alpha \Omega(H), \quad \alpha > 0. \quad (6)$$

Стабилизатор $\Omega(H)$ обеспечивает принадлежность экстремалей некоторому компакту. Если экстремаль выбирается из множества гладких функций, то

$$\Omega = \Omega_1(H) = \int_0^H (H_t^2 + H^2) dt,$$

если из множества функций ограниченной вариации $H = \{H_i\}$, то

$$\Omega = \Omega_2(H) = \sum_{i=1}^n (H_i - H_0)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (H_{i+1} - H_i)^2,$$

где H_0 — гипотетическое среднее значение уровня $H(t)$. Функционал невязки определяется формулой

$$\rho_W^2(AH, u) = \int_{r_1}^{r_2} (AH(t) - \hat{u}(r))^2 r dr,$$

где $r_2 = R$, $r_1 = R - h$. Величина $AH(t) = v[r, H(t)]$ определяется при каждой функции $H(t)$ алгоритмом решения задачи (2) с последующей описанной выше обработкой.

Значение α выбирается из элементов убывающей геометрической прогрессии $\alpha_{s+1} = 0,1\alpha_s$, $s = 0, 1, \dots$, при достаточно большом α_0 . Последнее условие дает возможность выбрать в качестве начального приближения экстремаль Ω [6]. В качестве искомой принимается та экстремаль H_{α_s} , которая при наибольшем из возможных значений α_s удовлетворяет условию $\rho_W^2(AH_{\alpha_s}, \hat{u}) \leq \delta^2$, и таким образом осуществляется согласование параметра регуляризации с величиной допуска: $\alpha_s = \alpha(\delta)$.

Отметим, что переход к пределу при $\delta \rightarrow 0$ и в рассматриваемой задаче управления имеет смысл лишь в том случае, если $\hat{u} \in AZ$, а соответствующее решение \hat{H} обратной задачи единственно: в этом слу-

чае выбираемое приближение, согласно принципу невязки [6], удовлетворяет требованию $\lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\alpha(\delta)}(t) = \tilde{H}(t)$.

В проведенных нами расчетах для минимизации функционала был выбран безградиентный метод Розенброка [11]. Для решения при заданной функции $H(t)$ краевой задачи (2) используется конечно-разностная двухслойная невязная безытерационная схема на четырехточечном шаблоне и в цилиндрических координатах:

$$c(y_n) \left(\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} \right) = \frac{1}{V_n} \left(r_{n-\frac{1}{2}} \hat{W}_{n-\frac{1}{2}} - r_{n+\frac{1}{2}} \hat{W}_{n+\frac{1}{2}} \right),$$

$$V_n = \frac{1}{2} \left(r_{n+\frac{1}{2}}^2 - r_{n-\frac{1}{2}}^2 \right),$$

$$\hat{W}_{n+\frac{1}{2}} = \kappa_{n+\frac{1}{2}} (\hat{y}_n - \hat{y}_{n+1})/h, \quad \kappa_{n-\frac{1}{2}} = (k(y_n) + k(y_{n-1}))/2.$$

Граничные условия аппроксимируются со вторым порядком точности. Данная конечно-разностная схема решалась методом прогонки. При этом значения $v_{\text{mid}}(1)$, определяемые формулой (1), вычислялись с использованием линейной интерполяции сеточной функции y_n^m [3]. Значения твердости для данной функции v_{mid} , как и зависимость v_{mid} от H , устанавливались также с использованием линейной интерполяции по таблице соответствия $v_{\text{mid}} \leftrightarrow T$, полученной нами для ЭВМ путем обработки термокинетической диаграммы. Описанная схема вычислений вносит погрешность в оператор A , так что, строго говоря, принцип выбора α по невязке (6) требует уточнения в соответствии с [12]. Однако, как показали численные оценки погрешности оператора $H(t) \rightarrow v_{\text{mid}}(r)$, она мала по сравнению с погрешностью задания v_{mid} по требуемой твердости, и ею можно пренебречь.

4. Рассмотрим некоторые результаты математического эксперимента. Для анализа эффективности алгоритма, естественно, выбираем входную информацию, например относительно $v_{\text{mid}}(r)$ из множества W , т. е. при априорном существовании соответствующего управления. Какой бы ни была модель управления $H(t)$, такой выбор можно сделать, решив прямую задачу: $H(t) \rightarrow v_{\text{mid}}(r)$. Последующее решение обратной задачи $\tilde{v}_{\text{mid}}(r) \rightarrow \tilde{H}(t)$, где \tilde{v}_{mid} либо совпадает с v_{mid} , либо содержит специальные искажения в пределах допуска δ , позволяет убедиться в устойчивости алгоритма и оценить модуль непрерывности:

$$\epsilon^2 = \rho_z^2(H, \tilde{H}) = \epsilon^2(\delta).$$

Такой эксперимент был проведен в случае трехступенчатой функции $H(t)$ для марки стали-20. Поскольку число ступеней N невелико, задача оказывается условно-корректной и в (5) можно положить $\alpha=0$. Оказалось, что при $\delta=0,005; 0,123$ и $1,1$ значения погрешности результата ϵ соответственно равны 145, 172 и 655 ккал·м⁻²·ч⁻¹·град⁻¹, т. е. от 0,3 до 1,2%. Для модельной функции $H(t)$ (ккал·м⁻²·ч⁻¹·град⁻¹) = $= 3 \cdot 10^4 (1-t/0,9)^2 + 2 \cdot 10^4$ проведены аналогичные эксперименты, но с погрешностью, определяемой только вычислительной схемой. Решение обратной задачи определялось в классе многоступенчатых функций с $N=10$ и фиксированным разбиением по t на сетке (0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 5 с). Показано, что результат не зависит существенно от начального приближения и близок к модельному (рис. 2).

Проведен расчет для следующего желаемого распределения твердости по глубине: $T(HV) = \{500, 370, 260\}$, для глубин h (мм) = $\{50; 49,5; 49\}$ соответственно. По термокинетической диаграмме (см. рис. 1)

найдено соответствующее распределение скоростей v (град/с) = {854, 341, 186}. Решение обратной задачи из множества многоступенчатых функций оказалось равным $\{H_i\}$, $i=1, \dots, 10$: {10 000 при $i=1$, 18 000 при $i=2$, 27 400 при $i=3$, 26 500 при $i=4$, 26 000 при $i=5$, 30 000 при $i=6$,, 10}. Эта функция соответствует выбору по принципу невязки: $\rho^2(v_\alpha, v) \leq \delta$, где δ — величина априорной

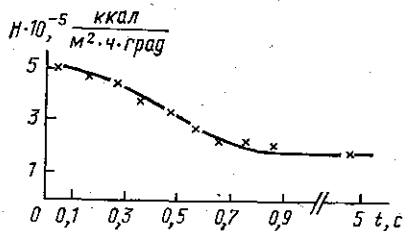


Рис. 2. Модельный вариант $H(t)$ (сплошная кривая) и результат решения задачи (крестики)

ошибки в задании скоростей по диаграмме (см. рис. 1) и $\alpha=10^5$.

Была проведена оценка точности съема v_{mid} с термокинетической кривой; оказалось, что ошибка составляет $\sim 30\%$ от величины скорости, и тогда $\delta \sim 10^5$. Вычисляемое по найденному управлению распределение скоростей $v_\alpha = \{779, 574, 484\}$, чему соответствует распределение твердости $T_\alpha = \{401, 429, 406\}$.

Наблюдается неплохое соответствие с желаемым распределением только на поверхности, что естественно при столь высокой погрешности входных данных. Большую точность можно получить лишь при более точных исходных данных.

Авторы благодарны А. Н. Тихонову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов А. Н., Кальнер В. Д., Гласко В. Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. М., 1990. [2] Тихонов А. Н., Кулик Н. И., Шкляров И. Н., Гласко В. Б. // Инж.-физ. журн. 1980. 39, № 1. С. 5. [3] Скиданова О. В., Кулик Н. И., Гласко В. Б. и др. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. 32, № 6. С. 88. [4] Шепеляковский К. З., Шкляров И. Н., Кальнер В. Д. // Электротермия. 1968. № 73—74. С. 51. [5] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979. [6] Гласко В. Б. Обратные задачи математической физики. М., 1984. [7] Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шихатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М., 1980. [8] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., 1966. [9] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Т. 2. М., 1980. [10] Гласко В. Б., Осипенко М. А. Деп. ВИНТИ. № 3796-В 91. М., 1991. [11] Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М., 1975. [12] Гончарский А. Б., Леонов А. С., Ягола А. Г. // ЖВМ и МФ. 1973. 13, № 2. С. 294.

Поступила в редакцию
15.02.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1994. Т. 35, № 2

УДК 530.12:531.51

ФИНСЛЕРОВА РЕАЛИЗАЦИЯ ИСКРИВЛЕННОГО ИМПУЛЬСНОГО ПРОСТРАНСТВА

Г. С. Асанов

(кафедра теоретической физики)

Даны явные выражения для основных величин искривленного пространства четырехмерных импульсов и приведены результаты соответствующих вычислений в первом порядке приближения по характерному финслерову параметру g , который считается малым.