найдено соответствующее распределение скоростей v (град/с)={854, 341, 186}. Решение обратной задачи из множества многоступенчатых функций оказалось равным $\{H_i\}$, $i=1, \ldots, 10$: {10 000 при $i=1$, 18 000 при $i=2$, 27 400 при $i=3$, 26 500 при $i=4$, 26 000 при $i=5$, 30 000 при $i=6$, ..., 10}. Эта функция соответствует выбору по принципу невязки: $\rho^2(v_\alpha, v) \leqslant \delta$, где δ — величина априорной ошибки в задании скоростей по диаграмме (см. рис. 1) и $\alpha=10^5$.

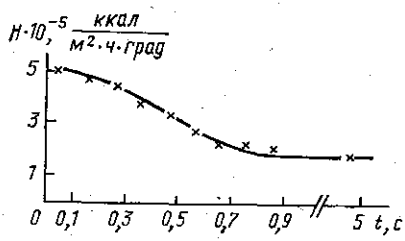

Рис. 2. Модельный вариант $H(t)$ (сплошная кривая) и результат решения задачи (крестики)

Была проведена оценка точности съема v_{mid} с термокинетической кривой; оказалось, что ошибка составляет $\sim 30\%$ от величины скорости, и тогда $\delta \sim 10^5$. Вычисляемое по найденному управлению распределение скоростей v_α={779, 574, 484}, чему соответствует распределение твердости T_α={401, 429, 406}.

Наблюдается неплохое соответствие с желаемым распределением только на поверхности, что естественно при столь высокой погрешности входных данных. Бо́льшую точность можно получить лишь при более точных исходных данных.

Авторы благодарны А. Н. Тихонову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Тихонов А. Н., Кальнер В. Д., Гласко В. Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. М., 1990. [2] Тихонов А. Н., Кулик Н. И., Шкляров И. Н., Гласко В. Б.//Инж.-физ. журн. 1980. 39, № 1. С. 5. [3] Скиданова О. В., Кулик Н. И., Гласко В. Б. и др.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. 32, № 6. С. 88. [4] Шепеляковский К. З., Шкляров И. Н., Кальнер В. Д.//Электротермия. 1968. № 73—74. С. 51. [5] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979. [6] Гласко В. Б. Обратные задачи математической физики. М., 1984. [7] Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М., 1980. [8] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., 1966. [9] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Т. 2. М., 1980. [10] Гласко В. Б., Осипенко М. А. Деп. ВИНИТИ. № 3796-В 91. М., 1991. [11] Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М., 1975. [12] Гончарский А. Б., Леонов А. С., Ягола А. Г.//ЖВМ и МФ. 1973. 13, № 2. С. 294.

Поступила в редакцию
15.02.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1994. Т. 35, № 2

УДК 530.12:531.51

ФИНСЛЕРОВА РЕАЛИЗАЦИЯ ИСКРИВЛЕННОГО ИМПУЛЬСНОГО ПРОСТРАНСТВА

Г. С. Асанов
(кафедра теоретической физики)

Даны явные выражения для основных величин искривленного пространства четырехмерных импульсов и приведены результаты соответствующих вычислений в первом порядке приближения по характерному финслерову параметру g, который считается малым.

1. Введение

Восходящая к работе [1] идея введения кривизны в четырехмерное импульсное пространство с целью устранения расходимостей из квантовой теории поля развивалась в работах [2—4]. В этих работах, однако, возникали новые принципиальные трудности, и прежде всего потому, что не сохранялась инвариантность понятия массы покоя частицы: движения в таком пространстве не сохраняли длину четырехмерных импульсов. Последний недостаток устраняется только при введении кривизны в четырехмерное импульсное пространство финслеровым методом, основывающимся на требовании однородности нулевой степени зависимости метрического тензора от векторов четырехмерных импульсов. Финслерова индикатриса (точнее, фигуратриса) играет роль массовой оболочки для частицы. Можно также сказать, что по сравнению с подходом, основанным на традиционной специальной теории относительности, финслеров подход состоит именно в изменении вида массовой оболочки (дисперсионного соотношения для импульсов) и, следовательно, свободен от проблемы «несохранения массы покоя». Интересный пример указан в разделе 2, в котором дано явное импульсное представление специально-релятивистской финслеровой метрической функции, введенной в [5].

В то же время любой подход, основывающийся на введении зависимости метрического тензора от импульсов, наталкивается на существенную проблему: как определить симметричное скалярное произведение двух четырехмерных импульсов? Мы покажем, каким образом последовательное использование тетрад метрического тензора позволяет легко предложить необходимое определение, и в том числе для изотропного случая. В результате построен законченный аппарат для расчета финслеровых поправок к матричным элементам взаимодействия частиц (который будет начат в следующей статье).

2. Финслерова функция Гамильтона

С помощью метода, изложенного в разделе 6.2 работы [6], функция Гамильтона $H(x^n, y_m) = F(x^n, y^k(x^n, y_m))$ находится в явном виде для финслеровой метрической функции F, предложенной в предыдущих работах [5]. Именно, если положить $H = y_0 W(r, p)$, то вычисления дают следующий результат:

$$C_2 C W^2 = \left(1 - \frac{p}{g^+}\right)^{2g^+/(g^+ - g^-)} \left(1 - \frac{p}{g^-}\right)^{-2g^-/(g^+ - g^-)} =$$
$$= -Q^* \left| \left(1 - \frac{p}{g^+}\right) \Big/ \left(1 - \frac{p}{g^-}\right) \right|^{g/(2\sqrt{1+g^2/4})}, \tag{1}$$

где $p = (\delta^{ab} p_a p_b)^{1/2}$, $p_a = C^{1/2} y_a / y_0$, $g^+ = 1/g_+$, $g^- = 1/g_-$ и

$$Q^* = -1 - gp + p^2 = (p - g^+)(p - g^-). \tag{2}$$

Справедливо равенство

$$V^2 W^2 = (Q^*)^2 / (1 + gp)^2. \tag{3}$$

Следуя [5], мы используем статическую систему координат $x^n = (x^0, x^a)$, так что $y^n = (y^0, y^a)$, $y_n = (y_0, y_a)$ и $V = F/y^0$; $a, b = 1, 2, 3$. Величины C, C_2 и $g_\pm = -\frac{1}{2} g \pm \sqrt{1 + g^2/4}$ те же, что и введенные в работе [5]; они не зависят от y_n. В частности, как и в [5], g играет роль характерного финслерова параметра.

Соответствующее *обобщенное дисперсионное соотношение*, связывающее компоненты четырехмерного импульса $P_R=(P_0, P_a)$, отвечающего массе покоя m, имеет вид

$$(P_0)^2 \widetilde{W}^2(p)=m^2, \tag{4}$$

где $p=(\delta^{ab}P_aP_b)^{1/2}/P_0$ и

$$\widetilde{W}^2=C_2CW^2. \tag{5}$$

Компоненты импульса P_R связаны с компонентами геометрического ковариантного вектора y_m соотношениями $P_R=K_R^m y_m$, где K_R^m — лабораторная тетрада. Используя соответствующую тетраду, введенную в [5], мы получим

$$P_0=y_0/\sqrt{CC_2},\ P_a=y_a/\sqrt{C_2}. \tag{6}$$

3. Симметричное скалярное произведение

Пусть P_R и Q_R — два четырехмерных импульса, отвечающих соответственно массам покоя m_1 и m_2, и пусть $E^{PQ}(P_R)=(1/2)\partial^2\widetilde{H}^2/\partial P_P\partial P_Q$ — финслеров метрический тензор, построенный с помощью нормированной функции Гамильтона $\widetilde{H}=P_0\widetilde{W}$. Введем тетраду $H^Q_{(R)}(P_R)$ согласно обычному правилу

$$E^{PQ}=\sum_{R=0}^{3} e^R H^P_{(R)} H^Q_{(R)},\ e^R=(1,\ -1,\ -1,\ -1), \tag{7}$$

и выберем $H^P_{(0)}\|E^{PQ}P_Q$. Пусть $H_P^{(R)}$ — взаимная тетрада, так что $H^P_{(R)}H_Q^{(R)}=\delta^P_Q$. Положим $L_P^{(R)}=H_P^{(R)}|_{g=0}$, так что $L_P^{(R)}$ представляет обычное лоренцево преобразование. Построим *возвращенную тетраду* E^Q_P согласно определению $E^Q_P=L_P^{(T)}H^Q_T$. По построению она обладает двумя важными свойствами:

$$E^{PQ}=\sum_{R=0}^{3} e^R E^P_R E^Q_R,\ E^Q_P|_{g=0}=\delta^Q_P. \tag{8}$$

Термин «возвращенная» мы относим к тетраде E^Q_P в том смысле, что H^Q представляет активное кинематическое преобразование, отвечающее импульсу P_R, а $L_P^{(T)}$ — обратное пассивное кинематическое преобразование, отвечающее тому же импульсу P_R (ср. [6, гл. 7]). В отличии E^Q_P от δ^Q_P можно видеть «суть» финслерова обобщения. Использование возвращенной тетрады позволяет легко предложить следующее простое определение симметричного скалярного произведения двух четырехмерных импульсов P_Q и Q_Q:

$$(PQ)=H^{PQ}(P,\ Q)P_PQ_Q\equiv(QP), \tag{9}$$

где

$$H^{PQ}(P,\ Q)=\frac{1}{2}\sum_{R=0}^{3} e^R[E^P_R(P)E^Q_R(Q)+E^P_R(Q)E^Q_R(P)]. \tag{10}$$

При $m_1\neq 0$ вычисление возвращенной тетрады $E^Q_P(P_R)$ дает следующие явные представления:

$$B\widetilde{W}^{-1}E_0^0=\widetilde{H},\ B^3\widetilde{W}^{-1}E_0^a=-\widetilde{H}^{-1}gpp_a,\ E_a^0=0, \tag{11}$$

$$B\widetilde{W}^{-1}E_a^b=\delta^{ab}-(1-\widetilde{H}^{-1})\,p^{-2}\,p_ap_b, \tag{12}$$

где $B=(-Q^*)^{1/2}$, $\widetilde{H}=[1+gp\,(1+gp)\,B^{-2}]^{1/2}$.

Подстановка (11)—(12) в (8) дает для компонент тензора $E^{PQ}(P_R)$ следующие явные выражения:

$$B^2\widetilde{W}^{-2}E^{00}=\widetilde{H}^2,\ B^4\widetilde{W}^{-2}E^{0a}=-gpp_a,$$

$$B^2\widetilde{W}^{-2}E^{ab}=B^{-2}\,gp^{-1}p_ap_b+\delta^{ab}.$$

«Минимальный» метод обобщения уравнения Дирака на финслеров случай, очевидно, состоит в замене в операторе $\gamma^{(P)}\partial/\partial x^P$ матриц Дирака $\gamma^{(P)}$ на $\gamma^P=\gamma^{(Q)}E_Q^P$. При использовании такого метода вычисление произведений $\gamma^{(R)}(P)P_R\gamma^{(S)}(Q)Q_S$ в матричных элементах будет приводить (вследствие известных тождеств $\mathrm{Tr}\,\gamma^{(P)}\gamma^{(Q)}=4\delta^{PQ}e^Q$) именно к скалярному произведению (9)—(10).

Если мы введем якобиан

$$J(p)\stackrel{\text{def}}{=}|\det(E^{PQ})|^{1/2}, \tag{13}$$

то прямыми вычислениями можно убедиться, что справедливы тождества

$$J^{-1}(p)\,\partial\widetilde{W}^2(p)/\partial p^2=-1 \tag{14}$$

и

$$J^{-1}(p)\,P^0=(1+gp)\,P_0. \tag{15}$$

4. Изотропный случай

Вектор Q_R называется изотропным, если ему отвечает нулевая масса покоя, $m_2=0$, что приводит к случаю

$$Z=g+Q_0,\ Z\stackrel{\text{def}}{=}(\delta^{ab}Q_aQ_b)^{1/2} \tag{16}$$

в (1) и к замене дисперсионного соотношения (4) на

$$W^2(Z/Q_0)=0.$$

В этом случае компоненты финслерова метрического тензора a^{PQ} сингулярны. Однако вследствие конкретной структуры представления (1) мы можем переписать предыдущее уравнение просто в виде

$$Q^*(Z/Q_0)=0. \tag{17}$$

Вследствие (2) последнее наблюдение подсказывает интересную идею — описывать частицу нулевой массы финслеровой геометрией, задаваемой метрической функцией $Y(Q_R)$, квадрат которой имеет вид

$$Y^2=Q_0^2-Z^2+gQ_0Z. \tag{18}$$

Компоненты соответствующего четырехмерного вектора скорости $Q^R=(1/2)\,\partial Y^2/\partial Q_R$ равны

$$Q^0=Q_0+\frac{1}{2}\,gZ,\ Q^a=-Q_a\left(1-\frac{1}{2}\,gQ_0Z^{-1}\right),$$

а для компонент ассоциируемого финслерова метрического тензора $f^{PQ}=\partial Q^P/\partial Q_Q$ получаем простые выражения:

$$f^{00}=1,\ f^{0a}=f^{a0}=\frac{1}{2}gn^a,\ f^{ab}=-\delta^{ab}\left(1-\frac{1}{2}gQ_0Z^{-1}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}gQ_0Z^{-1}n^an^b, \tag{19}$$

не содержащие сингулярностей, где $n^a=Q_a/Z$. И далее, для соответствующей финслеровой метрической функции $J=Y(Q_P(Q^R))$ получаем

$$AJ^2=(Q^0)^2-S^2-gQ^0S, \tag{20}$$

где $S=(\delta_{ab}Q^aQ^b)^{1/2}$ и $A=1+g^2/4$, откуда следует, что

$$AQ_0=Q^0-\frac{1}{2}gS,\ AQ_a=-Q^a\left(1+\frac{1}{2}gQ^0S^{-1}\right) \tag{21}$$

и что коэффициенты финслерова метрического тензора $f_{PQ}=\partial Q_P/\partial Q^Q$ даются равенствами

$$Af_{00}=1,\ Af_{0a}=Af_{a0}=-\frac{1}{2}gn_a,$$
$$Af_{ab}=-\left(1+\frac{1}{2}gQ^0S^{-1}\right)\delta_{ab}+\frac{1}{2}gQ^0S^{-1}n_an_b, \tag{22}$$

где $n_a=Q^a/S=-n^a$. Справедливо

$$\det(f^{PQ})=-A(S/Z)^2\equiv-A(1-(g/2)Q_0/Z)^2. \tag{23}$$

Несложные вычисления, использующие тетраду $H^P_{(R)}(Q_Q)$ метрического тензора $f^{PQ}(Q_R)$, приводят к следующему выводу: соответствующая возвращенная тетрада $E^Q_P(Q_R)$ имеет вид

$$E^0_0=1,\ E^a_0=gn^a/2,\ E^0_a=0, \tag{24}$$

$$E^b_a=g_+^{1/2}A^{1/4}\delta^b_a+A^{1/4}(g_+^{1/2}-A^{1/4})n_an^b. \tag{25}$$

Если ввести переменную $s_a=Q_a/Q_0$, то из (16) последует

$$n^a=s_ag_+. \tag{26}$$

Если аналогично (13) ввести якобиан

$$J(q)\stackrel{\text{def}}{=}|\det(f^{PQ})|^{1/2} \tag{27}$$

и использовать обозначение

$$\widetilde{W}(q)=Y/Q_0, \tag{28}$$

аналогичное (5), то будет выполняться следующий аналог тождества (14):

$$J^{-1}(q)\,\partial\widetilde{W}^2(q)/\partial q^2=-A^{-1/2}. \tag{29}$$

Кроме того, подставляя первое равенство (16) в правую часть (23) и принимая во внимание равенства $g^+=g/2+A^{1/2}$ и $g^+=1/g_+$, нетрудно сделать следующий вывод: $J=Ag_+$ *на изотропной поверхности* $Y=0$.

5. Приближенные представления

Будем считать параметр g малым, $|g|\ll1$. Тогда с точностью до членов первого порядка по g мы имеем $g^\pm=g/2\pm1$ и

$$\tilde{W}^2=(1-p^2)\left[1+\frac{g}{2}\left(\frac{2p}{1-p^2}-\ln\frac{1+p}{1-p}\right)\right],$$

откуда вытекает следующая аппроксимация для дисперсионного соотношения (4):

$$E^2=1+X^2+gf(X),$$

$$f=-X(1+X^2)^{1/2}+\ln[X+(1+X^2)^{1/2}],$$

обращение которой имеет вид

$$X^2=E^2-1+gt(E), \tag{30}$$

$$t=E(E^2-1)^{1/2}-\ln[E+(E^2-1)^{1/2}], \tag{31}$$

где $E=P_0/m$ и $X^2=(\delta^{ab}P_aP_b)/m^2$.

Для разложений характерно появление логарифмических функций. Далее,

$$E_0^0=1+\frac{g}{4}\left(\frac{2p}{1-p^2}-\ln\frac{1+p}{1-p}\right),\ E_0^a=-\frac{gpp_a}{1-p^2},$$

$$E_a^b=\left(1-\frac{g}{4}\ln\frac{1+p}{1-p}\right)\delta_a^b-\frac{g}{2}\frac{p^{-1}}{1-p^2}p_ap_b,$$

откуда вытекает следующая аппроксимация скалярного произведения (9)—(10):

$$(PQ)=(1-p^2)^{-1/2}(1-q^2)^{-1/2}\left\{1-pq+\frac{g}{2}\left[-\frac{p^3}{1-p^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{q^3}{1-q^2}+pq\left(\frac{p}{1-p^2}+\frac{q}{1-q^2}\right)\right]\right\}, \tag{32}$$

где $pq=\delta^{ab}p_aq_b$.

Если вектор Q_R изотропный, то из (24)—(26) мы получим аппроксимацию

$$E_0^0=1,\ E_0^a=\frac{1}{2}gs_a,\ E_a^0=0,\ E_a^b=\left(1-\frac{1}{4}g\right)\delta_a^b+\frac{1}{4}gs_as_b$$

и аппроксимация скалярного произведения (9)—(10) будет иметь вид

$$(PQ)=(1-p^2)^{-1/2}Q_0\left\{1-ps+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}g\left[1+ps+2p-(1-ps)\ln\frac{1+p}{1-p}\right]\right., \tag{33}$$

где $ps=\delta^{ab}p_as_b$ и импульс P'_R, как и выше, отвечает массе покоя $m_1>0$.

Для тензоров (19)—(22) аппроксимации имеют вид

$$f^{00}=1,\ f^{0a}=f^{a0}=\frac{1}{2}gn^a,\ f^{ab}=-\left(1-\frac{1}{2}g\right)\delta^{ab}-\frac{1}{2}gn^an^b,$$

$$f_{00}=1,\ f_{0a}=f_{a0}=-\frac{1}{2}gn_a,\ f_{ab}=-\left(1+\frac{1}{2}g\right)\delta_{ab}+\frac{1}{2}gn_an_b,$$

а аппроксимации для финслерова метрического тензора E^{PQ} (см. (8)) и взаимного ему тензора E_{PQ} имеют вид

$$E_{PQ}=E^0_{PQ}+gE^1_{PQ},\ E^{PQ}=E^{PQ}_0+gE^{PQ}_1,$$

$$E^0_{00}=1,\ E^0_{0a}=0,\ E^0_{ab}=-\delta_{ab},$$

$$E^1_{00}=-b(1-b^2)^{-1}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+b}{1-b},\ E^1_{0a}=b(1-b^2)^{-1}w^a,$$

$$E^1_{ab}=-\frac{1}{2}\ln\frac{1+b}{1-b}\delta_{ab}-b^{-1}(1-b^2)^{-1}w^aw^b,$$

$$E^{00}_0=1,\ E^{0a}_0=0,\ E^{ab}_0=-\delta^{ab},$$

$$E^{00}_1=p(1-p^2)^{-1}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+p}{1-p},\ E^{0a}_1=-p(1-p^2)^{-1}p_a,$$

$$E^{ab}_1=\frac{1}{2}\ln\frac{1+p}{1-p}\delta^{ab}+p^{-1}(1-p^2)^{-1}p_ap_b,$$

где $w^a=C^{-1/2}v^a,\ b=(\delta_{ab}w^aw^b)^{1/2}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Snyder H. S.//Phys. Rev. 1947. 71. P. 38. [2] Гольфанд Ю. А.// //ЖЭТФ. 1959. 37. С. 504; 1962. 43. С. 257. [3] Кадышевский В. Г.//ДАН СССР. 1962. 147. С. 588; ЖЭТФ. 1964. 46. С. 872. [4] Тамм И. Е. Собр. научных трудов. Т. 2. М., 1975. [5] Асанов Г. С.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1993. 34, № 3. С. 74; 1994. 35, № 1. С. 19. [6] Asanov G. S. Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories. Dordrecht, 1985.

Поступила в редакцию
02.06.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1994. Т. 35, № 2

УДК 539.12

НЕЙТРАЛЬНЫЕ ТОКИ В КАЛИБРОВОЧНОЙ МОДЕЛИ С ДУБЛЕТАМИ КВАРКОВ РАЗЛИЧНОЙ СПИРАЛЬНОСТИ

Г. Н. Артамонова, В. С. Замиралов
(НИИЯФ)

Рассмотрена калибровочная модель с лево- и правоспиральными дублетами кварков. Построены выражения для нейтральных электрослабых токов. Показано, что слабые синглетные константы связи обычных и новых кварков равны. Также показано, что при выборе сектора Хиггса в виде двух независимых скалярных дублетов новые кварки участвуют в обычных слабых взаимодействиях с обменом Z_1-бозоном.

1. Введение

Известно, что стандартная модель Вайнберга—Салама с группой калибровочных преобразований $SU(2)_L\times U(1)$ [1, 2] с тремя поколениями кварков и лептонов успешно описывает громадное число экспериментальных данных в физике элементарных частиц. Однако активно обсуждались и анализировались также и другие модели подобного типа. Прежде всего здесь надо назвать модель Пати—Салама и ей подобные [3—5], в которых авторы пытались преодолеть асимметрию по четности, присущую модели Вайнберга—Салама. К этой же группе моделей примыкают и векторoподобные модели [6, 7], приводящие к сохраняющим четность нейтральным токам. Рассматривались и