ного легирования эффекты случайного поля весьма существенны и их необходимо учитывать при корректном определении положения уровня Ферми и радиуса экранирования в компенсированных полупроводниках в условиях примесного экранирования.

Автор благодарен И. П. Звягину и А. В. Дмитриеву за плодотворные дискуссии. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и гранта фонда Сороса, предоставленного Американским физическим обществом.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Морозова В. А., Желудева С. И., Курова И. А.//ФТП. 1976. **10**. С. 1702. [2] Chandrasekhar S.//Rev. Mod. Phys. 1943. **15**. P. 1. [3] Morgan T. N.//Phys. Rev. 1965. **A139**. P. 343. [4] Kane F. O.//Phys. Rev. 1963. **131**. P. 79. [5] Бонч-Бруевич В. Л.//ФТТ. 1962. **4**. С. 2660. [6] Бонч-Бруевич В. Л., Звягин И. П., Кайпер Р. и др. Электронная теория неупорядоченных полупроводников. М., 1981. [7] Scribner D. A., Leopold Lutz.//J. Appl. Phys. 1985. **57**. P. 1147.

Поступила в редакцию
06.09.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1994. Т. 35, № 2

АСТРОНОМИЯ

УДК 521.14/17.528.21/22

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПУТНИКОВЫХ МОДЕЛЕЙ ПОТЕНЦИАЛА НА ФИЗИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПЛАНЕТ

Н. А. Чуйкова
(ГАИШ)

Даны практические рекомендации для использования разработанной ранее автором теории, позволяющей от спутниковой модели потенциала притяжения планеты перейти к модели, оптимальной для заданного региона физической поверхности планеты. Представлена методика практической проверки теории для спутниковых моделей гравитационного поля Земли.

Использование моделей потенциала, определенных из наблюдений спутниковых орбит, в виде ряда Лапласа для нахождения характеристик гравитационного поля на физических поверхностях планет [1, 2] может встретить много затруднений в силу следующих причин.

1) Для обеспечения сходимости ряда Лапласа поверхность планеты и ее внутреннее строение должны подчиняться вполне определенным условиям [3—5].

2) Полученное решение, в сущности, является решением задачи Коши—Ковалевской и в силу этого некорректно [6]. Поэтому малые ошибки определения коэффициентов разложения потенциала (стоксовых постоянных) в спутниковой зоне могут вызвать значительные ошибки при аналитическом продолжении полученной модели на поверхность тела.

3) Данное решение (ряд Лапласа) не оптимально (в смысле быстроты сходимости) как для всей поверхности несферической планеты (в силу неортогональности системы шаровых функций на несферической поверхности), так и для отдельной части любой поверхности (в силу того, что равномерная сходимость ряда Лапласа гарантирует да-

же на сферической поверхности наилучшую сходимость лишь по равномерной норме и в среднем, но не наилучшую поточечную сходимость).

В ряде работ [7—9] автором была разработана теория, позволяющая от спутниковой модели потенциала перейти к модели, оптимальной или для всей несферической поверхности конкретной планеты, или для заданного региона физической поверхности любой планеты. Практический вывод теории в применении к конкретному региону состоит в следующем:

1) зная детальную форму поверхности в заданном регионе наблюдения и максимальное значение высоты рельефа для всей остальной поверхности планеты, можно определить некий параметр $0<\alpha<1$, характеризующий рельеф местности: $\alpha=1$ соответствует сферической поверхности; α уменьшается с ростом наклонов местности в исследуемом районе и с ростом максимальных превышений рельефа над сферой, проходящей через точку наблюдения, вне этого района;

2) зная α, можно посчитать коэффициенты $C_n^{(N)}(\alpha)<1$, на которые следует умножить стоксовы постоянные n-й степени $\bar{S}_{nm}$, $\bar{D}_{nm}$, определенные из спутниковых наблюдений, для получения оптимальной модели потенциала заданного приближения N в данном конкретном районе; а именно получаем

$$U_{\text{opt}}(r,\ \varphi,\ \lambda)=$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{fM}{r}\sum_{n=0}^{N}C_n^{(N)}(\alpha)\left(\frac{a}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n}(\bar{S}_{nm}\cos m\lambda+\bar{D}_{nm}\sin m\lambda)\,\bar{P}_{nm}(\sin\varphi),$$

где r, φ, λ — сферические координаты точки наблюдения, fM — произведение гравитационной постоянной на массу планеты, a — большая полуось планеты, $\bar{P}_{nm}(\sin\varphi)\begin{Bmatrix}\cos m\lambda\\ \sin m\lambda\end{Bmatrix}$ — нормированные сферические функции.

Отметим основные свойства коэффициентов $C_n^{(N)}(\alpha)$ для двух теоретических моделей оптимизации:

1-я модель: $C_n^{(N)}(\alpha)=1$ при $n\leqslant n_N$; $C_n^{(N)}(\alpha)<1$ при $n>n_N$,

где $\{n_N\}$ — произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию $(n_{N+1}/n_N)\underset{N\to\infty}{\to}\infty$;

2-я модель: все $C_n^{(N)}(\alpha)<1$ определяются формулой

$$C_n^{(N)}(\alpha)=\alpha^n n!\sum_{q=n}^{N}\frac{|S_q^{(n)}|}{q!}\beta^q<1,$$

где $S_q^{(n)}$ — числа Стирлинга первого рода, $\beta=1-e^{-1/\alpha}$, причем $C_n^{(N)}\to 1$ при $N\to\infty$, $n\ll N$; $1>C_1^{(N)}>(C_1^{(N)})^n>C_n^{(N)}>C_N^{(N)}$, $1-\beta^N/(N+1)>$ $>C_1^N>1-\beta^N$, $C_N^{(N)}=(\alpha\beta)^N$, $C_n^{(N)}(\alpha)\underset{\substack{N\to\infty\\ n\sim N}}{\to}0$ тем быстрее, чем меньше α; $C_n^{(N)}(\alpha)\underset{\alpha\to 1}{\to}1$.

В настоящей работе представлена методика практической проверки разработанной автором теории для спутниковых моделей гравитационного поля Земли при оптимизации их для конкретного региона Земли. Земное гравитационное поле позволяет осуществить такую проверку, поскольку для него имеются не только спутниковые результаты наблюдений, но и наземные.

Методика такой проверки была теоретически исследована для потенциала притяжения однородного эллипсоида сжатия.

Оказывается, например, что классическое разложение потенциала эллипсоида в ряд Лапласа [10] в точке поверхности эллипсоида с наихудшими условиями сходимости этого ряда (т. е. при $r=c$, $\varphi=90°$):

$$U(r=c,\ \varphi=90°)=\frac{fM}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n l^{2n}}{(2n+1)(2n+3)},\qquad (1)$$

где $l=E/c$; $E=\sqrt{a^2-c^2}$; a, c — большая и малая полуоси эллипсоида, по сравнению с оптимальным (полученным нами) разложением в этой же точке [11]

$$U_{\text{opt}}(r=c,\ \varphi=90°)=\frac{fM}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(1/2)_n}{n!(2n+3)}(E/a)^{2n}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{fM}{c}\sum_{n=0}^{N}C_n^{(N)}(l)\frac{3(-1)^n l^{2n}}{(2n+1)(2n+3)},\qquad (2)$$

где $C_n^{(N)}(l)=1-\left|\frac{A_{n1}}{A_{n0}}\right|l^{2(N+1)}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{A_{nk}}{A_{n0}}l^{2k(N+1)}<1,$

$$A_{nk}=\sum_{j=0}^{N}b_j d_{n+(N+1)k-j}(j),$$

$$b_j=\frac{(3/2)_j(1/2)_j}{(5/2)_j j!},$$

$$d_k(j)=(-1)^k\frac{(j+0{,}5)_k}{k!},$$

$$A_{n0}=\frac{3(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)},$$

$$(a)_j=a(a+1)\ldots(a+j-1),$$

не просто сходится медленнее, но и совсем по-другому приближается к точному значению. Так, сумма оптимального ряда (2) при всех N остается меньше точного значения (т. е. приближается к нему постепенно снизу), а сумма ряда (1) колеблется вокруг него. Это вызвано тем, что в отличие от (2) ряд (1) является знакопеременным.

Таким образом, переход от ряда (1) к оптимальному ряду (2) аналитически подобен процедуре, применяемой в анализе для улучшения сходимости знакопеременных рядов.

Поэтому можно попытаться для конкретного района земной поверхности эмпирически определить коэффициенты $C_n^{(N)}$, исследуя характер сходимости последовательных сумм рядов Лапласа к конечному значению. Для этого мы будем подбирать коэффициенты $C_n^{(N)}$ таким образом, чтобы в выбранном районе минимизировать среднеквадратическое расхождение δh_N между высотой геоида и приближением, соответствующим разложению данной степени N:

$$\delta h_N=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{I}(\Delta h_{N,i})^2}{I-1}},$$

где I — число точек наблюдений в заданном районе, $\Delta h_{N,i}=h_i-h_{N,i}$, h_i — высота геоида в i-й точке относительно нормального эллипсоида, $h_{N,i}=(U_{N,i}-V_i)/\gamma_i$—$N$-е приближение к высоте геоида,

$$U_{N,i}=\sum_{n=0}^{N} C_n^{(N)} S_n^{(i)},$$

$$S_n^{(i)}=\frac{fM}{r_e^{(i)}}\left(\sum_{m=0}^{n}\overline{S}_{nm}\cos m\lambda_i+\overline{D}_{nm}\sin m\lambda_i\right)\overline{P}_{nm}(\sin\varphi_i),$$

γ_i, V_i, $r_e^{(i)}$ — нормальные значения силы тяжести, потенциала и радиуса нормального эллипсоида в i-й точке.

Необходимое решение получается из решения системы уравнений

$$\frac{\partial(\delta h_N)}{\partial C_n^{(N)}}=0,\quad \frac{\partial^2(\delta h_N)}{\partial (C_n^{(N)})^2}>0$$

относительно $C_n^{(N)}$. Получим

$$C_n^{(N)}=\sum_{i=1}^{I}\frac{S_n^{(i)}}{\gamma_i}\left(h_i-\frac{U_{N,i}^{(a,b,c)}-V_i}{\gamma_i}\right)\Bigg/\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{S_n^{(i)}}{\gamma_i}\right)^2,$$

где

$$V_i=\frac{fM}{r_e^{(i)}}\left[1-\overline{J}_2\left(\frac{a}{r_e^{(i)}}\right)^2\overline{P}_2(\sin\varphi_i)-\right.$$

$$\left.-\overline{J}_4\left(\frac{a}{r_e^{(i)}}\right)^4\overline{P}_4(\sin\varphi_i)-\overline{J}_6\left(\frac{a}{r_e^{(i)}}\right)^6\overline{P}_6(\sin\varphi_i)\right]$$

— потенциал Нормальной Земли;

$$\gamma_i=\frac{fM}{(r_e^{(i)})^2}(1+0{,}0052884\sin^2\varphi_i-0{,}0000059\sin^2 2\varphi_i)$$

— нормальное значение силы тяжести; индексы «a, b, c» соответствуют трем различным независимым способам определения $C_n^{(N)}$;

$$U_{N,i}^{(a)}=U_0+\sum_{k=2}^{N-1}S_k^{(i)};\quad U_0=\frac{fM}{r_e^{(i)}};$$

$$U_{N,i}^{(b)}=U_0+\sum_{k=2}^{n-1}C_k^{(N)}S_k^{(i)}+\sum_{k=n+1}^{N}S_k^{(i)};\quad U_{N,i}^{(c)}=U_0+\sum_{k=2}^{n-1}S_k^{(i)}+\sum_{k=n+1}^{N}C_k^{(N)}S_k^{(i)}.$$

Таким образом, мы эмпирически можем решить сразу две задачи, поставленные в начале статьи:

а) корректировать некорректное решение задачи Коши—Ковалевской;

б) оптимизировать данное решение для каждого приближения.

Конкретную оценку сходимости можно сделать путем сравнения двух моделей (исходной и улучшенной) с высотами геоида, т. е. путем оценки $\Delta_N=\delta h_N^0-\delta h_N>0$, где знак «0» соответствует исходной модели $(C_n^{(N)}=1)$.

Аналогичную задачу можно решать и для получения оптимальной модели разложения силы тяжести для данного региона. Коэффициенты $C_n^{(N)}$ для оптимизированной модели силы тяжести должны отличаться от коэффициентов для оптимальной модели потенциала.

Детальный анализ полученных значений $C_n^{(N)}$ и Δ_N для различных регионов Земли позволит судить как о справедливости выводов теории (согласно которой все $C_n^{(N)}$ должны не превышать 1), так и о степени соответствия различных спутниковых моделей потенциала Земли конкретным регионам земной поверхности. Результаты такого анализа для одного из регионов Земли, которые будут опубликованы в следующем номере журнала, полностью подтверждают выводы теории.

В заключение отметим, для каких конкретных целей могут быть использованы разработанные теория, алгоритмы, программа: 1) при наличии единственной спутниковой модели потенциала притяжения небесного тела — для получения наилучшей модели любого приближения (но не выше спутникового) для конкретного участка поверхности тела; 2) при наличии нескольких спутниковых моделей — для создания единственной наилучшей модели любого приближения (не выше спутникового); 3) при наличии спутниковой модели и наземной гравиметрии — для создания наилучшей спутниковой модели максимального приближения; 4) при наличии спутниковой модели и отдельных поверхностных точек с наблюдениями — для наилучшей интерполяции поля между этими точками.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Максимова Т. Г., Чуйкова Н. А.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1984. **25**, № 1. С. 64. [2] Максимова Т. Г., Чуйкова Н. А.//Кинем. и физ. небесных тел. 1990. **6**, № 1. С. 19. [3] Чуйкова Н. А.//Изв. вузов, Геодезия и аэрофотосъемка. 1980. № 4. С. 54. [4] Чуйкова Н. А.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1984. **25**, № 1. С. 22. [5] Чуйкова Н. А.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. **32**, № 4. С. 86. [6] Антонов В. А., Тимошкова Қ. И., Холщевников К. В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. М., 1988. [7] Чуйкова Н. А.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1985. **26**, № 5. С. 77. [8] Чуйкова Н. А.//Там же. 1987. **28**, № 6. С. 56. [9] Чуйкова Н. А.//Там же. 1988. **29**, № 1. С. 81. [10] Дубошин Г. Н. Теория притяжения. М., 1961. [11] Чуйкова Н. А.//Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики. Киев, 1982. С. 120.

Поступила в редакцию
28.06.93